

Người làm: Nguyễn Thị Thảo Nguyên

Zalo: Thảo Nguyên - số đt zalo: 0905338862

Email: minhhoang1990@gmail.com

CD10: Chứng minh BĐT và tìm GTLN, GTNN

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Thanh Uyên – Lai Châu 2022 - 2023)

$$A = \frac{2024}{4 - |2022x - 1|}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

Với mọi x ta có:

$$\begin{aligned} |2022x - 1| \geq 0 &\Rightarrow 4 - |2022x - 1| \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4 - |2022x - 1|} \geq \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{4 - |2022x - 1|} \cdot 2024 &\geq \frac{1}{4} \cdot 2024 \Rightarrow \frac{2024}{4 - |2022x - 1|} \geq 506 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } 2022x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2022}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 506 khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2022}$.

Câu 2. (HSG 7 Lương Tài – Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho x thỏa mãn: $|x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| = 4$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của x , M là giá trị lớn nhất của x . Tính giá trị của $A = m + M$.

Lời giải

Áp dụng tính chất: $|a| \geq a$, dấu "=" xảy ra khi $a \geq 0$, ta được:

$$|x - 2| \geq x - 2 \text{ dấu "=" xảy ra khi } x - 2 \geq 0.$$

$$|x - 3| \geq x - 3 \text{ dấu "=" xảy ra khi } x - 3 \geq 0.$$

$$|4 - x| \geq 4 - x \text{ dấu "=" xảy ra khi } 4 - x \geq 0.$$

$$|5 - x| \geq 5 - x \text{ dấu "=" xảy ra khi } 5 - x \geq 0.$$

$$\text{Suy ra: } |x - 2| + |x - 3| + |4 - x| + |5 - x| \geq x - 2 + x - 3 + 4 - x + 5 - x = 4$$

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x \leq 4$$

Dấu "=" xảy ra khi:

Suy ra 3 là giá trị nhỏ nhất của x , 4 là giá trị lớn nhất của x .

Suy ra: $A = m + M = 3 + 4 = 7$.

Câu 3. (HSG 7 Lương Tài – Bắc Ninh 2022 - 2023)

$$A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 23|$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

$$A = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-23| \text{ thì:}$$

Ta có:

$$A = |x-1| + |x-2| + \dots + |11-x| + |x-12| + |13-x| + \dots + |23-x|.$$

Áp dụng tính chất $|a| \geq a$, dấu “=” xảy ra khi $a \geq 0$, ta được:

$$|x-1| \geq x-1; |x-2| \geq x-2; \dots; |x-11| \geq x-11;$$

$$|x-12| \geq 0;$$

$$|13-x| \geq 13-x; \dots; |23-x| \geq 23-x.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=12$.

$$\text{Suy ra: } A \geq x-1+x-2+\dots+x-11+0+13-x+\dots+23-x$$

$$= 23-1+22-2+\dots+13-11+0$$

$$= 22+20+18+16+14+\dots+2 = \frac{(22+2).11}{2} = 132.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 132 khi $x=12$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2022 - 2023)

$$B = \frac{x^2+15}{x^2+3}$$

Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{x^2+15}{x^2+3} = \frac{(x^2+3)+12}{x^2+3} = 1 + \frac{12}{x^2+3}.$$

Với mọi x , ta có:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{12}{x^2+3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2+3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2+3} \leq 5.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=0$.

Vậy GVLN của B là 5 khi $x=0$.

Câu 5. (HSG 7 Hà Đông 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

Vì: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ nên $0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2$.

Suy ra: $0 \leq 4 \leq 3c+6$ (vì $a+b+c=1$).

$$\text{Hay } 3c \geq -2 \Rightarrow c \geq -\frac{2}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $-\frac{2}{3}$ khi đó $a+b=\frac{5}{3}$.

Câu 6. (HSG 7 Bình Xuyên – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho x là số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x-1| + |2x-2| + \dots + |2x-10|$.

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 1| + |2x - 2| + \dots + |2x - 10|$

$$A = (|2x - 1| + |2x - 10|) + (|2x - 2| + |2x - 9|) \dots + (|2x - 5| + |2x - 6|)$$

$$A = (|2x - 1| + |10 - 2x|) + (|2x - 2| + |9 - 2x|) \dots + (|2x - 5| + |6 - 2x|)$$

$$A \geq |2x - 1 + 10 - 2x| + |2x - 2 + 9 - 2x| + |2x - 5 + 6 - 2x| = 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$$

$$\text{Dấu } = \text{ xảy ra khi: } \begin{cases} (2x-1)(10-2x) \geq 0 \\ (2x-2)(9-2x) \geq 0 \\ \dots \\ (2x-5)(6-2x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} \leq x \leq 5 \\ 1 \leq x \leq \frac{9}{2} \\ \dots \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 3 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Câu 7. (HSG 7 Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
 $P = 2023ca - ab - bc$

