PHẦN THỨ NHẤT : Các Chuyên Đề

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Nguyễn Hoàng Ngải
Tổ trưởng tổ Toán THPT Chuyên Thái Bình

Một trong những chuyên đề rất quan trọng trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi dự thi học sinh giỏi toán quốc gia, khu vực và quốc tế, đó là phương trình hàm, bất phương trình hàm. Có rất nhiều tài liệu viết về chuyên đề này. Qua một số năm bồi dưỡng học sinh giỏi dự thi học sinh giỏi toán quốc gia và qua một số kì tập huấn hè tại Đại học khoa học tự nhiên – Đại học quốc gia Hà Nội, chúng tôi rút ra một số kinh nghiệm dạy về chuyên đề này và trao đổi với các đồng nghiệp.

Phần I: NHẮC LẠI NHỮNG KHÁI NIÊM CƠ BẢN

1. *Nguyên lý Archimede*

$\forall \epsilon > 0, \forall x > 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : k\epsilon > x$

Hệ quả: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! k \in \mathbb{Z} : k \le x < k+1$.

Số k như thế gọi là phần nguyên của x, kí hiệu [x]

Vậy : $[x] \le x < [x]+1$

2. *Tính trù mật*

Tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ gọi là trù mật trong $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y$ đều tồn tại a thuộc A sao cho x<a<y.

Chú ý:

- Tập $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{R}$
- Tập $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$

3. *Cận trên cận dưới*

Giả sử $A \subset \mathbb{R}$.

Số x được gọi là một cận trên của tập A nếu với mọi $a \in A$ thì a $\le$ x

Số x được gọi là một cận dưới của tập A nếu với mọi $a \in A$ thì a $\ge$ x

Cận trên bé nhất(nếu có) của A được gọi là cận trên đúng của A và kí hiệu là supA

Cận dưới lớn nhất(nếu có) của A được gọi là cận dưới đúng của A và kí hiệu là infA

Nếu supA $\in$ A thì sup A $\equiv$maxA

Nếu inf A $\in$ A thì infA $\equiv$ minA

Ví dụ: cho a < b

Nếu A = (a, b) thì sup A = b
inf A = a

Nếu A = [a, b] thì sup A = max A =b
inf A = min A = a

Tính chất:

Tính chất 1: Nếu A $\neq \varnothing$, A bị chặn thì tồn tại supA, infA

Tính chất 2:

$$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \le \alpha, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \beta, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : \beta + \varepsilon > a \end{cases}$$

4. ***Hàm sơ cấp***

- Hàm số sơ cấp cơ bản là các hàm lũy thừa, hàm số mũ, hàm số logarit, hàm số lượng giác, hàm số lượng giác ngược.
- Hàm số sơ cấp là những hàm được tạo thành bởi hữu hạn các phép toán số học (+, - , x, :), phép toán lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản.

5. Hàm cộng tính, nhân tính trên một tập hợp

- Hàm số f(x) được gọi là cộng tính trên tập xác định D nếu với mọi x, y $\in$ D thì x + y $\in$ D và f(x + y) = f(x) + f(y).
- Hàm số f(x) được gọi là nhân tính trên tập xác định D nếu với mọi x, y $\in$ D thì x . y $\in$ D và f(x . y) = f(x) . f(y).
- Nếu với mọi x, y $\in$ D mà x+y $\in$ D , x – y $\in$ D và f(x – y) = f(x) – f(y) thì f(x) cũng gọi là một hàm cộng tính trên D.
- Hàm f(x) = x^{α} ($\alpha > 0$) là hàm nhân tính.

6. Hàm đơn điệu

- Hàm số f(x) gọi là tăng trên (a, b) nếu :
  Với mọi $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- Hàm số f(x) gọi là giảm trên (a, b) nếu :
  Với mọi $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

Phần II. CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG

Phương pháp 1: *Hệ số bất định.*
Tạp chí toán học trong nhà trường, số 8 – 2004 trang 62 – 66 (bản tiếng Nga)

Nguyên tắc chung:

- ✓ Dựa vào điều kiện bài toán, xác định được dạng của f(x), thường là f(x) = ax + b hoặc f(x) = ax^2+ bx + c
- ✓ Đồng nhất hệ số để tìm f(x)
- ✓ Chứng minh rằng mọi hệ số khác của f(x) đều không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Phương pháp dồn biến

Bài 1: Tìm f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho:
$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy.(x^2-y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow vf(u) - uf(v) = (u^2 - v^2)uv$$

$$\Rightarrow \frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(v)}{v} - v^2, \forall u, v \neq 0$$

Cho v = 1 ta có:

$$\frac{f(u)}{u} - u^2 = \frac{f(1)}{1} - 1^2, \forall u \neq 0$$

$$\Rightarrow f(u) = u^3 + au, \forall u \neq 0 \qquad (a = f(1) - 1)$$

Cho x = y = 0 ta có 2f(0) = 0 do đó f(0) = 0

Kết luận $f(x) = x^3 + ax, \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 2: $f(x-1) - 3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right) = 1 - 2x, \forall x \neq \dfrac{1}{2}$

Giải :

Đặt : $\dfrac{x-1}{1-2x} = y - 1 \Rightarrow x = \dfrac{y}{2y-1} \Rightarrow x - 1 = \dfrac{1-y}{2y-1}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1-y}{2y-1}\right) - 3f(y-1) = \frac{-1}{2y-1}, \forall y \neq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x-1}{1-2x}\right) - 3f(x-1) = \frac{-1}{2x-1}, \forall x \neq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x-1) - 3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right) = 1 - 2x, \forall x \neq \dfrac{1}{2} \\ \Rightarrow f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right) - 3f(x-1) = \dfrac{-1}{2x-1}, \forall x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -8f(x-1) = 1 - 2x + \frac{3}{1-2x}$$

$$\Rightarrow f(x-1) = \frac{1}{8}\left(-1 + 2x + \frac{3}{2x-1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{8}\left(1 + 2x + \frac{3}{2x+1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2}$$

Ví dụ 1: Đa thức f(x) xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (1) . Tìm f(x)

Giải:

Ta nhận thấy vế trái của biểu thức dưới dấu f là bậc nhất : x, 1 – x vế phải là bậc hai x^2.

Vậy f(x) phải có dạng: f(x) = $ax^2 + bx + c$

Khi đó (1) trở thành:

$2(ax^2 + bx + c) + a(1 - x)^2 + b(1 - x) + c = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ do đó:

$3ax^2 + (b - 2a)x + a + b + 3c = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Đồng nhất các hệ số, ta thu được:

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \\ c = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$

Thử lại ta thấy hiển nhiên f(x) thỏa mãn điều kiện bài toán.
Công việc còn lại ta phải chứng minh mọi hàm số khác f(x) sẽ không thỏa mãn điều kiện bài toán.
Thật vậy giả sử còn hàm số g(x) khác f(x) thỏa mãn điều kiện bài toán.
Do f(x) không trùng với g(x) nên $\exists x_0 \in \mathbb{R}: g(x_0) \neq f(x_0)$.
Do g(x) thỏa mãn điều kiện bài toán nên:
$2g(x)+g(1-x)=x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

Thay x bởi x_0 ta được: $2g(x_0)+g(1-x_0)={x_0}^2$

Thay x bởi $1-x_0$ ta được $2g(1-x_0)+g(x_0)=(1-x_0)^2$

Từ hai hệ thức này ta được: $g(x_0)=\frac{1}{3}({x_0}^2+2x_0-1)=f(x_0)$

Điều này mâu thuẫn với $g(x_0)\neq f(x_0)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$

<u>Ví dụ 2</u>: Hàm số y = f(x) xác định , liên tục với $\forall x \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:
f(f(x)) = f(x) + x , $\forall x \in \mathbb{R}$
Hãy tìm hai hàm số như thế.
(Bài này đăng trên tạp chí KVANT số 7 năm 1986, bài M 995 – bản tiếng Nga)

Giải

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng f(f(x)) – f(x) = x (1)

Vế phải của phương trình là một hàm số tuyến tính vì vậy ta nên giả sử rằng hàm số cần tìm có dạng : f(x) = ax + b.
Khi đó (1) trở thành:

a(ax + b) + b – (ax + b) = x , $\forall x \in \mathbb{R}$

hay $(a^2-a)x+ab=x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases} a^2-a=1 \\ ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ b=0 \end{cases}$$

Ta tìm được hai hàm số cần tìm là:

$$f(x)=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}x$$

Hiển nhiên thỏa mãn điều kiện bài toán.

<u>Ví dụ 3</u>: Hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$a) f(f(n))=n, \forall n \in \mathbb{Z}$ (1)

$b) f(f(n+2)+2)=n, \forall n \in \mathbb{Z}$ (2)

$c) f(0)=1$ (3)

Tìm giá trị f(1995), f(-2007)
(olympic Ucraina 1995)

Giải:

Cũng nhận xét và lý luận như các ví dụ trước, ta đưa đến f(n) phải có dạng:
f(n) = an +b
Khi đó điều kiện (1) trở thành:

$a^2n+ab+b=n, \forall n \in \mathbb{Z}$

Đồng nhất các hệ số, ta được:

$$\begin{cases} a^2=1 \\ ab+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ ta được f(n) = n

Trường hợp này loại vì không thỏa mãn (2)

Với $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$ ta được f(n) = -n + b

Từ điều kiện (3) cho n = 0 ta được b = 1

Vậy f(n) = -n + 1

Hiển nhiên hàm số này thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ta phải chứng minh f(n) = -n +1 là hàm duy nhất thỏa mãn điều kiện bài toán

Thật vậy giả sử tồn tại hàm g(n) khác f(n) cũng thỏa mãn điều kiện bài toán.

Từ (3) suy ra f(0) = g(0) = 1

Từ (3) suy ra f(1) = g(1) = 0

Sử dụng điều kiện (1) và (2) ta nhận được:

g(g(n)) = g(g(n+2)+2) $\forall n \in \mathbb{Z}$

do đó g(g(g(n))) = g(g(g(n+2)+2)) $\forall n \in \mathbb{Z}$

Hay g(n) = g(n+2)+2 $\forall n \in \mathbb{Z}$

Giả sử n_0 là số tự nhiên bé nhất làm cho $f(n_0) \neq g(n_0)$

Do f(n) cũng thỏa mãn (4) nên ta có:

$$g(n_0 - 2) = g(n_0) + 2 = f(n_0) + 2 = f(n_0 - 2)$$

$\Leftrightarrow g(n_0 - 2) = f(n_0 - 2)$

Mâu thuẫn với điều kiện n_0 là số tự nhiên bé nhất thỏa mãn (5)

Vậy f(n) = g(n) , $\forall n \in \mathbb{N}$

Chứng minh tương tự ta cũng được f(n) = g(n) với mọi n nguyên âm.

Vậy f(n) = 1 – n là nghiệm duy nhất.

Từ đó tính được f(1995), f(-2007).

