

HỌC SINH GIỎI TOÁN THÁI BÌNH 2023-2024

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1 (2.0 điểm): Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}}{4x-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}+1)^2}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị biểu thức A khi $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Câu 2 (2.0 điểm):

a) Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$.

b) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 \\ (m-1)x + 12y = 24 \end{cases}$$
 (với m là tham số).

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa điều kiện $x + y > 1$.

Câu 3 (1.5 điểm): Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2023$

Chứng minh rằng: $x \cdot \sqrt{\frac{yz}{y+2022z}} + y \cdot \sqrt{\frac{zx}{z+2022x}} + z \cdot \sqrt{\frac{xy}{x+2022y}} \leq \frac{2023}{\sqrt{3}}$.

Câu 4 (3,5 điểm): Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Điểm E di động trên cạnh CD (khác C, D). M là giao điểm của AE với BC. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AE cắt CD tại N. I là trung điểm của đoạn thẳng MN. Đường phân giác của góc $\angle BAE$ cắt cạnh BC tại P.

Chứng minh rằng:

a) $BM \cdot DE = a^2$

b) AI vuông góc với MN và I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi E di động trên cạnh CD (khác C, D).

c) $AP \leq 2EP$

Câu 5 (1,0 điểm): Cho $P = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in \mathbb{N}, n > 1$)

Chứng minh rằng: P không phải là số chính phương.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2.0 điểm):

a) Điều kiện: $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1.$

$$A = \frac{4\sqrt{x} - 2 - 5\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 1}{(2\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(2\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$A = \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} - 1}$$

Vậy $A = \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} - 1}$ với điều kiện $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1.$

b) Áp dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ ta có:

$$x^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} + 3\sqrt{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})} \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 40 + 3\sqrt{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})} \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 + 4x + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ (do } x^2 + 4x + 10 > 0)$$

Thay $x = 4$ vào A ta được $A = \frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} - 1} = \frac{2\sqrt{4} + 1}{2\sqrt{4} - 1} = \frac{5}{3}$

Vậy $A = \frac{5}{3}$ khi $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

Câu 2 (2.0 điểm):

a) Điều kiện: $x \geq 1$ (*)

Ta có: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1} + 1)(x + \sqrt{x-1} - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x - 1 = 9 - 6x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ (x-2)(x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} 3x + (m-1)y = 12 \\ (m-1)x + 12y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + (m-1)y = 12(1) \\ y = \frac{24 - (m-1)x}{12} (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} [36 - (m-1)^2]x &= 168 - 24m \\ \Leftrightarrow (m-7)(m+5)x &= 24m - 168 \quad (3) \end{aligned}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -5 \\ m \neq 7 \end{cases}$$

Khi đó:
$$x = \frac{24m - 168}{(m-7)(m+5)} = \frac{24(m-7)}{(m-7)(m+5)} = \frac{24}{m+5}$$

Thay vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} (m-1) \left(\frac{24}{m+5} \right) + 12y &= 24 \Leftrightarrow 12y = 24 - \frac{24(m-1)}{m+5} \\ \Leftrightarrow y &= 2 - \frac{2(m-1)}{m+5} \Leftrightarrow y = \frac{12}{m+5} \end{aligned}$$

Do đó:
$$x + y > 1 \Leftrightarrow \frac{24}{m+5} + \frac{12}{m+5} > 1 \Leftrightarrow \frac{36 - m - 5}{m+5} > 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{m-31}{m+5} < 0 &\Leftrightarrow m-31 < 0 < m+5 \\ \Leftrightarrow -5 < m < 31 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $-5 < m < 31$ và $m \neq 7$.

Vậy $-5 < m < 31$ và $m \neq 7$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 3 (1.5 điểm):

Ta sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc sau:

+ Cho ba số thực a, b, c ta có:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0 \\ \Leftrightarrow (a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ca) \quad (1) \end{aligned}$$

+ Cho hai bộ số thực (a_1, a_2, a_3) và (b_1, b_2, b_3) ta có:

$$\begin{aligned}
& (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 + (a_2b_3)^2 + (a_3b_2)^2 + (a_3b_1)^2 + (a_1b_3)^2 \\
& \geq 2(a_1b_1a_2b_2 + a_2b_2a_3b_3 + a_3b_3a_1b_1) \\
& \Leftrightarrow (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
& \Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)} \quad (2)
\end{aligned}$$

Ta chứng minh cho trường hợp tổng quát: Cho ba số thực x, y, z dương và $x + y + z = k > 1$

Ta có bất đẳng thức sau: $\frac{xy}{x + (k-1)y} \leq \frac{(k-1)x + y}{k^2} \quad (3)$

Thật vậy, (3) $\Leftrightarrow (k-1)x^2 + xy + (k-1)^2xy + (k-1)y^2 - k^2xy \geq 0$

$$\Leftrightarrow (k-1)(x-y)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