Lời giải

Ta có: $P = 2023ca - ab - bc = 2023ca - b(a + c)$

Có: $(x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad \forall x, y$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. (*)

+ Áp dụng bất đẳng thức (*), ta có: $b(a + c) \leq \frac{b^2 + (a + c)^2}{2}$

$$\text{Suy ra: } -b(a + c) \geq -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - ac = \frac{-2}{2} - ac = -1 - ac$$

$$\text{Do đó: } P \geq 2023ca - 1 - ac = 2022ac - 1$$

$$+ \text{ Lại có: } |ac| = |a| \cdot |c| \leq \frac{a^2 + c^2}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ suy ra } -1 \leq ac \leq 1$$

$$\text{Do đó: } P \geq 2022ac - 1 \geq 2022 \cdot (-1) - 1 = -2023$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} b = a + c \\ |a| = |c| \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \\ a^2 + 0^2 + a^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 0 \\ c = -a \\ a^2 = \frac{1}{6} \\ b = 2a \\ c = a \end{cases}$$

Vậy $P_{\min} = -2023$ khi:

$$(a; b; c) \in \left\{ (1; 0; -1), (-1; 0; 1), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

Câu 8. (HSG 7 Diễn Châu 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó: $P = \frac{x+1}{2x-2}$.

Lời giải

$$P = \frac{x+1}{2x-2} = \frac{(x-1)+2}{2(x-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x-1}$$

Ta có:

Để $P_{\max} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x-1$ đạt giá trị nhỏ nhất và $x-1 > 0$.

Mà x nguyên nên $x=2$.

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2-1} = \frac{3}{2} \text{ khi } x=2.$$

Câu 9. (HSG 7 Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $D = \frac{2022}{2023 - |x-2024|}$ với $x \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

$$\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2023 - |x-2024| \in \mathbb{Z}$$

Để D đạt giá trị nhỏ nhất thì $2023 - |x-2024|$ lớn nhất và âm.

$$\Rightarrow 2023 - |x-2024| = -1$$

$$\Rightarrow |x-2024| = 2024$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ hoặc } x=4048.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức D là -2022 khi $x=0$ hoặc $x=4048$.

Câu 10. (HSG 7 Thái Hòa – Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = |x+1| + |x-1| + \sqrt{x^2+4}$.

Lời giải

Ta có: $|x+1| + |x-1| = |x+1| + |1-x| \geq |x+1-x+1| = 2$ với mọi x và $\sqrt{x^2+4} \geq 2$ với mọi x .

Suy ra: $Q \geq 4$ với mọi x .

Dấu bằng xảy ra khi $(x+1)(1-x) > 0$ và $x^2=0$ hay $x=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $Q=3$ khi $x=0$.

Câu 11. (HSG 7 Đông Hưng 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = |x-2022| + |x-2023|$.

Lời giải

$$F = |x-2022| + |x-2023| = |x-2022| + |2023-x|$$

$$|x - 2022| \geq x - 2022 \quad x - 2022 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2022$$

Vì dấu “=” xảy ra khi

$$|2023 - x| \geq 2023 - x \quad = \quad 2023 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2023$$

và dấu “ ” xảy ra khi

Suy ra: $F = |x - 2022| + |2023 - x| \geq x - 2022 + 2023 - x = 1$

$$= \begin{cases} x \geq 2022 \\ x \leq 2023 \end{cases} \Rightarrow 2022 \leq x \leq 2023$$

Dấu “ ” xảy ra khi:

$$\text{Min} F = 1 \quad 2022 \leq x \leq 2023$$

Vậy khi

Câu 12. (HSG 7 Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 2021| + |x - 2022| + |x - 2023|$

Lời giải

Ta có: $A = |x - 2021| + |x - 2022| + |x - 2023| = (|x - 2021| + |2023 - x|) + |x - 2022|$

Do $|x - 2021| + |2023 - x| \geq |x - 2021 + 2023 - x| = 2$ và $|x - 2022| \geq 0$ với mọi x nên $A \geq 2$.

$$\begin{cases} (x - 2021)(2023 - x) \geq 0 \\ x - 2022 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2022$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

Vậy $\text{Min } A = 2$ khi $x = 2022$.

Câu 13. (HSG 7 Lập Thạch – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = \frac{2026 - x}{x - 2023}$. Tìm x nguyên để A có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{2026 - x}{x - 2023} = \frac{2003 - x + 3}{x - 2023} = -1 + \frac{3}{x - 2023}$

A nhỏ nhất khi $\frac{3}{x - 2023}$ nhỏ nhất.