<u>Các bài tập tương tự:</u>

<u>Bài 1</u>: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(1+y) = 2xy(3y - x^2), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Đáp số f(x) = x^3

<u>Bài 2</u>: Hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện f(f(n)) + f(n) = 2n + 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

Tìm f(2005)

Đáp số : 2006

<u>Bài 3</u>: Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho:

$$f(f(n)) + (f(n))^2 = n^2 + 3n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Đáp số : f(n) = n + 1

<u>Bài 4</u>: Tìm các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nếu :

$$3f\left(\frac{x-1}{3x+2}\right) - 5f\left(\frac{1-x}{x-2}\right) = \frac{8}{x-1}, \forall x \notin \left\{0, -\frac{2}{3}, 1, 2\right\}$$

Đáp số : $f(x) = \frac{28x+4}{5x}$

<u>Bài 5</u>: Tìm tất cả các đa thức P(x) $\in \mathbb{R}[x]$ sao cho:

P(x + y) = P(x) + P(y) + 3xy(x + y), $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Đáp số : P(x) = x^3 + cx

Phương pháp xét giá trị

<u>Bài 1:</u> Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{2}f(xy) + \frac{1}{2}f(yz) - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Giải:

Cho x= y = z = 0:

$$\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(0)-f^2(0)\ge\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (f(0)-\frac{1}{2})^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow f(0)=\frac{1}{2}$$

Cho y = z = 0:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}f(x)\ge\frac{1}{4},\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x)\le\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Cho x= y = z = 1

$$\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)-f^2(1)\ge\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (f(1)-\frac{1}{2})^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{2}$$

Cho y = z = 1

$$\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(x)-f(x)\frac{1}{2}\ge\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(x)\ge\frac{1}{2},\forall x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có f(x) = $\frac{1}{2}$

Bài 2: Tìm $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

f(xyz) = xf(x) + yf(y) +zf(z) $\quad \forall x,y,z\in(0,1)$

Giải :

Chọn x = y = z: $\quad f(x^3) = 3xf(x)$

Thay x, y, z bởi x^2 $\quad f(x^6) = 3x^2 f(x^2)$

Mặt khác $\quad f(x^6) = f(x.\ x^2.x^3) = xf(x) + x^2 f(x^2) + x^3 f(x^3)$

Hay $\quad 3x^2 f(x^2) = xf(x) + x^2 f(x^2) + 3x^4 f(x)$

$2x^2 f(x^2) = xf(x) + 3x^4 f(x)$

$$\Rightarrow f(x^2)=\frac{3x^3+1}{2}f(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

Thay x bởi x^3 ta được :

$$\Rightarrow f(x^6)=\frac{3x^9+1}{2}f(x^3),\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 3x^2f(x^2)=\frac{3x^9+1}{2}3xf(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 3x^2\frac{3x^3+1}{2}f(x)=\frac{3x^9+1}{2}3xf(x),\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x)=0,\forall x\ne 0$$

Vậy f(x) = 0 với mọi x $\in$ (0.1)

Phương pháp 2: ***<u>Sử dụng tính chất nghiệm của một đa thức</u>***

(Bài giảng của Tiến sỹ Nguyễn Vũ Lương – ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

<u>Ví dụ 1</u>: Tìm P(x) với hệ số thực, thỏa mãn đẳng thức:

$$(x^3+3x^2+3x+2)P(x-1)=(x^3-3x^2+3x-2)P(x),\forall x \quad (1)$$

Giải:

$(1) \Leftrightarrow (x+2)(x^2+x+1)P(x-1) = (x-2)(x^2-x+1)P(x), \forall x$

Chọn : $x=-2 \Rightarrow P(-2)=0$

$x=-1 \Rightarrow P(-1)=0$

$x=0 \Rightarrow P(0)=0$

$x=1 \Rightarrow P(1)=0$

Vậy P(x) = x(x – 1)(x + 1)(x + 2)G(x)

Thay P(x) vào (1) ta được:

$(x+2)(x^2+x+1)(x-1)(x-2)x(x+1)G(x-1) = (x-2)(x^2-x+1)x(x-1)(x+1)(x+2)G(x), \forall x$

$\Rightarrow \left(x^2+x+1\right)G(x-1) = (x^2-x+1)G(x), \forall x$

$\Leftrightarrow \dfrac{G(x-1)}{x^2-x+1} = \dfrac{G(x)}{x^2+x+1}, \forall x$

$\Leftrightarrow \dfrac{G(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1} = \dfrac{G(x)}{x^2+x+1}, \forall x$

Đặt $R(x) = \dfrac{G(x)}{x^2+x+1}$ (x $\neq 0, \pm 1$, -2)

$\Rightarrow R(x) = R(x-1)$ (x $\neq 0, \pm 1$, -2)

$\Rightarrow R(x) = C$

Vậy $P(x) = C(x^2+x+1)x(x-1)(x+1)(x+2)$

Thử lại thấy P(x) thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chú ý : Nếu ta xét P(x) = $(x^3 + 1)(x - 1)$

Thì P(x + 1) = $(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)x$

Do đó $(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)xP(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)P(x + 1)$

Từ đó ta có bài toán sau

Ví dụ 2: Tìm đa thức P(x) với hệ số thực, thỏa mãn đẳng thức:

$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)xP(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)P(x + 1)$ với mọi x

Giải quyết ví dụ này hoàn toàn không có gì khác so với ví dụ 1

Tương tự như trên nếu ta xét:

P(x) = $(x^2 + 1)(x^2 - 3x + 2)$

Ta sẽ có bài toán sau:

Ví dụ 3: Tìm đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn đẳng thức:

$(4x^2+4x+2)(4x^2-2x)P(x) = (x^2+1)(x^2-3x+2)P(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$

Các bạn có thể theo phương pháp này mà tự sáng tác ra các đề toán cho riêng mình.

Phương pháp 3: ***Sử dụng phương pháp sai phân để giải phương trình hàm.***

1. Trước hết ta nhắc lại khái niệm về dãy số.

Dãy số là một hàm của đối số tự nhiên:

$x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \mapsto x(n)$

Vì $n \in \{0,1,2,3,...\}$

$\Rightarrow (x_n) = \{x_o, x_1, x_2, ...\}$

2. Định nghĩa sai phân

Xét hàm $x(n) = x_n$

Sai phân cấp 1 của hàm x_n là $\triangle x_n = x_{n+1} - x_n$

Sai phân cấp 2 của hàm x_n là $\triangle^2 x_n = \triangle x_{n+1} - \triangle x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$

Sai phân câp k của hàm x_n là $\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x_{n+k-i}$

3. Các tính chất của sai phân

- ✓ Sai phân các cấp đều được biểu thị qua các giá trị hàm số
- ✓ Sai phân có tính tuyến tính:

$$\Delta^k (af + bg) = a\Delta^k f + b\Delta^k g$$

- ✓ Nếu x_n đa thức bậc m thì:

$\Delta^k x_n$ Là đa thức bậc m – k nếu m> k

Là hằng số nếu m= k

Là 0 nếu m<k

<u>Ví dụ :</u>

Xét dãy số hữu hạn: 1, -1, -1, 1, 5, 11, 19, 29, 41, 55

Tìm quy luật biểu diễn của dãy số đó.

Giải:

Ta lập bảng sai phân như sau:

x_n	1		-1		-1		1		5		11		19		29		41		55
Δx_n		-2		0		2		4		6		8		10		12		14	
$\Delta^2 x_n$			2		2		2		2		2		2		2		2		2

Vậy $\Delta^2 x_n$ = const do đó x_n là đa thức bậc hai: $x_n = an^2 + bn + c$

Để tính a, b, c ta dựa vào ba giá trị đầu $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = -1$ sau đó giải hệ phương trình ta nhận được: a = 1, b = -3, c = 1.

Do đó $x_n = n^2 - 3n + 1$

4. Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất

$$a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \cdots + a_k x_n = 0, \quad a_k, a_0 \neq 0 \quad (1)$$

Gọi là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất cấp k (ở đây k = n +k -1)

5. Phương trình đặc trưng.

$$a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \cdots + a_k = 0 \qquad (2)$$

6. Nghiệm tổng quát

Nếu (2) có k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ thì nghiệm tổng quát của (1) là

$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \cdots c_k \lambda_k^n$

Nếu (2) có nghiệm bội, chẳng hạn nghiệm λ_1 có bội s thì nghiệm tổng quát của (1) sẽ là:

$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_1^n + c_2 n^2 \lambda_1^n + \cdots c_s n^{s-1} \lambda_1^n + c_{s+1} \lambda_{s+1}^n + \cdots + c_k \lambda_k^n$

7. Ví dụ

<u>Ví dụ 1</u>: cho dãy (x_n) có

$$x_{n+3} = 6x_{n+2} - 11x_{n+1} + 6x_n$$
$$x_0 = 3, x_1 = 4, x_2 = -1$$

Hãy tìm x_n

Giải :

Ta có $x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 0$

Phương trình đặc trưng là :

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$$

Suy ra: $x_n = c_1 + c_2 2^n + c_3 3^n$

Để tìm c_1, c_2, c_3 ta phải dựa vào x_0, x_1, x_2 khi đó ta sẽ tìm được :

$$\begin{cases} c_1 = -\dfrac{3}{2} \\ c_2 = 8 \\ c_3 = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Từ đó $x_n = -\dfrac{3}{2} + 8.2^n - \dfrac{7}{2}3^n$

<u>Ví dụ 2:</u>

Cho dãy số (x_n) có $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$ và $x_n = 7x_{n-1} - 11x_{n-2} + 5x_{n-3}, \forall n \geq 3$

Tìm x_n

Phương trình đặc trưng là :

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 1, \lambda = 5$$

Vậy nghiệm tổng quát là : $x_n = c_1 + c_2 n + c_3 5^n$

Để tìm c_1, c_2, c_3 ta phải dựa vào x_0, x_1, x_2 khi đó ta sẽ tìm được :

$$\begin{cases} c_1 = -\dfrac{1}{16} \\ c_2 = \dfrac{3}{4} \\ c_3 = \dfrac{1}{16} \end{cases}$$

Từ đó ta được: $x_n = -\dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{4}n + \dfrac{1}{16}5^n$

Chú ý : Với phương trình sai phân, ta có một số loại khác nữa như phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất, phương trình sai phân phi tuyến và có cả một hệ thống phương pháp giải quyết để tuyến tính hóa phương trình sai phân. Song liên quan đến phương trình hàm trong bài viết này, chỉ nhắc lại phương trình sai phân tuyến tính đơn giản nhất (chưa xét đến phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất có nghiệm phức).

8. Áp dụng đối với phương trình hàm

<u>Ví dụ 1</u>: Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

f(f(x)) = 3f(x) – 2x , $\forall x \in \mathbb{R}$

Giải :

Thay x bởi f(x) ta được:

f(f(f(x))) = 3f(f(x)) – 2f(x) , $\forall x \in \mathbb{R}$

………………………..

$$\underbrace{f(...f(x))}_{n+2} = 3\underbrace{f(...f(x))}_{n+1} - 2\underbrace{f(...f(x))}_{n}$$

Hay $f_{n+2}(x) = 3f_{n+1}(x) - 2f_n(x), n \ge 0$

Đặt $x_n = f_n(x), n \ge 0$

Ta được phương trình sai phân:

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$$

Phương trình đặc trưng là : $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 2$

Vậy $x_n = c_1 + c_2 2^n$

Ta có:

$$x_0 = c_1 + c_2 = x$$
$$x_1 = c_1 + 2c_2 = f(x)$$

Từ đó ta được $c_1 = 2x - f(x), c_2 = f(x) - x$

Vậy $f(x) = x + c_2$ hoặc $f(x) = 2x - c_1$

<u>Ví dụ 2</u>: Tìm tất cả các hàm f xác định trên N và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$2f(n)f(k+n) - 2f(k-n) = 3f(n)f(k), k \ge n$

$f(1) = 1$

Giải:

Cho k = n = 0

$\Rightarrow 2f^2(0) - 2f(0) = 3f^2(0)$

$\Leftrightarrow f(0) = 0 \vee f(0) = -2$

Nếu f(0) = 0 chọn n = 0 ta được: -2 f(k) = 0 do đó f(k) = 0 với mọi k

Chọn k = 1 ta được f(1) = 0 mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy f(0) = -2

Chọn n = 1 ta được phương trình:

$2f(1)f(k+1) - 2f(k-1) = 3f(1)f(k), \forall k$

$\Leftrightarrow 2f(k+1) - 2f(k-1) = 3f(k), \forall k$

Đặt $x_k = f(k)$ ta có phương trình sai phân $2x_{k+1} - 3x_k - 2x_{k-1} = 0$

Phương trình đặc trưng là $2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \wedge \lambda = -\dfrac{1}{2}$

Vậy $f(n) = c_1 2^n + c_2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

Ta tìm c_1, c_2 từ điều kiện f(0) = -2 , f(1) = 1

Dễ tìm được $c_1 = 0, c_2 = -2$

Vậy $f(n) = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

Phương pháp 4: **<u>ĐIỂM BẤT ĐỘNG.</u>**

1. Đặc trưng của hàm

Như ta đã biết, phương trình hàm là một phương trình thông thường mà nghiệm của nó là hàm. Để giải quyết tốt vấn đề này, cần phân biệt tính chất hàm với đặc trưng hàm. Những tính chất quan trắc được từ đại số sang hàm số, được gọi là những đặc trưng hàm.

- ❖ Hàm tuyến tính f(x) = ax , khi đó f(x + y) = f(x) + f(y)

  Vậy đặc trưng là f(x + y) = f(x) + f(y) với mọi x, y

- ❖ Hàm bậc nhất f(x) = ax + b, khi đó f(x) + f(y) = 2f($\frac{x+y}{2}$)

  Vậy đặc trưng hàm ở đây là $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\forall x,y\in\mathbb{R}$

Đến đây thì ta có thể nêu ra câu hỏi là : Những hàm nào có tính chất $f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$. Giải quyết vấn đề đó chính là dẫn đến phương trình hàm. Vậy phương trình hàm là phương trình sinh bởi đặc trưng hàm cho trước.