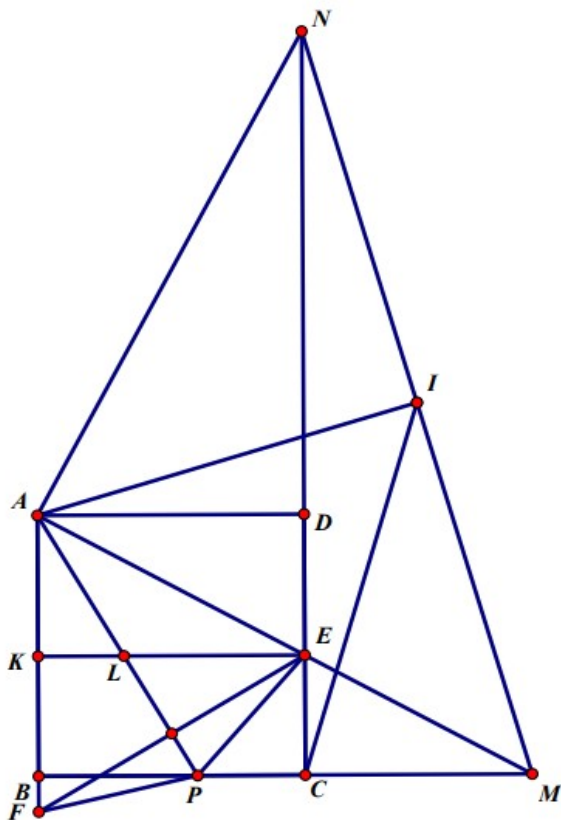
$$\begin{aligned}
& \text{Áp dụng (3) ta có: } x \cdot \sqrt{\frac{yz}{y + (k-1)z}} + y \cdot \sqrt{\frac{zx}{z + (k-1)x}} + z \cdot \sqrt{\frac{xy}{x + (k-1)y}} \\
& \leq \frac{1}{k} (x \cdot \sqrt{(k-1)y + z} + y \cdot \sqrt{(k-1)z + x} + z \cdot \sqrt{(k-1)x + y}) \\
& = \frac{1}{k} (\sqrt{x} \cdot \sqrt{(k-1)yx + zx} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{(k-1)zy + xy} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{(k-1)xz + yz}) \\
& = \frac{1}{k} \sqrt{k^2(zx + xy + yz)} \\
& = \sqrt{xy + yz + zx} \leq \sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{3}} = \frac{k}{\sqrt{3}} \quad (\text{theo (1)})
\end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } x \cdot \sqrt{\frac{yz}{y + (k-1)z}} + y \cdot \sqrt{\frac{zx}{z + (k-1)x}} + z \cdot \sqrt{\frac{xy}{x + (k-1)y}} \leq \frac{k}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\text{Thay } k = 2023 \text{ ta được: } x \cdot \sqrt{\frac{yz}{y + 2022z}} + y \cdot \sqrt{\frac{zx}{z + 2022x}} + z \cdot \sqrt{\frac{xy}{x + 2022y}} \leq \frac{2023}{\sqrt{3}} \quad (\text{đpcm})$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{2023}{3}$.

Câu 4 (1.5 điểm):



a) Xét tam giác AEN có: $\angle EAN = 90^\circ$, AD là đường cao.

Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông cho tam giác AEN ta có:

$$DE \cdot DN = AD^2 \Rightarrow DE \cdot DN = a^2 \quad (1)$$

Xét hai tam giác ADN và MBA ta có:

$$\angle ADN = \angle ABM = 90^\circ$$

$$AD = AB = a$$

$$\angle DAN = \angle BAM \quad (\text{vì cùng phụ với góc } \angle BAE)$$

$$\text{Suy ra } \triangle ADN = \triangle MBA \quad (\text{g.c.g}) \Rightarrow DN = BM \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra: } BM \cdot DE = a^2 \quad (\text{đpcm})$$

b) Xét tam giác AMN ta có: $AM = AN$ (theo câu a)), AI là đường trung tuyến.

Suy ra: AI là đường cao của tam giác AMN hay $AI \perp MN$.

Xét tam giác AMN ta có: $\angle MAN = 90^\circ$ (giả thiết), AI là đường trung tuyến.

$$\text{Suy ra: } AI = \frac{MN}{2} \quad (3)$$

Xét tam giác CMN ta có: $\angle MCN = 90^\circ$ (giả thiết), CI là đường trung tuyến.

Suy ra: $CI = \frac{MN}{2}$ (4)

Từ (3), (4) suy ra: AI = CI hay I nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AC (5)

Mặt khác, BD là đường trung trực của đoạn thẳng AC (vì ABCD là hình vuông) (6)

Từ (5), (6) suy ra: I nằm trên đường thẳng BD cố định (đpcm)

c) Kẻ $EF \perp AP$ ($F \in AB$), $EK \perp AB$ ($K \in AB$) (7)

Xét tứ giác BCEK có $\angle B = \angle C = \angle K = 90^\circ$ nên BCEK là hình chữ nhật.

Suy ra: $EK = BC = a$ (8)

Gọi L là giao điểm của AP với EK. Ta có: $\angle LAP = \angle KEF$ (vì cùng phụ với góc $\angle KLE$) (9)

Từ (7), (8), (9) suy ra: $\triangle ALP = \triangle KEF \Rightarrow AP = EF$ (10)

Vì AP vừa là đường cao vừa là đường phân giác của tam giác AEF nên AP là đường trung trực của đoạn thẳng EF. Suy ra: $PE = PF$ (11)

Từ (10), (11) ta có: $AP = EF \leq PE + PF = PE + PE = 2PE \Leftrightarrow AP \leq 2PE$ (đpcm)

Câu 5 (1,0 điểm):

Ta có: $P = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n+1)^2 \cdot (n^2 - 2n + 2)$

Với $n \in \mathbb{N}, n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Do đó: $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương.

Vậy $P = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không là số chính phương.