$\frac{3}{x - 2023}$ nhỏ nhất khi $x - 2023$ là số âm lớn nhất.

Mà x nguyên suy ra $x - 2023 = -1 \Leftrightarrow x = 2022$.

Vậy A có GTNN là -4 khi $x = 2022$.

Câu 14. (HSG 7 Tân Kỳ 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x - 4| + |2x - 6| + |2x - 8|$

Lời giải

Ta có: $A = |2x - 4| + |8 - 2x| + |2x - 6|$

Ta có:

$$|2x - 6| \geq 0 \quad (1)$$

$$|2x - 4| + |8 - 2x| \geq |2x - 4 + 8 - 2x| = 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $A = |2x - 4| + |2x - 6| + |2x - 8| \geq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ (2x - 4)(8 - 2x) \geq 0 \end{cases}$ hay $x = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 4| + |2x - 6| + |2x - 8|$ bằng 4 khi $x = 3$.

Câu 15. (HSG 7 Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ (với x là số nguyên).

Lời giải

Ta có: $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x}$.

Suy ra Q lớn nhất khi $\frac{3}{12 - x}$ lớn nhất.

$\frac{3}{12 - x}$ lớn nhất khi $12 - x$ là số dương nhỏ nhất.

Mà x nguyên nên $12 - x = 1$. Hay $x = 11$.

Với $x = 11$ thì $Q = \frac{27 - 2 \cdot 11}{12 - 11} = 5$.

Suy ra Q có giá trị lớn nhất là 5 khi $x = 11$.

Dạng 2.1: Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

Dạng 2.2: Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa tự nhiên

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$. Chứng minh rằng: $A < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$

$$4A = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}}$$

$$4A - A = \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}} \right)$$

$$3A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{1}{3} \cdot \left(4 - \frac{1}{4^{2021}} \right) - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}} < \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow A < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A < \frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 2. (HSG 7 Thọ Xuân – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$

Lời giải

$$S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3}$$

Ta có:

Đặt

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023.2024} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2022.2023.2024} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023} - \frac{1}{2023.2024} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2023.2024} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} > \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024.2025} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2023.2024.2025} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024} - \frac{1}{2024.2025} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{2024.2025} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} - \frac{1}{2.2024.2025} = \frac{1}{60} - \frac{1}{2.2024.2025} > \frac{1}{60} - \frac{1}{780} = \frac{1}{65} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{65} < S < \frac{1}{40}$

Vậy $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$

Câu 3. (HSG 7 Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{36}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}}$$

Đặt: Ta có:

$$\begin{aligned}
 5A &= 1 - \frac{2}{5^1} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \frac{5}{5^4} - \dots + \frac{2021}{5^{2020}} - \frac{2022}{5^{2021}} \\
 \Rightarrow 5A + A &= 6A = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \dots - \frac{1}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2021}} \\
 \text{Đặt } P &= 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} + \dots - \frac{1}{5^{2021}} \quad \text{thì } 6A = P - \frac{2022}{5^{2021}} \\
 \Rightarrow 5P &= 5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \dots - \frac{1}{5^{2020}} \\
 \Rightarrow 6P &= 5 - \frac{1}{5^{2021}} \Rightarrow P = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}} \\
 \Rightarrow 6A &= \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2021}} < \frac{5}{6} \\
 \Rightarrow A &< \frac{5}{36}
 \end{aligned}$$

Câu 4. (HSG 7 Vĩnh Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}}$. Ta có: $3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{2018}}$

Suy ra: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}}$

Đặt $M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}}$

$\Rightarrow 3M = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$

$\Rightarrow 2M = 1 - \frac{1}{3^{2018}} < 1$

$\Rightarrow M < \frac{1}{2}$

Ta có: $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}} = 1 + M - \frac{2019}{3^{2019}} < 1 + M < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$

Dạng 2.3 Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a + b$.

Lời giải

Từ $a > 2 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{2}; \quad b > 2 \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$.

Suy ra: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} < 1$.
 Vậy $ab > a+b$.

Câu 2. (HSG 7 Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Lời giải

Sử dụng tính chất: $0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a}$.

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có:

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$$

Mà $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$ (do a, b, c dương) nên: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$ (1)

Chứng minh tương tự ta được: $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}$ (2) và $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$ (3)

Cộng vế ba bất đẳng thức (1); (2); (3) ta được:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 3. (HSG 7 Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

* Nếu $a+b+c=0$ thì $a=b=c=0$.