- ❖ Hàm lũy thừa $f(x)=x^k, x>0$

  Đặc trưng là f(xy) = f(x)f(y)

- ❖ Hàm mũ $f(x)=a^x (a>0, a\neq 1)$

  Đặc trưng hàm là f(x + y) = f(x)f(y), $\forall x,y\in\mathbb{R}$

- ❖ Hàm Logarit $f(x)=\log_a x$ (a>0,a $\neq 1$)

  Đặc trưng hàm là f(xy) = f(x) + f(y).

- ❖ f(x) = cosx có đặc trưng hàm là f(x + y) + f(x – y) = 2f(x)f(y)

  Hoàn toàn tương tự ta có thể tìm được các đặc trưng hàm của các hàm số f(x) =sinx, f(x) = tanx và với các hàm Hypebolic:

- ➢
- ➢ sin hypebolic $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
- ➢ cos hypebolic $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
- ➢ tan hypebolic $thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
- ➢ cot hypebolic $cothx=\frac{chx}{shx}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

shx có TXĐ là $\mathbb{R}$ tập giá trị là $\mathbb{R}$

chx có TXĐ là $\mathbb{R}$ tập giá trị là $[1,+\infty)$

thx có TXĐ là $\mathbb{R}$ tập giá trị là (-1,1)

cothx có TXĐ là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tập giá trị là $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Ngoài ra bạn đọc có thể xem thêm các công thức liên hệ giữa các hàm hypebolic, đồ thị của các hàm hypebolic

2. Điểm bất động

Trong số học, giải tích, các khái niệm về điểm bất động, điểm cố định rất quan trọng và nó được trình bày rất chặt chẽ thông qua một hệ thống lý thuyết. Ở đây, tôi chỉ nêu ứng dụng của nó qua một số bài toán về phương trình hàm.

Ví dụ 1: Xác định các hàm f(x) sao cho: f(x+1) = f(x) + 2 $\forall x\in\mathbb{R}$

Giải:

Ta suy nghĩ như sau: Từ giả thiết ta suy ra c = c + 2 do đó $c=\infty$

Vì vậy ta coi 2 như là f(1) ta được f(x + 1) = f(x) + f(1) (*)

Như vậy ta đã chuyển phép cộng ra phép cộng. Dựa vào đặc trưng hàm, ta phải tìm a : f(x) = ax để khử số 2. Ta được

$$(*) \Leftrightarrow a(x+1) = ax + 2$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

Vậy ta làm như sau:

Đặt   f(x) = 2x + g(x)

Thay vào (*) ta được: 2(x + 1) + g(x + 1) = 2x + g(x) + 2, $\forall x \in \mathbb{R}$

Điều này tương đương với   g(x + 1) = g(x), $\forall x \in \mathbb{R}$

Vậy g(x) là hàm tuần hoàn với chu kì 1.

Đáp số   f(x) = 2x + g(x) với g(x) là hàm tuần hoàn với chu kì 1.

Qua ví dụ 1, ta có thể tổng quát ví dụ này, là tìm hàm f(x) thỏa mãn:

f(x + a) = f(x) + b, $\forall x \in \mathbb{R}$, a, b tùy ý

Ví dụ 2: Tìm hàm f(x) sao cho: f(x + 1) = - f(x) + 2, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Giải:

ta cũng đưa đến c = -c + 2 do đó c = 1

vậy đặt f(x) = 1 + g(x), thay vào (1) ta được phương trình:

g(x + 1) = - g(x), $\forall x \in \mathbb{R}$

Do đó ta có:

$$\begin{cases} g(x+1) = -g(x) \\ g(x+2) = g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{2}\left[g(x) - g(x+1)\right] \\ g(x+2) = g(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Ta chứng minh mọi nghiệm của (3) có dạng :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - h(x+1)\right], \forall x \in \mathbb{R}$$

ở đó h(x) là hàm tuần hoàn với chu kì 2

qua ví dụ này, ta có thể tổng quát thành:

f(x + a) = - f(x) + b, $\forall x \in \mathbb{R}$, a, b tùy ý

Ví dụ 3: Tìm hàm f(x) thỏa mãn : f(x + 1) = 3f(x) + 2, $\forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Giải:

Ta đi tìm c sao cho c = 3c + 2 dễ thấy c = -1

Đặt   f(x) = -1 + g(x)

Lúc đó (1) có dạng   g(x + 1) = 3g(x) $\forall x \in \mathbb{R}$

Coi 3 như g(1) ta được g(x + 1) = g(1).g(x) $\forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ đặc trưng hàm, chuyển phép cộng về phép nhân, ta thấy phải sử dụng hàm mũ :

$$a^{x+1} = 3a^x \Leftrightarrow a = 3$$

Vậy ta đặt: $g(x) = 3^x h(x)$ thay vào (2) ta được: h(x + 1) = h(x) $\forall x \in \mathbb{R}$

Vậy h(x) là hàm tuần hoàn chu kì 1.

Kết luận $f(x) = -1 + 3^x h(x)$ với h(x) là hàm tuần hoàn chu kì 1.

Ở ví dụ 3 này, phương trình tổng quát của loại này là :

f(x + a) = bf(x) + c, $\forall x \in \mathbb{R}$, a, b, c tùy ý, b > 0, b khác 1

Với loại này được chuyển về hàm tuần hoàn.

Còn f(x + a) = bf(x) + c, $\forall x \in \mathbb{R}$, a, b, c tùy ý, b < 0, b khác 1 được chuyển về hàm phản tuần hoàn.

Ví dụ 4: Tìm hàm f(x) thỏa mãn f(2x + 1) = 3f(x) – 2 $\forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Giải:

Ta có: c = 3c – 2 suy ra c = 1

Đặt f(x) = 1 + g(x)

Khi đó (1) có dạng g(2x + 1) = 3g(x) $\forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Khi biểu thức bên trong có nghiệm $\neq \infty$ thì ta phải xử lý cách khác.

Từ 2x + 1 = x suy ra x = 1

Vậy đặt x = -1 + t ta có 2x + 1 = -1 + 2t

(2) có dạng: g(-1 + 2t) = 3g(-1 + t) $\forall t \in \mathbb{R}$

Đặt h(t) = g(-1 + 2t), ta được h(2t) = 3h(t) (3)

$2t = t \Leftrightarrow t = 0$

$(2t)^m = 3.t^m \Leftrightarrow m = \log_2 3$

Xét ba khả năng sau:

- Nếu t = 0 ta có h(0) = 0
- Nếu t> 0 đặt $h(t) = t^{\log_2 3}\varphi(t)$ thay vào (3) ta có $\varphi(2t) = \varphi(t), \forall t > 0$

Đến đây ta đưa về ví dụ hàm tuần hoàn nhân tính.

- Nếu t < 0 đặt $h(t) = |t|^{\log_2 3}\varphi(t)$ thay vào (3) ta được

$\varphi(2t) = -\varphi(t), \forall t < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(2t) = -\varphi(t), \forall t < 0 \\ \varphi(4t) = \varphi(t), \forall t < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{1}{2}\left[\varphi(t) - \varphi(2t)\right], \forall t < 0 \\ \varphi(4t) = \varphi(t), \forall t < 0 \end{cases}$$

Bài toán tổng quát của dạng này như sau: $f(\alpha x + \beta) = f(ax) + b \quad \alpha \neq 0, \pm 1$

Khi đó từ phương trình $\alpha x + \beta = x$ ta chuyển điểm bất động về 0, thì ta được hàm tuần hoàn nhân tính.

- Nếu a = 0 bài toán bình thường
- Nếu a = 1 chẳng hạn xét bài toán sau:

Tìm f(x) sao cho f(2x + 1) = f(x) – 2, $\forall x \neq -1$ (1)

Nghiệm 2x + 1 = x $\Leftrightarrow$ x $= -1$ nên đặt x = -1 + t thay vào (1) ta được

f(-1 + 2t) = f(-1 + t) + 2, $\forall t \neq 0$

Đặt g(t) = f(- 1 + t) ta được g(2t) = g(t) + 2 $\forall t \neq 0$ (2)

Từ tích chuyển thành tổng nên là hàm loga

Ta có $\log_a(2t) = \log_a t - 2$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy đặt $g(t) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} |t| + h(t)$

Thay vào (2) ta có $h(2t) = h(t), \forall t \neq 0$

Đến đây bài toán trở nên đơn giản

ĐỊNH LÝ ROLL VÀ ÁP DỤNG VÀO PHƯƠNG TRÌNH.

Tiến Sỹ : Bùi Duy Hưng
Trường THPT Chuyên Thái Bình

I) Định lý Roll : là trường hợp riêng của định lý Lagrăng

1.Trong chương trình toán giải tích lớp 12 có định lý Lagrăng như sau :

Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên [a; b] và có đạo hàm trên (a; b) thì tồn tại một điểm $c \in (a; b)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ý nghĩa hình học của định lý như sau. Xét cung AB của đồ thị hàm số y = f(x), với toạ độ của điểm A(a; f(a)) , B(b; f(b)).

Hệ số góc của cát tuyến AB là:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Đẳng thức : $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

nghĩa là hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm C(c; f(c)) của cung AB bằng hệ số góc của đường thẳng AB. Vậy nếu các điều kiện của định lý Lagrăng được thoả mãn thì tồn tại một điểm C của cung AB, sao cho tiếp tuyến tại đó song song với cát tuyến AB.

2. Nếu cho hàm số y = f(x) thoả mãn thêm điều kiện f(b) = f(a) thì có $f'(c) = 0$.

Ta có định lý sau đây có tên gọi là : ***Định lý Roll.***

Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên [a; b], có đạo hàm f' (x) trên (a; b) và có f(a) = f(b) thì tồn tại điểm $x_o \in (a, b)$ sao cho $f'(x_o) = 0$..

Như vậy định lý Roll là một trường hợp riêng của định lý Lagrăng. Tuy nhiên có thể chứng minh định lý Roll trực tiếp như sau:

Hàm số f(x) liên tục trên [a; b] nên đạt các giá trị max, min trên đoạn [a; b]

gọi m = min f(x) , M = max f(x)

$x\in[a,b]$ $\qquad$ $x\in[a,b]$

Nếu m = M thì f(x) = C là hằng số nên $\forall x_o \in (a,b)$ đều có $f'(x_o) = 0$

Nếu m < M thì ít nhất một trong hai giá trị max, min của hàm số f(x) đạt được tại điểm nào đó $x_o \in (a; b)$.

Vậy x_o phải là điểm tới hạn của f(x) trên khoảng (a; b) $\Rightarrow$ $f'(x_o) = 0$.

Định lý được chứng minh .

ý nghĩa hình học của định lý Roll : Trên cung AB của đồ thị hàm số y = f(x), với A(a; f(a)) , B(b; f(b)) và f(a) = f(b), tồn tại điểm C (c; f(c)) mà tiếp tuyến tại C song song với Ox.

II) *áp dụng của định lý Roll.*

Bài toán 1.

Cho n là số nguyên dương , còn a, b, c là các số thực tuỳ ý thoả mãn hệ thức :

$$\frac{a}{n+2}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n}=0 \quad (1)$$

CMR phương trình :

$$ax^2+bx+c=0$$

có ít nhất một nghiệm trong (0; 1) .

Giải :

Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{ax^{n+2}}{n+2}+\dfrac{bx^{n+1}}{n+1}+\dfrac{cx^n}{n}$.

Hàm số f (x) liên tục và có đạo hàm tại $\forall x\in R$.

Theo giả thiết (1) có f(0) = 0 , $f(1)=\dfrac{a}{n+2}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n}=0$

Theo định lý Roll tồn tại $x_o\in(0;1)$ sao cho $f'(x_o)=0$ mà:

$$f'(x)=ax^{n+1}+bx^n+cx^{n-2}$$

$$f'(x_0)=0\Rightarrow ax_o^{n+1}+bx_o^n+cx_o^{n-1}=0$$

$$\Leftrightarrow x_o^{n-1}(ax_o^2+bx_o+c)=0 \quad (x_o\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow ax_o^2+bx_o+c=0$$

Vậy phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x_o\in(0;1)$. (đpcm) .

