

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1: (5,0 điểm)

1. Tính $A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

2. Cho biểu thức $A = \frac{2+5\sqrt{2}}{4-x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{2-\sqrt{x}}$ (Với $x \geq 0, x \neq 4$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các số hữu tỷ x để A có giá trị nguyên.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 - y^2 + xy - 8x - 5y + 3 = 0$

b) Cho 2 số tự nhiên $y > x$ thỏa mãn $(2y-1)^2 = (2y-x)(6y+x)$

Chứng minh $2y-x$ là số chính phương.

c) Cho 3 số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{y^2+x+1}{1+y^2} - \frac{z^2-y+1}{1+z^2} + \frac{x^2+z+1}{1+x^2}$

Câu 3: (4,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-4x+4x^2} = 5-x$

b) $\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2+9}} = 1$

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

a) Chứng minh $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

b) Biết $AH = h; A = \alpha$. Tính độ dài MN theo h và α .

c) Trong trường hợp $\angle A = 90^\circ$ chứng minh $\frac{HM \cdot HN}{HB \cdot HC} = \frac{MN}{BC}$

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho 2023 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng trong số các số đó có một số chia hết cho 2023 hoặc có một số số mà tổng của các số ấy chia hết cho 2023.

---Hết---

ĐÁP ÁN

Câu 1: (5,0 điểm)

1. Tính $A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

$$A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 = 3$$

2. Cho biểu thức $A = \frac{2 + 5\sqrt{2}}{4 - x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{2 - \sqrt{x}}$ (Với $x \geq 0, x \neq 4$)

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các số hữu tỷ x để A có giá trị nguyên.

$$A = \frac{2 + 5\sqrt{2}}{4 - x} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{2 - \sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$$

Với mọi x thỏa mãn ĐKXD, ta có:

$$A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \Rightarrow A\sqrt{x} + 2A = 3\sqrt{x} \Rightarrow (2 - A)\sqrt{x} = A + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2A}{3 - A}$$

$$\Rightarrow 0 \leq A < 3$$

Vì A nguyên nên $A = \{0; 1; 2\}$

Thay vào tìm được $x = \{0; 1; 16\}$ (TM)

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 - y^2 + xy - 8x - 5y + 3 = 0$

$$2x^2 - y^2 + xy - 8x - 5y + 3 = 0$$

$$\text{Phân tích được } (x + y + 1)(2x - y - 6) = 3$$

$$\text{Giải ra được: } (x; y) \in \{(1; -1); (1; -3)\}$$

b) Cho 2 số tự nhiên $y > x$ thỏa mãn $(2y - 1)^2 = (2y - x)(6y + x)$

Chứng minh $2y - x$ là số chính phương.

$$(2y - 1)^2 = (2y - x)(6y + x)$$

Vì $2y - 1$ là số chính phương lẻ $\Rightarrow x$ là số lẻ.

Gọi $d = (2y - x)(6y + x)$ với $d \in \mathbb{N}$; d lẻ.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y - x : d \\ 6y + x : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x + 6y + x : d \\ 3(2y - x) - 6y + x : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y : d \\ -4x : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y : d \\ x : d \end{cases}$$

Mặt khác từ giả thiết $\Rightarrow (2y - 1)^2 : d^2 \Rightarrow 2y - 1 : d$

Mà $y : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$. Do đó $2y - x$ là số chính phương.

c) Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{y^2 + x + 1}{1 + y^2} - \frac{z^2 - y + 1}{1 + z^2} + \frac{x^2 + z + 1}{1 + x^2}$

$$M = \frac{y^2 + x + 1}{1 + y^2} - \frac{z^2 - y + 1}{1 + z^2} + \frac{x^2 + z + 1}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + y^2} + \frac{y}{1 + z^2} + \frac{z}{1 + x^2} + 1$$

Ta có: $\frac{x}{1 + y^2} + \frac{xy^2}{1 + y^2} = x \Rightarrow \frac{x}{1 + y^2} = x - \frac{xy^2}{1 + y^2}$

Tương tự: $\frac{y}{1 + z^2} = y - \frac{yz^2}{1 + z^2}$; $\frac{z}{1 + x^2} = z - \frac{zx^2}{1 + x^2}$

$$M = (x + y + z) - \left(\frac{xy^2}{1 + y^2} + \frac{yz^2}{1 + z^2} + \frac{zx^2}{1 + x^2} \right) + 1$$

$$= 4 - \left(\frac{xy^2}{1 + y^2} + \frac{yz^2}{1 + z^2} + \frac{zx^2}{1 + x^2} \right)$$

Mà $\frac{xy^2}{1 + y^2} \leq \frac{xy^2}{2y} = \frac{xy}{2}$. Tương tự $\frac{yz^2}{1 + z^2} \leq \frac{yz}{2}$; $\frac{zx^2}{1 + x^2} \leq \frac{zx}{2}$

$$\Rightarrow M \geq 4 - \left(\frac{xy}{2} + \frac{yz}{2} + \frac{zx}{2} \right)$$