Khi đó: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} = \frac{0}{bc+1} + \frac{0}{ac+1} + \frac{0}{ab+1} = 0 \leq 2$

* Nếu $a+b+c \neq 0$

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow (1-a) \geq 0; (1-b) \geq 0 \Rightarrow (1-a)(1-b) \geq 0 \Rightarrow 1+ab \geq a+b$ (1)

Lại có: $1+ab \geq c$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2(1+ab) \geq a+b+c \Rightarrow \frac{c}{2(1+ab)} \leq \frac{c}{a+b+c}$

Tương tự ta có: $\frac{b}{2(1+ac)} \leq \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{2(1+ab)} \leq \frac{c}{a+b+c}$

Từ đó suy ra: $\frac{a}{2(1+bc)} + \frac{b}{2(1+ac)} + \frac{c}{2(1+ab)} \leq \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$

Suy ra: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$.

Từ hai trường hợp trên suy ra: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$. Đpcm

Câu 4. (HSG 7 Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Ta có:

$$b^2 + c^2 \geq 2bc \quad c^2 + a^2 \geq 2ac$$

Tương tự ta có ; Suy ra:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc) \quad \text{hay} \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác, ta có:

$$a + b > c \Rightarrow ac + bc > c^2$$

$$a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$$

$$b + c > a \Rightarrow ab + ac > a^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc) \quad (2)$$

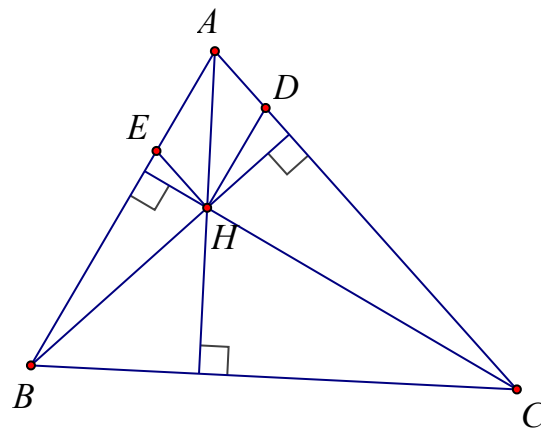
Từ (1) và (2) ta có: $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$

Câu 5. (HSG 7 Yên Định – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh rằng:

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Lời giải



Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại $D \Rightarrow CH \perp HD$.

Qua H kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại $E \Rightarrow BH \perp HE$.

$$\Delta AHD = \Delta HAE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AD = HE, AE = HD$$

Ta có

$$\text{Trong } \Delta AHD \text{ có } HA < HD + AD \text{ nên } HA < AE + AD \quad (1)$$

$$\text{Từ } BH \perp HE \Rightarrow \Delta HBE \text{ vuông cân nên } HB < BE \quad (2)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } HC < DC \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có: } HA + HB + HC < AB + AC \quad (4)$$

$$\text{Tương tự: } HA + HB + HC < AB + BC \quad (5)$$

$$\text{và } HA + HB + HC < AB + AC \quad (6)$$

$$\text{Từ (4), (5), (6) suy ra: } HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Câu 6. (HSG 7 Yên Định – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.

Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Lời giải

Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0 \Rightarrow z = -x - y \leq 0$.
 $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$ nên:

Vì

$$x^2 + y^4 + z^6 \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq -2z$$

$$\text{Vì } -1 \leq z \leq 1 \text{ và } z \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

$$\text{Vậy } x^2 + y^4 + z^6 \leq 2$$

Câu 7. (HSG 7 Quảng Ninh 2022 - 2023)

Giả sử x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2, chứng minh:

$$S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2$$

Lời giải

Vì x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác và có chu vi bằng 2. Không giảm tính tổng quát ta suy ra: $0 < x \leq y \leq z < 1$.

Suy ra: $x - 1 < 0; y - 1 < 0 \Rightarrow (x - 1)(y - 1) < 0 \Rightarrow xy + 1 > x + y$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy+1} < \frac{1}{x+y} \Rightarrow \frac{z}{xy+1} < \frac{z}{x+y} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự: $\frac{x}{yz+1} < \frac{x}{y+z} \quad (2); \quad \frac{y}{xz+1} < \frac{y}{x+z} \quad (3).$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được:

$$\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (4)$$

$$\frac{x}{y+z} < \frac{x+x}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} < \frac{2x}{x+y+z}$$

Mà

$$\frac{y}{x+z} < \frac{2y}{x+y+z}; \quad \frac{z}{x+y} < \frac{2z}{x+y+z}$$

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z}$$

Suy ra:

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2(x+y+z)}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < 2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta được: $S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2$. Đpcm.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>