Bài toán 2 :

Giải phương trình : $3^x+6^x=4^x+5^x$

Giải :

Phương trình đã cho tương đương với :

$$6^x-5^x=4^x-3^x \quad (2).$$

Rõ ràng $x_o=0$ là một nghiệm của phương trình (2) .

Ta gọi α là nghiệm bất kỳ của phương trình (2). Xét hàm số :

$$f(x)=(x+1)^\alpha-x^\alpha \ , \text{ với } x>0$$

Hàm số f(x) xác định và liên tục trên (0; +∞) và có đạo hàm :

$$f'(x)=\alpha(x+1)^{\alpha-1}-\alpha\, x^{\alpha-1}$$

$$=\alpha\,[\,(x+1)^{\alpha-1}-x^{\alpha-1}\,]$$

Từ (2) có f(5) = f(3) . Vậy tồn tại $c\in(3;5)$ sao cho $f'(c)=0$, hay là :

$$\alpha\,[\,(c+1)^{\alpha-1}-c^{\alpha-1}\,]=o$$

$$\Leftrightarrow \alpha=o\ ,\ \alpha=1\ .$$

Thử lại thấy $x_1=0$, $x_2=1$ đều thoả mãn phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm là : $x_1=0, x_2=1$

Bài toán 3

Chứng minh rằng với các số thực bất kỳ a, b, c phương trình :

$$a\cos 3x + b\cos 2x + c\sin x = 0 \qquad (3)$$

có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$

Giải

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{a\sin 3x}{3} + \dfrac{b\sin 2x}{2} + c\sin x - \cos x$.

Hàm f(x) liên tục trên $[0; 2\pi]$, có đạo hàm trên $(0; 2\pi)$ và có đạo hàm là:

$$f'(x) = a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x.$$

mặt khác có f(0) = - 1 , f (2π) = - 1 .

Theo định lý Roll tồn tại $x_o \in (0;2\pi)$ để f'(x_0) = 0 .

Vậy $x_o \in (0;2\pi)$ là nghiệm của phương trình (3). (đpcm).

Bài toán 4 Giải phương trình : $3^{\cos x} - 2^{\cos x} = \cos x$ (4).

Giải : Phương trình (4) có ít nhất một nghiệm $x_0 = 0$. Gọi α là nghiệm bất kỳ của (4) .Khi đó có :

$$3^{\cos\alpha} - 2^{\cos\alpha} = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow 3^{\cos\alpha} - 3\cos\alpha = 2^{\cos\alpha} - 2\cos\alpha . \qquad (5)$$

Xét hàm số f(x) = $t^{\cos\alpha} - t\cos\alpha$, (với t > 1).

Hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$ và có đạo hàm là:

$$f'(x) = \cos\alpha . t^{\cos\alpha - 1} - \cos\alpha .$$

Từ đẳng thức (5) có : f(2) = f (3) . Vậy tồn tại giá trị $c \in (2; 3)$ sao cho:

$$f'(c) = 0 . \Leftrightarrow \cos\alpha . c^{\cos\alpha - 1} - \cos\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha(c^{\cos\alpha - 1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \text{ hoặc } \cos\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ \alpha = k2\pi \quad . \text{ Với } k \in Z$$

Thử lại thấy thoả mãn phương trình (4) .

Vậy (4) có nghiệm x = $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, x = k2π ($\forall k \in Z$)

Nhận xét : Từ định lý Roll có thể rút ra một số hệ quả quan trọng như sau :

Cho hàm số y = f (x) xác định trên [a; b] và có đạo hàm tại $\forall x \in (a;b)$.

Hệ quả 1 : Nếu phương trình f(x) = 0 có n nghiệm phân biệt thì:

phương trình f' (x) = 0 có ít nhất n – 1 nghiệm phân biệt .

phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có ít nhất n – k nghiệm phân biệt, với k = 2, 3, 4 …

Hệ quả 2 : Nếu phương trình f(x) = 0 có n nghiệm phân biệt thì phương trình : f(x) + α f' (x) = 0 có ít nhất n-1 nghiệm phân biệt , với $\forall\alpha \in R$ mà $\alpha \neq 0$.

Chứng minh :

Xét hàm F (x) = $e^{\frac{x}{\alpha}}.f(x)$. Hàm số F (x) liên tục trên [a; b] và có n nghiệm phân biệt . Theo hệ quả 1 thì phương trình F' (x) = o có ít nhất n-1 nghiệm phân biệt . Mặt khác có:

$$F'(x) = e^{\frac{x}{\alpha}}.f'(x) + e^{\frac{x}{\alpha}}.\frac{1}{\alpha}.f(x)$$

$$= \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha} . [f(x) + \alpha f'(x)]$$

Vậy phương trình : $f(x) + \alpha f'(x) = 0$ có ít nhất n-1 nghiệm.

Chú ý :

Trong trường hợp phương trình $f'(x) = 0$ có n-1 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(x) = 0$ chưa chắc đã có n nghiệm phân biệt .

Xét ví dụ sau đây :

Phương trình : $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ có đúng 1 nghiệm

nhưng phương trình : $3x^2 - 6x = 0$ có 2 nghiệm.

Hệ quả 3 : Nếu f''(x) > o hoặc f'' (x) < o $\forall x \in (a;b)$ thì phương trình f(x) = 0 có không quá hai nghiệm.

Hệ quả 4 : Nếu f'''(x) > 0 hoặc f'''(x) < 0 $\forall x \in (a;b)$ thì phương trình f(x) = 0 có không quá ba nghiệm .

Bài toán 5 :

Giải phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = x^2 + x + 1$ (6)

Giải : Điều kiện $x \geq 0$

Phương trình (6) $\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{3x+1} - x^2 - x - 1 = 0$

Xét hàm số:

f(x) = $\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} - x^2 - x - 1$. Với $x \in [0;+\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - 2x - 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{9}{4\sqrt{(3x+1)^3}} - 2 < 0 . \forall x > 0$$

Theo hệ quả 3 suy ra phương trình (6) có không quá 2 nghiệm

Thử trực tiếp $x_1 = 0, x_2 = 1$ thoả mãn phương trình .

Vậy (6) có đúng 2 nghiệm x = 0, x = 1 .

Bài toán 6:

Giải phương trình : $3^x = 1 + x + \log_3(1+2x)$

Giải : Điều kiện: $1 + 2x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

Phương trình đã cho tương đương với :

$$3^x + x = (1+2x) + \log_3(1+2x) \quad (7)$$

Xét hàm f(t) = t + $\log_3 t$, với $t \in (0;+\infty)$ ta có :

f'(t) = $1 + \frac{1}{t\ln 3} > 0, \forall t > 0$. Vậy f (t) đồng biến trên (0; $+\infty$)

Phương trình (7) khi đó trở thành: f (3^x) = f (1 + 2x)

$$\Leftrightarrow 3^x = 1 + 2x$$

$$\Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0 \quad (8)$$

Xét hàm số: g (x) = $3^x - 2x - 1$ với $x \in (-\frac{1}{2};+\infty)$ ta có :

g'(x) = $3^x.\ln 3 - 2$

g''(x) = $3^x.\ln^2 3$ > 0. $\forall x > -\frac{1}{2}$

Vậy phương trình (8) có không quá 2 nghiệm trong khoảng ($-\frac{1}{2};+\infty)$

Mặt khác thử trực tiếp thấy $x_1 = 0, x_2 = 1$ là 2 nghiệm của phương trình (8) .

Vậy phương trình (8) có 2 nghiệm x_1, x_2 .

Kết luận : Phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x_1 = 0, x_2 = 1$

Bài toán 7 :

Giải phương trình : $(2^x + 2)(4 - x) = 12$ (9) .

Giải :

Xét hàm số f (x) = $(2^x + 2)(4 - x) - 12$. Xác định và liên tục trên R .

f'(x) = $2^x.\ln 2.(4 - x) - (2^x + 2)$.

f''(x) = $2^x.\ln^2 2.(4 - x) - 2^x.\ln 2 - 2^x.\ln 2$.

= $2^x.\ln 2.[\ln 2.(4 - x) - 2]$.

f''(x) = 0 $\Leftrightarrow (x - 4).\ln 2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x_o = 4 - \frac{2}{\ln 2}$.

Phương trình f''(x) = 0 có nghiệm duy nhất .
Theo định lý Roll thì phương trình (9) có không quá 3 nghiệm , bởi vì nếu (9) có 4 nghiệm phân biệt thì f''(x) = 0 có ít nhất 2 nghiệm phân biệt .
Thử trực tiếp thấy (9) thoả mãn với x = 0 , x = 1 , x = 2 .
Vậy (9) có đúng 3 nghiệm $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.

Bài toán 8 :

Chứng minh rằng : Với $\forall m \in R$ phương trình :

$$x^{2005} + 2x^3 + m(x^2 - 1) - 9x + 5 = 0 \quad (10).$$

có đúng 3 nghiệm .

Giải :

Xét hàm số f(x) = $x^{2005} + 2x^3 + m(x^2 - 1) - 9x + 5$.

H□m số f(x) liên tục và có đạo hàm trên R.

f'(x) = 2005. $x^{2004} + 6x^2 + 2mx - 9$.

f''(x) = 2005.2004. $x^{2003} + 12x + 2m$.

f'''(x) = 2005.2004.2003. $x^{2002} + 12 > 0.\forall x$.

Vậy phương trình (10) có không quá 3 nghiệm .
Mặt khác

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, f(- 1) = 11 > 0, f(1) = - 1 < 0

Cho nên :

$\exists x_1 \in (-\infty;-1)$ mà f (x_1) = 0

$\exists x_2 \in$ (-1;1) mà f(x_2) = 0

$\exists x_3 \in (1;+\infty)$ mà f(x_3) = 0

Nghĩa là phương trình (10) có ít nhất 3 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$.

Vậy phương trình (10) có đúng 3 nghiệm phân biệt .(Đpcm)
.

Bài toán 9:

Cho biết phương trình : $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ (11) có 4 nghiệm phân biệt . Chứng minh rằng : ab < 0

Giải:

Xét P (x) = $x^4 + ax^3 + bx + c$ liên tục trên R .

f(x) = P' (x) = $4x^3 + 3ax^2 + b$.

Phương trình (11) có 4 nghiệm phân biệt , theo định lý Roll suy ra:
phương trình f(x) = 0 có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f_{CD}.f_{CT} < 0$.

Mặt khác có f'(x) = 12x^2 + 6ax = 6x.(2x + a)

$$f_{CD}.f_{CT} = f(o).f(-\frac{a}{2}) = b.(\frac{a^3 + 4b}{4}).$$ (điều kiện a $\neq 0$)

Điều kiện $f_{CD}.f_{CT} < 0 \Leftrightarrow b(a^3 + 4b) < 0$ (12)

Từ (12) dễ dàng suy ra ab < 0 . Bởi vì nếu có :
a > 0 , b > 0 thì : vế trái (12) > 0
a < 0 , b < 0 thì : Vế trái (12) > 0
b = 0 thì : Vế trái (12) = 0.

Vậy ab < 0 . (Điều phải chứng minh).

Bài toán 10: Cho số n nguyên dương tuỳ ý lớn hơn 1 , và các số thực $a_1, a_2, a_3, ...a_n$. thoả mãn điều kiện :

$$0 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + ... + \frac{a_n}{n+1} = \frac{a_1}{2} + \frac{2a_2}{3} + \frac{4a_3}{4} + ... + \frac{2^{n-1}.a_n}{n+1} \quad (13).$$

Chứng minh rằng phương trình :

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} = o$$ có nghiệm .

Giải:

Xét F(x) = $\frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \frac{a_3x^4}{4} + ... + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$.

Đa thức F(x) liên tục trên R , có đạo hàm cấp tuỳ ý trên R.

F'(x) = $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$

F''(x) = $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}$

F(0) = 0, F(1) = $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + ... + \frac{a_n}{n+1}$

F(2) = $\frac{2^2a_1}{2} + \frac{2^3a_2}{3} + \frac{2^4.a_3}{4} + ... + \frac{2^{n+1}.a_n}{n+1}$

= 4 ($\frac{a_1}{2} + \frac{2a_2}{3} + \frac{4a_3}{4} + ... + \frac{2^{n-1}.a_n}{n+1}$)

Theo giả thiết (13) suy ra F(0) = F(1) = F(2) .

Theo định lý Roll suy ra phương trình F'(x) = 0 có ít nhất 2 nghiệm phân biệt
$x_1 \in (0;1), x_2 \in (1;2)$.