Mặt khác ta lại có $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow (xy + yz + zx) \leq 3$$

$$\Rightarrow M \geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}. \text{ Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Câu 3: (4,0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5 - x$

$$\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5 - x \text{ (ĐKXD: } \mathbb{R} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow |1 - 2x| = 5 - x \quad (1)$$

$$\text{TH1: } x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x = -4$$

$$\text{TH2: } \frac{1}{2} \leq x \leq 5 \Rightarrow x = 2$$

Vậy $x = -4; 2$

$$\text{b) } \frac{9}{x^2} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 9}} = 1$$

$$\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 9}} = 1 \quad (1) \quad (\text{ĐKXĐ: } x \neq 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow 9\sqrt{2x^2 + 9} + 2x^3 = x^2\sqrt{2x^2 + 9}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2x^2 + 9} = a$$

$$\Rightarrow 9a + 2x^3 = x^2 \cdot a$$

$$\Rightarrow 9a + x(a^2 - 9) = ax^2$$

$$\Rightarrow (a - x)(9 + ax) = 0$$

$$\Rightarrow a = x \text{ hoặc } a = -x$$

$$\text{TH1: } a = x = \sqrt{2x^2 + 9} = x \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

$$\text{TH2: } ax = -9 \Rightarrow x\sqrt{2x^2 + 9} = -9. \text{ Giải ra được } x = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy pt có nghiệm } x = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

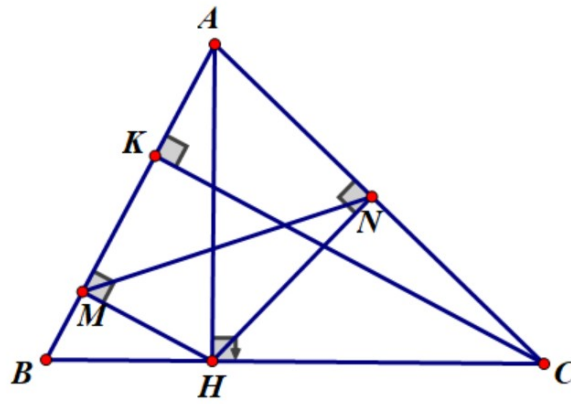
Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

a) Chứng minh $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

b) Biết $AH = h; A = \alpha$. Tính độ dài MN theo h và α .

c) Trong trường hợp $\angle A = 90^\circ$ chứng minh $\frac{HM \cdot HN}{HB \cdot HC} = \frac{MN}{BC}$



Theo hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông
 $\Rightarrow AH^2 = AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

Do đó $AM \cdot AB = AN \cdot AC$

$$\Delta AMN \sim \Delta ACB (c.g.c) \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AH}{AB} (*) \Rightarrow MN = \frac{AM \cdot BC}{AC} (1)$$

Từ C kẻ CK vuông góc với AB tại K.

Ta có: $\sin \alpha = \sin A = \frac{CK}{AC}$

Mặt khác: $\Delta AMN \sim \Delta ACB$ (2 tam giác vuông có $\angle MAH = \angle BCK$, vì cùng phụ góc B)

$$\Rightarrow \frac{AH}{CB} = \frac{AM}{CK} \Rightarrow AM \cdot CB = AH \cdot CK (2)$$

Từ (1)(2) suy ra $MN = \frac{AH \cdot CK}{AC} = AH \cdot \sin \alpha = h \cdot \sin \alpha$

Từ (*) ta có $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AC}$; $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{MN^2}{BC^2} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} \Rightarrow \frac{AB \cdot AC}{BC^2} = \frac{AM \cdot AN}{MN^2} (3)$$

Mà tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC$ và AMHN là hình chữ nhật.

Nên từ (3) suy ra $\frac{AH \cdot BC}{BC^2} = \frac{AM \cdot AN}{MN^2}$

Và $\begin{cases} AM \cdot AN = HM \cdot HN \\ AH^2 = MN^2 = HB \cdot HC \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{HM \cdot HN}{HB \cdot HC} = \frac{AH}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho 2023 số tự nhiên bất kỳ. Chứng minh rằng trong số các số đó có một số chia hết cho 2023 hoặc có một số số mà tổng của các số ấy chia hết cho 2023.

Gọi 2023 số đã cho là $a_1; a_2; \dots; a_{2023}$

Xét dãy $S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; \dots; S_{2023} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2023}$.

Chia tất cả các số hạng của dãy cho 2023 ta có các trường hợp sau.

TH1: Nếu có 1 số hạng nào của dãy chia hết cho 2023 thì bài toán được chứng minh.

TH2: Nếu không có số hạng nào của dãy chia hết cho 2023 thì vì có 2023 phép chia mà số dư chỉ gồm 1; 2; 3; ...; 2022, do đó theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 số hạng của dãy có cùng số dư khi chia cho 2023. Gọi 2 số hạng đó là S_i và S_j ; không mất tính tổng quát, giả sử $1 \leq i < j \leq 2023$

$$S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i; S_j = a_1 + a_2 + \dots + a_j$$

Lúc đó $S_j - S_i : 2023 \Rightarrow a_{i+1} + a_j : 2023$. Từ đó ta có đpcm.

-