Suy ra phương trình F''(x) = 0 có ít nhất 1 nghiệm x_0.

Vậy phương trình : $a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1} = 0$ có nghiệm (Đpcm) .

III) ***Các bài toán luyện tập***:

Giải các phương trình và hệ phương trình sau.

1) $2^x = 1 + \log_2(x+1)$

2) $\sqrt{x} + \sqrt{5-x} = x^2 - 5x + 7$

3) $(4^x + 2)(2-x) = 6$

4) $\log_2(x+1) + \log_3(2x+1) = 6$

5) $\begin{cases} x^2 = 1 + 3\log_2 y \\ y^2 = 1 + 3\log_2 z \\ z^2 = 1 + \log_2 x \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4^x + 2^x = 4y + 2 \\ 4^y + 2^y = 4z + 2 \\ 4^z + 2^z = 4x + 2 \end{cases}$

TỨ GIÁC TOÀN PHẦN NỘI TIẾP, NGOẠI TIẾP

Thạc sỹ : Phạm Công Sính

Tổ toán trường T.H.P.T Chuyên Thái Bình

LỜI NÓI ĐẦU

****

Trong các kì thi học sinh giỏi quốc gia, học sinh giỏi toán quốc tế có xuất hiện các bài toán về hình phẳng mà học sinh gặp không ít khó khăn khi giải quyết các bài toán này.Nên việc hệ thống các dạng bài tập hình theo chuyên đề cho học sinh là rất quan trọng. Trong bài viết này tôi xin trình bày chuyên đề '***Tứ giác Toàn Phần nội,ngoại tiếp'***,đây chỉ là một trong các phương pháp để giúp học sinh có cách nhìn khái quát hơn , nhằm giải quyết một số các bài toán chứng minh trong hình học phẳng. Nội dung của chuyên đề này gồm các phần sau :

- ***Khái niệm vềTứ giác Toàn Phần***
- ***Một số bổ đề cơ sở***
- ***Một số bài tập áp dụng***
- ***Một số kết quả đạt được***

Chính vì suy nghĩ như trên nên tôi đã trình bày chuyên đề này ,góp phần cùng đồng nghiệp trong việc dạy học sinh giỏi.Tôi hy vọng rằng chuyên đề này giúp cho các em học sinh giỏi có hứng thú, say mê hơn trong việc giải các bài toán về hình học phẳng .

Trong chuyên đề này, tôi đã đưa ra một số bài toán nhỏ ,mặc dù các bài toán chưa phong phú và đa dạng , nhưng do thời lượng của chuyên đề, tôi xin được tạm dừng ở đây và sẽ tiếp tục bổ xung các bài tập khác . Trong quá trình hoàn thành chuyên đề không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong muốn được sự góp ý ,bổ sung của các thầy, cô giáo và các bạn đồng nghiệp để chuyên đề hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn !

Thái Bình ,Ngày 15 Tháng 10 Năm 2008

TỨ GIÁC TOÀN PHẦN NỘI TIẾP, NGOẠI TIẾP.

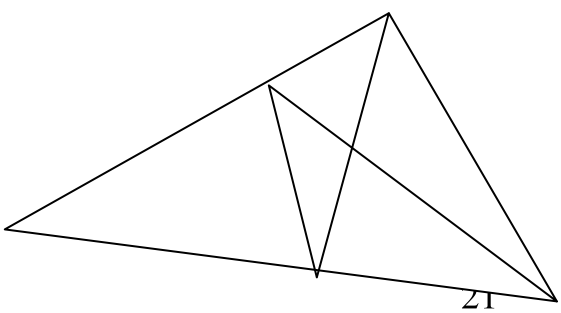
I.Định nghĩa:

Cho tứ giác lồi ABCD có 2 cạnh AB và CD cắt nhau tại N ,AD cắt BC tại M (B thuộc đoạn CM ;D thuộc đoạn CN).Tứ giác toàn phần bao gồm tứ giác ABCD và các tam giác ABM, AND được xác định bởi ABCDMN .Các đoạn AC, BD, MN được gọi là các đường chéo.A,B,C,D,M,N là các đỉnh.

Cạnh của tứ giác toàn phần ABCDMN bao gồm cạnh của tứ giác ABCD và cạnh của các tam giác ABM ,AND.

+)Nếu tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn thì ABCDMN được gọi là tứ giác nội tiếp.

+)Nếu tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn thì ABCDMN được gọi là tứ giác ngoại tiếp .



D N

A

C

B M

II.BỔ ĐỀ CƠ SỞ

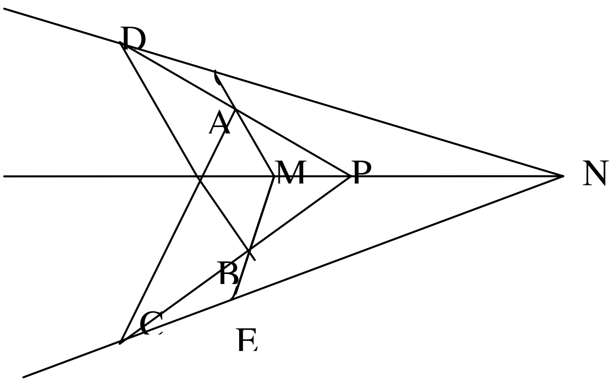
Bổ Đề1:

Cho đường tròn (O) và 4 điểm A,B,C,D nằm trên (O).Nếu tiếp tuyến với đường tròn tại A, B cắt nhau tại M, tiếp tuyến tại C,D cắt nhau tại N thì AC ,BD ,MN đồng quy ;AD ,BC , MN cũng đồng quy (Nếu chúng tồn tại).

Giả sử AB cắt CD tại H ; OH cắt MN tại K thì OK ⊥ MN và $\overline{OH}.\overline{OK}$ ***=R²***.

Chứng minh:

*Trường hợp 4 điểm A,B,C,D thứ tự là 4 đỉnh của một tứ giác Giả sử ∆ MAB nằm trong ∆ NCD=> AC và BD là đường chéo của tứ giác



E là giao của MB,NC và F là giao của MA,ND.Trong ∆ MNE ,B thuộc đoạn ME còn Cnằm ngoàiđoạn NE nên BC phải cắt MN giả sử tại P_1

áp dụng định lí Menelauyt trong ∆ MNE với 3 điểm thẳng hàng C, B, P_1 ta có

$$\frac{NP_1}{P_1M}\cdot\frac{MB}{BE}\cdot\frac{EC}{CN}=1 \Rightarrow \frac{NP_1}{P_1M}=\frac{NC}{MB} \quad (1)$$

Tương tự đối với ∆ MNF đường AD cắt MN tại P_2 ta có

$$\frac{MP_2}{P_2N}\cdot\frac{DN}{DF}\cdot\frac{AF}{AM}=1 \Rightarrow \frac{NP_2}{P_2M}=\frac{NC}{MB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) => $P_1 \equiv P_2$

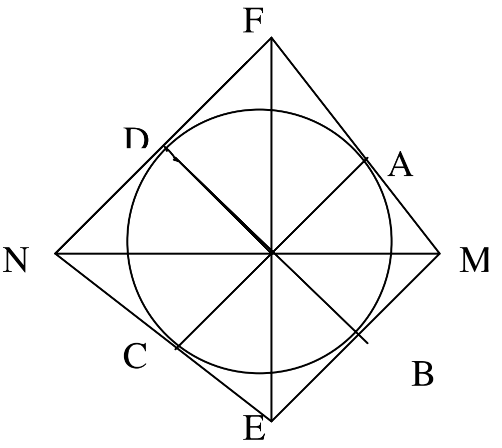
Do đó AD,BC,MN đồng quy tại P

Xét ∆ PCD vì M là 1 điểm nằm trong ∆ nên PM cắt các đoạn AC, BD giả sử tại Q_1, Q_2

Gọi hình chiếu của M,N trên AC là M_1,N_1.

Ta có $\dfrac{MM_1}{NN_1} = \dfrac{Q_1M}{Q_1N}$ (3)

Vì các góc của Δ MM_1A vuông tại M_1 và Δ NN_1C vuông tại N_1 tương ứng bằng nhau nên



Δ MM_1A~ Δ NN_1C => $\dfrac{MM_1}{NN_1} = \dfrac{MA}{NC}$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $\dfrac{MQ_1}{NQ_1} = \dfrac{MA}{NC}$ (5)

Tương tự ta có $\dfrac{MQ_2}{NQ_2} = \dfrac{MB}{ND}$ (6)

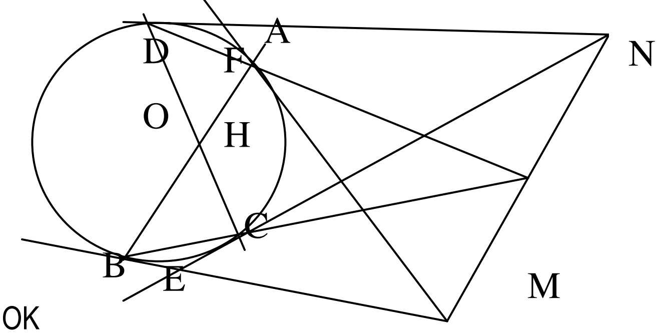
=> Mà MA=MB, NC=ND và từ (5) ,(6) ta có $\dfrac{MQ_2}{NQ_2} = \dfrac{MQ_1}{NQ_1}$

Lại có M,N nằm cùng phía đối với M nên AD, BC, MN đồng quy

*Trường hợp tứ giác MENF ngoại tiếp đường tròn

Dễ dàng chứng minh tương tự được P_1, P_2 cùng chia đoạn MN theo cùng một tỉ lệ, Q_1 ,Q_2cũng chia MN theo cùng tỉ lệ nên ,suy ra điều phải chứng minh

*Trường hợp AB ,CD là các đường chéo của tứ giác ACBD .A thuộc cung nhỏ CD,C thuộc cung nhỏ AB tương tự trong Δ MNE va Δ MNF ta chứng minh được AD và BC chia MN theo cùng một tỉ lệ (do AD và BC cùng chia trong đoạn MN).Vậy ta có điều phải chứng minh



Giả sử OK $\perp$ MN ta phải chứng minh H nằm trên OK

H_1,H' lần lượt là giao điểm của OK và AB, OM và AB => $\overline{OH'}.\overline{OM} = \overline{OH_1}.\overline{OK}$

H_2,H'' lần lượt là giao điểm của OK và CD, ON và CD => $\overline{OH_2}.\overline{OM} = \overline{OH''}.\overline{OK}$

Mà $\overline{OH''}.\overline{ON} = \overline{OH'}.\overline{OM} = R^2$ => $\overline{OH_1} = \overline{OH_2}$ => $H_1 \equiv H_2 \equiv H$

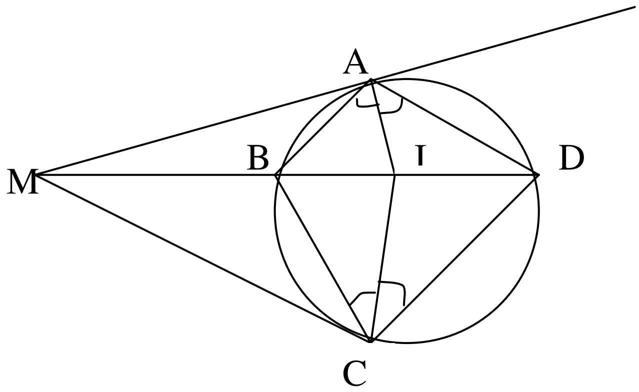
<u>Bổ Đề 2:</u>

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn ,các đường chéo không đi qua tâm.Chứng minh nếu các đường phân giác của $\angle$BCD và$\angle$BAD cắt nhau tại I và tiếp tuyến với đường tròn tại A ,C cắt nhau tại M thì M nằm trên BD <=> I thuộc BD.

<u>Chứng minh</u>

<u>Điều kiện cần</u>

Giả sử M thuộc tia DB .Phân giác $\angle$BAD cắt MD tại I'=>ta có $\angle$MAB=$\angle$ADB, $\angle$MAI'=$\angle$MI'A=>MA=MC=MI=>CI' là phân giác $\angle$BCD



<u>Điều kiện đủ:</u>

Ta phải chứng minh rằng nếu I thuộc BD thì M thuộc BD

BD cắt MA tại M_1, MC tại M_2=> $M_2C = M_2I$, $M_1A = M_1I$

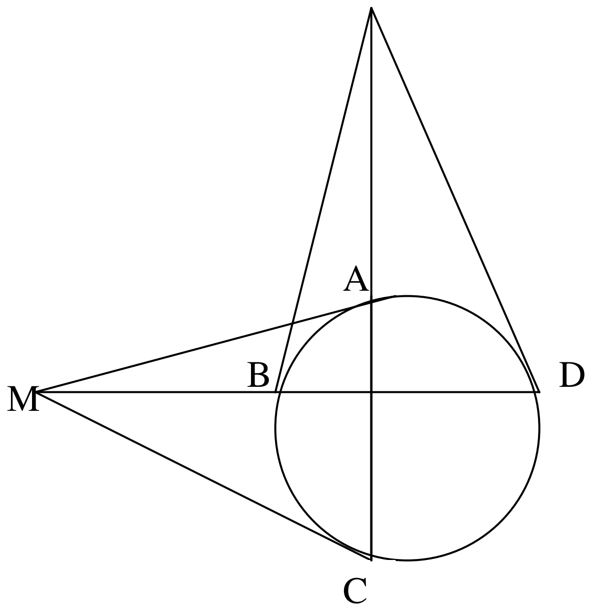
<=>$MA - MM_2 = MC + MM_1$=>$MM_1 + MM_2 = 0$ => $M_1 \equiv M_2 \equiv M$

<u>Bổ đề 3 :</u>

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn,đường chéo tứ giác không đi qua tâm .Nếu tiếp tuyến với đường tròn tại A , C cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng BD thì tiếp tuyến tại B,D cũng cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng AC.

<u>Chứng minh</u> :

Nếu tiếp tuyến tại A,C cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng BD thì phân giác của $\angle$BAD và $\angle$BCD giao nhau tại một điểm thuộc BD (BĐ II) .Sử dụng tính chất của đường phân giác trong Δ ABD và Δ BCD ta có $\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD} \Rightarrow \frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}$ => Phân giác của $\angle$ABC và $\angle$ADC giao nhau tại một điểm trên AC.Do đó tiếp tuyến tại D,B và AC đồng quy

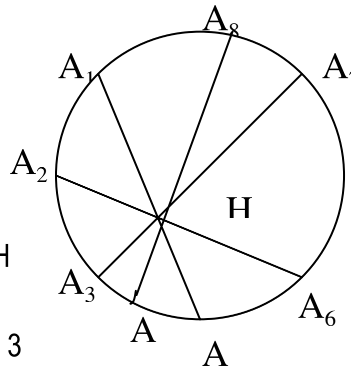


<u>III.Sử dụng các bổ đề trên để giải một số bài tập sau</u>*<u>:</u>*

<u>Bài tập1.</u>

Cho bát giác $A_1A_2...A_8$ nội tiếp đường tròn tâm O.Chứng minh rằng nếu các đường chéo $A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7, A_4A_8$ Đồng quy tại H (H không trùng với tâm O) thì giao điểm của các cặp đường chéo A_1A_3 và A_5A_7, A_1A_7 và A_3A_5; A_2A_8 và A_4A_6 (nếu chúng tồn tại) cùng nằm trên một đường thẳng.

Giải.



Gọi M là giao điểm giữa tiếp tuyến với đường tròn tại A_1 và A_5

N là giao điểm giữa tiếp tuyến tại A_2 và A_6

P là giao điểm giữa tiếp tuyến tại A_4 và A_8

Q là giao điểm giữa tiếp tuyến tại A_3 và A_7

Sử dụng bổ đề I đối với các cặp tiếp tuyến kẻ từ M, N ta có OH $\perp$ MN.Tương tự đối với tiếp tuyến kẻ từ M,P ta có OH $\perp$ MP,cuối cùng đối với cặp tiếp tuyến kẻ từ M, Q ta lại có OH $\perp$ MQ.Do đó 3 điểm M,N ,P cùng nằm trên một đường thẳng.

áp dụng bổ đề I ta suy ra rằng giao điểm của các cặp đường chéo A_1A_3 và A_5A_7, A_1A_7 và A_3A_5; A_2A_8 và A_4A_6 cùng nằm trên MN.

<u>Bài tập2.</u>

Cho 2 đường tròn tâm O,O' cắt nhau tại A,B .Từ M trên tia BA vẽ 2 tiếp tuyến với (O')tại C,D.AC,AD cắt (O) tại P,Q.

i)Chứng minh : $\frac{CA}{CP} = \frac{DA}{DQ}$

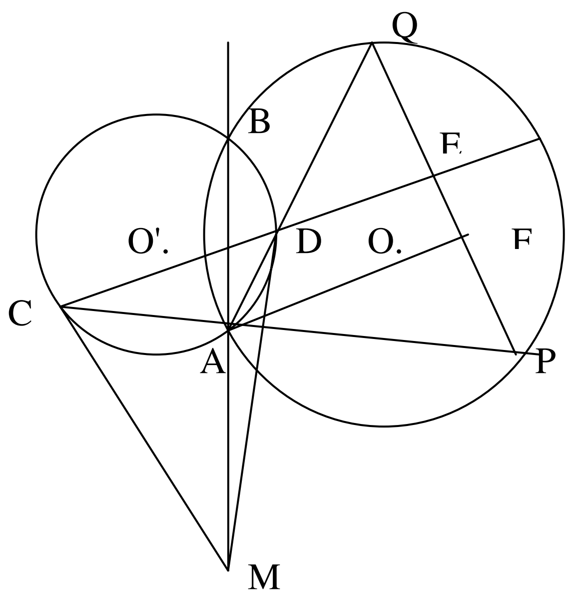
ii)Chứng minh : CD đi qua điểm chính giữa dây cung PQ

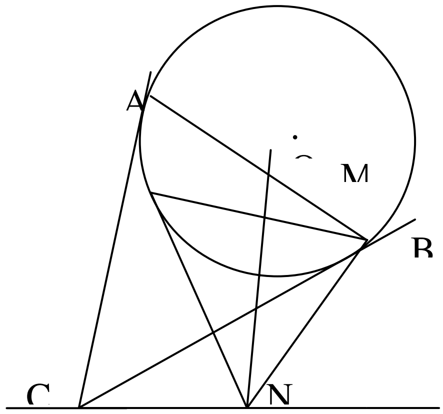
Giải.

i) Ap dụng bổ đề II ta có phân giác các góc ACB và ADB cắt nhau tại một điểm nằm trên AB. Sử dụng tính chất của đường phân giác trong Δ ABC và Δ ABD ta có $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{CA}{DA} = \frac{CB}{DB}$ (1) .Ta nhận thấy các Δ BDQ và Δ CBP có $\angle$ BDQ= $\angle$ BCP

=>Δ BDQ đồng dạng với Δ CBP=> $\frac{DQ}{CP} = \frac{BD}{BC}$ (2).Từ (1) và (2)suy ra điều chứng minh

ii)Nếu E là giao của CD và PQ ,F là giao PQ và đường thẳng qua A và song song với CD , thì $\frac{CA}{CP} = \frac{EI}{EP}$ và $\frac{EI}{EQ} = \frac{DA}{DQ}$ .Vậy EP = EQ





Bài tập3.

Cho M cố định nằm trong (O,R) .Dây cung AB tuỳ ý đi qua M.

Tìm quỹ tích giao điểm của 2 tiếp tuyến với đường tròn tại A và B

(AB quay quanh M)

Giải.

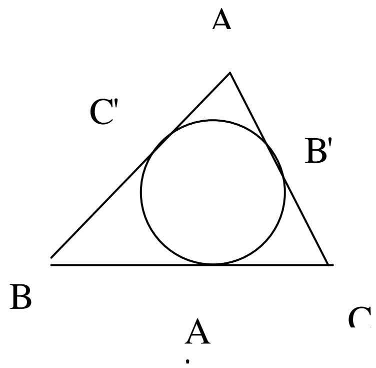
*) => Giả sử 2 tiếp tuyến cắt nhau tại C ,N là hình chiếu của C lên OM,ta có $\overline{OM}.\overline{ON} = R^2$ (1) (theo bổ đề I).Do đó N cố định ,C nằm trên đường thẳng Δ cố định vuông góc với OM

*) <=Từ C bất kì trên Δ ta kẻ 2 tiếp tuyến tới đường tròn tại A, B. OC cắt AB tại K,AB cắt ON tại H=> $\overline{OK}.\overline{OC} = \overline{OH}.\overline{ON} = R^2$ (2) .Từ (1)và (2)ta có $\overline{OM} = \overline{OH}$,chứng tỏ M$\equiv$H.Vậy M thuộc AB.

Bài tập4.

Cho Δ ABC ngoại tiếp (O).A',B',C' thứ tự là các tiếp điểm của BC,CA,AB với đường tròn .BC cắt B'C' tại P ,CA cắt C'A' tại Qvà AB cắt A'B' tại R.Chứng minh P,Q,R thẳng hàng.

Giải.



Gọi tâm đường tròn là I => AA',BB',CC' đồng quy tại I. A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của AA',BB',CC' với (O) .áp dụng bổ đề III đối với tứ giác A'B' A_1 C' ta có tiếp tuyến với (O)tại A_1 đi qua P.Tương tự tiếp tuyến tại B_1, C_1 đi qua Q và R.Mà A' A_1,B' B_1,C' C_1 đi qua I nên áp dụng bổ đề I đối với cặp 3 tiếp tuyến với (O) kẻ từ P,Q,R ta suy ra điều phải chứng minh

Bài tập5.

Cho ngũ giác ABCDEF nội tiếp đường tròn thoả mãn $\frac{AB}{BC}.\frac{CD}{DE}.\frac{EF}{FA}=1$

Tiếp tuyến với đường tròn tại A và D cắt nhau tại P.

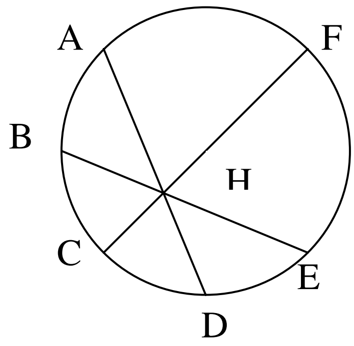
Tiếp tuyến với đường tròn tại B và E cắt nhau tại Q

Tiếp tuyến với đường tròn tại C và F cắt nhau tại K.

Chứng minh . P, Q, K thẳng hàng.

G*iải.* Trong Δ ABE và ΔCBE có $\frac{AB}{\sin\angle AEB}=\frac{BC}{\sin\angle CEB}$ =2R=> $\frac{AB}{BC}=\frac{\sin\angle AEB}{\sin\angle CEB}$ (1)

Tương tự đối với Δ AKE và Δ CKE có $\frac{AK}{AE}=\frac{\sin\angle AEB}{\sin\angle AKE}$ (2)



và $\frac{CK}{CE}=\frac{\sin\angle CEB}{\sin\angle CKE}$ (3)

Nhân vế với vế của (2) và (3)ta có $\frac{AK}{CK}.\frac{CE}{AE}=\frac{\sin\angle AEB}{\sin\angle CEB}$ (4)

Kết hợp (1)và (4)ta có $\frac{AK}{CK}.\frac{CE}{AE}=\frac{AB}{BC}$(5)

Tương tự $\frac{CP}{EP}.\frac{AE}{AC}=\frac{CD}{DE}$ (6) và $\frac{EQ}{AQ}.\frac{AC}{EC}=\frac{EF}{FA}$ (7)

Nhân từng vế (5),(6),(7)ta có $\frac{AK}{CK}.\frac{CP}{PE}.\frac{EQ}{QA}=\frac{AB}{BC}.\frac{CD}{DE}.\frac{EF}{FA}=1$

.Chứng tỏ AD,CF,BE đồng quy,áp dụng bổ đề I ta có điều chứng minh

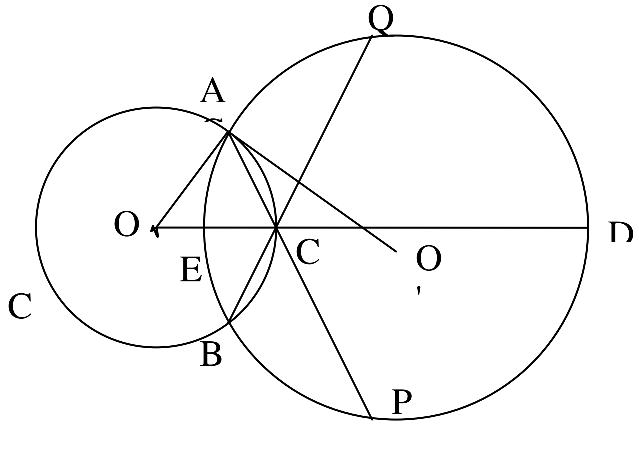
<u>Bài tập6</u>.

Cho 2 đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại A,B.Lấy C trên (O) sao cho C nằm trong (O').P,Q lần lượt là giao điểm của AC,BC với (O')

i) Chứng minh: Nếu $\angle$ OAO'=90° thì PQ là đường kính của(O')

ii)Giả sử PQ là đường kính của(O')với mỗi điểm C nằm trên cung tròn AB và nằm bên trong (O') (C có thể trùng A,B).

Chứng minh : $\angle$ OAO'=90°.



Giải.

i)Gọi E,D lần lượt là giao điểm của OC với (O')

Ta dễ dàng cm được AP là phân giác $\angle$DAE và BQ là phân giác $\angle$DBE.Do đó P,Q là điểm chính giữa cung EBD và EAD=>dpcm

ii)Nếu C trùng A hoặc B thì Δ APQ và BPQ là tam giác vuông.

Lấy H là giao AB và OO',K là giao của AP và (O')

Vì K cũng nằm trên (O')và AP là phân giác $\angle$HAO' nên ta có

$\angle$AOO'=2$\angle$ABK=$\angle$HAO'=>Δ OAO' vuông tại A

<u>Bài tập7.</u>

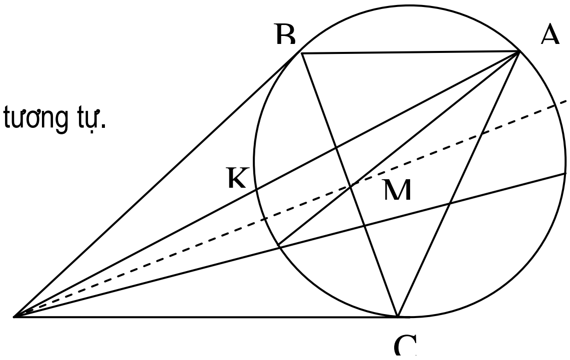
Cho Δ ABC nội tiếp (O).Lấy P sao cho PB,PC là tiếp tuyến với (O) và M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh : AM đối xứng AP qua phân giác $\angle$BAC.

Giải.Ta xét trường hợp A và P nằm khác phía đối với BC .K là giao của AP và (O).H là giao của KM và (O).Theo bổ đề III giao điểm của phân giác $\angle$ABK và $\angle$ACK nằm trên AP do đó $\frac{AB}{AC}=\frac{KB}{KC}$(1).Bên cạnh đó Δ MBK đồng dạng với Δ MHC => $\frac{MB}{MH}=\frac{BK}{CH}$. Δ MCK đồng dạng với Δ MHB=> $\frac{MC}{MH}=\frac{CK}{BH}$ mà MB=MC nên ta có $\frac{BK}{CH}=\frac{CK}{BH}$ (2).

Từ (1)và (2) ta có => Δ ABC đồng dạng Δ HBC => $\angle$ACB=$\angle$HBC=>BC//AH =>PM$\perp$AH=>H đối xứng A qua PM ,K' đối xứng K qua PM=>K' là giao điểm của AM với (O)

Vậy phân giác $\angle$BAC là phân giác $\angle$KAK'

Trường hợp A,P nằm cùng phía đối với BC cách chứng minh tương tự.



<u>iV.Một số kết quả tổng hợp về tứ giác toàn phần nội tiếp</u>

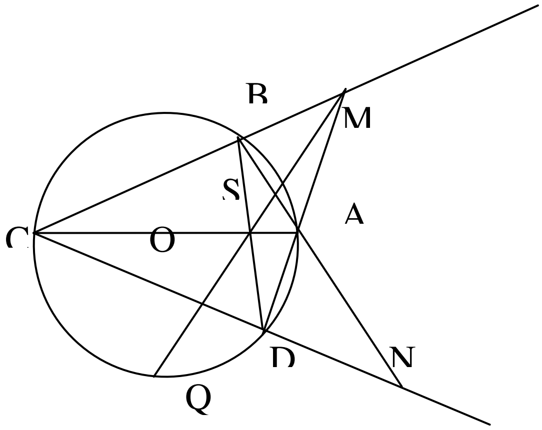
*Chúng ta coi xét đối với tứ giác toàn phần có 4 đỉnh A,B,C,D nằm trên đường tròn tâm O mà các cạnh không đi qua tâm (B nằm trên cạnh MC,D nằm trên cạnh NC) .Giao điểm của đường chéo AC và BD là S.

<u>*Kết quả 1:</u>

Nếu đường thẳng MS cắt (O) tại 2 điểm P và Q thì NP và NQ là tiếp tuyến với(O) tại P,Q.Điều khẳng định trên cũng đúng nếu AC và BD là đường kính của (O)

Chứng minh: Ta lấy P' và Q' trên (O) sao cho NP' và NQ' là tiếp tuyến .Đối với tứ giác AP'BQ' , giao điểm giữa 2 tiếp tuyến với đường tròn tại A,B nằm trên P'Q'.Tương tự đối với tứ giác CP'DQ', tiếp tuyến với đường tròn tại C, D cắt nhau tại một điểm thuộc P'Q' .Theo bổ đề 1 giao điểm của CA và BD cũng như của AD và BC nằm trên P'Q'.Do đó P' và Q' trùng với P và Q .

Nếu CD đi qua tâm O thì tiếp tuyến tại C và D song song với nhau.Tiếp tuyến với đường tròn tại A và B cắt nhau tại Z trên P'Q'. Nếu H_1là giao của AC và P'Q' thì Δ ZAH_1 là tam giác cân tại Z. Nếu H_2 là giao điểm của BD và P'Q' thì Δ ZBH_2 cũng là tam giác cân tại Z.Vậy H_1, H_2 nằm trên cạnh ZQ' và thoả mãn điều kiện ZH_1=ZH_2 do đó H_1 trùng H_2.



***Kết quả 2*:**

Các cặp đường thẳng ON và MS ,OM và NS,MN và OS thoả mãn điều kiện ON $\perp$ MS,OM$\perp$ NS,và OS$\perp$ MN(bài toán Brocard)

Chứng minh:Vì M và S nằm trên đường thẳng chứa dây cung PQ và PQ vuông góc với ON

Kết quả 3:

Cho K,L lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD ta có

$$\frac{MK}{ML} = \frac{NK}{NL} = \frac{AC}{BD}$$

: Vì Δ MAC đồng dạng Δ MBD => $\frac{MK}{ML} = \frac{BD}{AC}$.

Δ NAC đồng dạng Δ NBD => $\frac{NK}{NL} = \frac{BD}{AC}$

Kết quả 4

Cho bán kính của 4 đường tròn ngoại tiếp các Δ NBC,NAD,MCD,MAB lần lượt là R_1,R_2,R_3,R_4 ta có $\frac{R_1.R_3}{CB.CD} = \frac{R_2.R_4}{AB.AD}$

Chứng minh: Δ NBC đồng dạng với Δ NAD do đó ta có $\frac{R_1}{R_2} = \frac{BC}{AD}$.

Δ MCD đồng dạng với Δ MAB ta có $\frac{R_3}{R_4} = \frac{CD}{AB}$.Nhân 2 vế ta được $\frac{R_1.R_3}{Cb.CD} = \frac{R_2.R_4}{AB.AD}$

Kết quả 5:

Bán kính của các đường tròn ngoại tiếp Δ NAC,MAC,NBD,MBD lần lượt là r_1, r_2, r_3, r_4,ta có $r_1.r_4 = r_3.r_2$

Chứng minh: Δ NAC đồng dạng với Δ NBD => $\frac{r_1}{r_3} = \frac{CA}{BD}$

Δ MBD đồng dạng Δ MAC ta có $\frac{r_2}{r_4} = \frac{CA}{BD}$, suy ra điều phải chứng minh

Kết quả 6 :

Phân giác các góc $\angle$ CMD, $\angle$ CNB vuông góc với nhau.Giao điểm của chúng nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm 2 đường chéo AC và BD

Chứng minh: Ta dễ dàng chứng minh được 2 đường phân giác vuông góc với nhau .Ta để ý rằng phân giác của $\angle$CMD đồng thời là phân giác góc KML.Phân giác của góc CNB cũng đồng thời là phân giác góc KNL.Theo phần 3.3 ta có dpcm

<u>*Kết quả 7.</u>

4 đường tròn ngoại tiếp Δ MCD ,NBC,MAB,NAD cùng đi qua điểm M_k nằm trên đường chéo MN và $OM_k \perp$ MN(M_k được gọi là điểm Mikel)

Chứng minh: Đường tròn đi qua 3 điểm N,B,C cắt với đường thẳng MN tại M_k.Vì M nằm ngoài đường tròn ngoại tiếp Δ NBC do đó M_k nằm trên cạnh MN .Ta thấy

$\angle MM_kB = \angle$ BCDvà $\angle$ MAB= $\angle$ BCD.Bên cạnh đó $M_k$và A nằm về một phía đối với đường thẳng BM (M_k và A cùng nằm trong $\angle$ MCN) .Vậy tứ giác AM_kMD nội tiếp .Tương tự các tứ giác AM_kND, MM_kDC và NM_kBC nội tiếp .(Giao của MN và OS là M_k'.Theo kết quả 2 ta có $OM_k' \perp$ MN). Vì AD là trục đẳng phương của đường tròn (O) và (ADN) và M nằm trên AD vậy ta có $MM_k . MN = MO^2-R^2$ .Tương tự N nằm trên trục đẳng phương của (O)và (ABM) (R là bán kính của đường tròn (O)),ta có $NM_k . MN = NO^2-R^2$

Từ những kết quả trên ta có $MM_k=\dfrac{MO^2-R^2}{MN}$,$NM_k=\dfrac{NO^2-R^2}{MN}$

và $MN^2 = MO^2+NO^2-2R^2$ => $MM_k^2-NM_k^2=\dfrac{(MO^2-R^2)^2-(NO^2-R^2)}{MN}$ $=MO^2-NO^2$

Chứng tỏ $OM_k \perp$ MNvà M trùng M_k

<u>*Kết quả 8</u> .

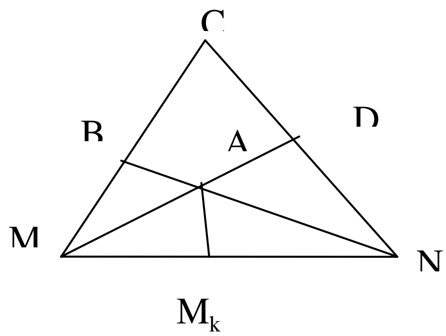
Tâm của 4 đường trong ngoại tiếp Δ MCD,NBC,MAB,NAD và điểm Mikel cùng nằm trên một đường tròn

Chứng minh: Đầu tiên ta phải chứng minh bổ đề phụ sau

Bổ đề:Với 3 điểm A,B,C cùng nằm trên một đường thẳng và điểm L không nằm trên AB.Gọi K,M,N lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp t ABL,BCL và ACLthì các điểm K,L,M,N cùng nằm trên một đương tròn

Chứng minh: Trung điểm LA, LC là I,J.Ta thấy Δ KLM đồng dạng với Δ ALC và Δ ILJ đồng dạng với Δ ALC.Do đó Δ KLM đồng dạng với Δ ILJ và ta có $\angle$LKM=$\angle$LIJ.Ta thấy K,M tương ứng nằm trên IN và JN vì$\angle$KLM=$\angle$ ILJ và tứ giác LINJ nội tiếp đường tròn do đó tứ giác LKNJ nội tiếp đường tròn

Bây giờ quay trở lại với kết quả 8 Gọi tâm các đường tròn ngoại tiếp Δ ABM, AND, CDM, BCN Là O_1,O_2,O_3,O_4.Sử dụng bổ đề đối với 3 đường Tròn$(O_1),(O_4),(O_3)$ ta thấy rằng các điểm M_k, O_1,O_4,O_3nằm trên cùng một đường tròn Tương tự các điểm M_k, O_3,O_2,O_4 nằm trên Cùng một đường tròn mà các đường tròn nàycó 3 điểm chung khác nhau nên chúng phải trùng nhau, suy ra điều phải chứng minh



<u>*Kết quả 9</u>:

Trực tâm của các tam giác MCD,NBC,MAB,NAD có cùng phương tích tới các đường tròn đường kính AC,BD,MN

Chứng minh:Trực tâm của Δ AND kí hiệu là H_1.Các đường thẳngH_1,NH_1,DH_1 tương ứng vuông góc với ND,AD,AN tại X,Y,Z. X nằm trên đường tròn đường kính AC,Y nằm trên đường tròn đường kính MN và Z nằm trên đường tròn đườn kính BD.Phương tích từ H_1đến những đường tròn này bằng $\overline{H_1X}$, $\overline{H_1Y}$, $\overline{H_1Z}$ .Trong đường tròn ngoại tiếp Δ AND ta có $\overline{H_1X} = \overline{H_1Y} = \overline{H_1Z}$ chứng tỏ H_1 có cùng phương tích với các đường tròn này.Tương tự trực tâm của các Δ MCD,NBC,MAB có cùng phương tích tới các đường tròn đường kính AC,BD.MN

<u>*Kết quả 10</u>

Trực tâm của các tam giác MCD,NBC,MAB,NAD nằm trên cùng một đường thẳng λ

.Trung điểm của 3 đường chéo AC,BD,MN nằm trên cùng một đường thẳng (Đường thẳng Gauss) và đường thẳng này vuông góc với λ .

Chứng minh:Theo kết quả 9 thì trực tâm của 4 tam giác cùng nằm trên đường trục đẳng phương của 2 đường tròn đường kính AC và BD.Tương tự như vậy trong bài này các trực tâm cũng nằm trên đường trục đẳng phương của 2 đường tròn đường kính AC vàMN.Ta biết rằng trục đẳng phương của 2 đường tròn thì vuông góc với đường nối tâm của 2 đường tròn

<u>*Kết quả 11:</u>

Điểm S nằm trên λ (điểm Son)

Chứng minh:Phương tích của S đến các đường tròn đường kính AC và BD bằng $\overline{SA}.\overline{SC}$,$\overline{SB}.\overline{SD}$

Vì tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn do đó $\overline{SA}.\overline{SC} = \overline{SB}.\overline{SD}$ và S thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và BD.Theo kết quả 9 ta suy ra S thuộc λ

<u>*Kết quả 12</u>

Đường tròn đường kính AC ,BD và MN giao nhau tại 2 điểm trên λ

Chứng minh: vì S nằm bên trong 2 đường tròn đường tròn đường kính AC và BD mà λ đi qua S=> λ phải cắt mỗi đường tròn tại 2 điểm xác định có phương tích bằng 0.Giao điểm của 2 đường tròn nằm trên λ .Chúng ta biết rằng λ là trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và MN và λ cắt đường tròn đường kính AC.Vậy các đường tròn đường kính AC và BD ,MN đi qua 2 điểm mà có phương tích bằng 0

<u>*Kết quả 13:</u>

Điểm Mikel,S và tâm O nằm trên cùng một đường thẳng và thoả mãn điều kiện $OS.OM_k=R^2$ với R là bán kính (O)

Chứng minh:Theo kết quả 2 và 7 ta nhận thấy 3 điểm O,S,M_k cùng nằm trên một đường thẳng .Lấy I là giao của 2 tiếp tuyến tại B và D.Theo bổ đề 1 I nằm trên MN.OI vuông góc với BD tại trung điểm J của BD.Từ đó I,J,M_k,S cùng nằm trên một đường tròn,ta có $OF.OM_k=OJ.OI=OB^2=R^2$.

<u>*Kết quả 14:</u>

Cho T_1và T_2 là 2 tứ giác toàn phần nội tiếp trong cùng một đường tròn.Nếu điểm Son của T_1 và T_2 trùng nhau thì điểm Mikel củaT_1 và T_2 trùng nhau.Ngược lại nếu điểm Mikel của T_1 và T_2 trùng nhau thì điểm Son của T_1và T_2 cũng trùng nhau.

Chứng minh:Suy ra từ kết quả 11.

<u>Kết quả 15</u>

Cho T_1 và T_2 là 2 tứ giác toàn phần nội tiếp trong 2 đường tròn đồng tâm .Nếu điểm Mikel và điểm Son của các tứ giác trùng nhau thì 2 đường tròn cũng trùng nhau

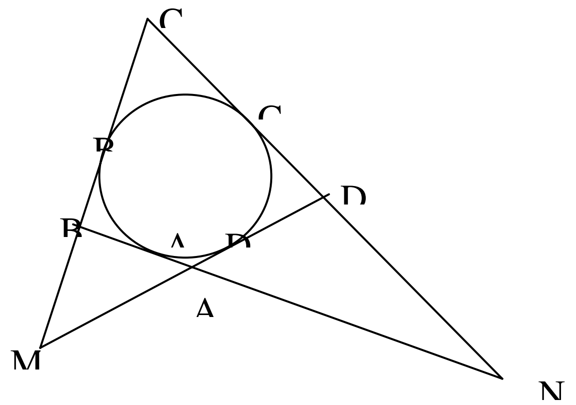
<u>Kết quả 16:</u>

Giao điểm của λ và đường thẳng đi qua 2 trung điểm của AC và BD nằm trên đường tròn đi qua S,điểm Mikel M_k và trung điểm của MN.Đường tròn đó trực giaovới đường tròn (O) (2 đường tròn được gọi là trực giao với nhau nếu chúng cắt nhau và các tiếp tuyến với 2 đường tròn tại điểm chung vuông góc với nhau)

Chứng minh:Giao của λ và đường thẳng đi qua trung điểm AC và BD là U ,trung điểm MN là K.Ta thấy U và M_k nhìn cạnh SK dưới một góc vuông tức là $\angle$SUK=$\angle$SM_kK=90°vì vậy 4 điểm S,U,K,M_k nằm trên cùng một đường tròn nên phương tích của O với đường tròn Son bằng $\overline{OS}.\overline{OM_k}$ =R^2 điều đó chứng tỏ đường thẳng qua O và điểm chung của 2 đường tròn là tiếp tuyến của đường tròn .

V.Một số kết quả tổng hợp về tứ giác toàn phần ngoại tiếp

*Xét tứ giác toàn phần ABCDMN (B thuộc cạnh MC,D thuộc cạnh NC) với tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O.Các điểm A_1,B_1,C_1,D_1 làcáctiếpđiểm của đường tròn với các cạnh AB,BC,CD,DA



Kết qủa 1

Giao của các cặp đường thẳng A_1B_1 và C_1D_1 , A_1D_1 và C_1B_1 (nếu chúng tồn tại) nằm trên MN.Giao của A_1C_1 và D_1B_1 trùng với giao điểm của AC và BD.

Chứng minh: ta thấy nếu giao của các cặp A_1B_1 và C_1D_1 , A_1D_1 và C_1B_1 tồn tại giả sử là M_1 và N_1 thì tứ giác $A_1B_1C_1D_1M_1N_1$ là một tứ giác toàn phần nội tiếp .Sử dụng tính chất của tứ giác toàn phần nội tiếp, ta có điều phải chứng minh

Kết quả 2

MA+MB+NB+NC=NA+ND+MD+MC

Chứng minh:Từ điều kiện AB+CD=AD+BC ta suy ra NB-NA+NC-ND=MC-MB+MD-MA.

Kết quả 3:

Lấy T_1= $A_1B_1C_1D_1M_1N_1$ và $A_2B_2C_2D_2M_2N_2$ là các tứ giác toàn phần nội tiếp với $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ cùng ngoại tiếp đường tròn tâm O.Nếu đường chéo của tứ giác $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ cắt nhau tại một điểm thì các đỉnh M_1,N_1,M_2,N_2 nằm trên cùng một đường thẳng

Kết quả 4

Nếu các tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn nội tiếp Δ ABM và Δ AND giao nhau tại K thì K thuộc đường thẳng MN

Chứng minh: Dùng phép vị tự tâm M biến đường tròn ngoại tiếp Δ ABM thành đường tròn nội tiếp tứ giác ABCDvà phép vị tự tâm N biến đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD thành đường tròn nội tiếp Δ AND.Do đó tâm của phép vị tự biến đường tròn nội tiếp Δ ABM thành đường tròn nội tiếp Δ AND là giao của các đường tiếp tuyến chung (là K).Theo tính chất của tâm các phép vị tự ta có 3 điểm M,N,K thẳng hàng.

Kết quả 5

Lấy O_1,O_2 tương ứng là tâm các đường tròn nội tiếp Δ ABM và Δ AND.P là giao điểm của OO_1 và AB ;Q là giao điểm của OO_2 và AD. Chứng minh rằng PQ, O_1O_2 và MN song song hoặc đồng quy.

Chứng minh: Ta dễ dàng nhận thấy P và Q là tâm của phép vị tự biến (O_1) thành (O),và biến (O) thàn (O_2).Nếu 2 đương tròn (O_1),(O_2)bằng nhau thì MN,O_1O_2,PQ song song .Nếu (O_1),(O_2) khác nhau thì PQ,MN,O_1O_2 đồng quy.

Kết quả 6:

Nếu O_3 là tâm đường tròn nội tiếp Δ AMN,E là giao AM và O_1O_3 , F là giao của AN và O_2O_3, thì PQ, EF, MN song song hoặc đồng quy

Kết quả 7:

Cho (O') là ảnh của (O_1) qua phép đối xứng tâm là trung điểm của AB,và (O") là ảnh của (O_2) qua phép đối xứng tâm là trung điểm AD.Nếu (O') tiếp xúc AB tại A',và (O") tiếp xúc AD tại D' thì các điểm A, A', D' ,O nằm trên cùng một đường tròn.Nếu (O') cắt (O") tại 2 điểm X,Y thì hình chiếu của O trên XY nằm trên đường tròn đi qua 4 điểm A,A',D',O.

Chứng minh: Ta thấy (O') tiếp xúc AB tại A_1 và (O") tiếp xúc AD tại D_1.=>(O')và (O") tiếp xúc với (O) tại A_1 và D_1 và XY đi qua A.Ta có $OA_1 \perp AB$ và $OD_1 \perp AD$.Từ đó A_1,D_1 nhìn OA dưới 1 góc $90°$

Kết quả 8:

Cho T_1= $A_1B_1C_1D_1M_1N_1$ và T_2= $A_2B_2C_2D_2M_2N_2$ là các tứ giác toàn phần với $A_2B_2C_2D_2$, $A_1B_1C_1D_1$ cùng ngoại tiếp (O).Nếu các đường chéo của tứ giác $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ cắt nhau tại một điểm thì các đỉnh M_1,N_1,M_2,N_2 nằm trên cùng một đường thẳng

Tài liệu tham khảo

1. *Tài liệu hình phẳng (tiếng Anh) của Đỗ Thanh Sơn.*
2. *các bài toán về hình học phẳng của V.VPRXOLOV*
3. *Tài liệu trên mạng*

CHUYÊN ĐỀ HÀM SINH

Thạc sỹ : Phạm Quang Thắng

Tổ Toán T.H.P.T Chuyên Thái Bình

Trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi thì các bài toán tổ hợp, phân hoạch các tập hợp là một bài toán rất khó, các dạng bài tập này thường được đưa vào đề thi trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, cũng như quốc tế. Hàm sinh là một công cụ hiệu lực để giải quyết dạng bài tập này. Khái niệm hàm sinh đơn giản, dễ hiểu nhưng ứng dụng thì rất tuyệt vời. Chuyên đề này trình bày khái niệm về hàm sinh cũng như ứng dụng của nó trong các dạng bài tập khác nhau. Cấu trúc của chuyên đề gồm.

A. Định nghĩa

☼ Định nghĩa hàm sinh

☼ Ví dụ về hàm sinh

☼ Công thức khai triển Taylor

☼ Một số tính chất của hàm sinh

B. Ứng dụng của hàm sinh

➢ *Tìm dãy số*

- Phương pháp
- Bài tập áp dụng

➢ *Tính tổng tổ hợp*

- Phương pháp
- Bài tập áp dụng

➢ *Ứng dụng của hàm sinh trong các bài toán phân hoạch tập hợp*

C. Bài tập tương tự

A. Định nghĩa

1. *Định nghĩa*

Cho dãy số $\{a_n\}$. Tổng hình thức $F(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ gọi là hàm sinh sinh bởi dãy $\{a_n\}$ và ta ký hiệu $\{a_n\}\leftrightarrow F$

Nhận xét: Mỗi dãy số $\{a_n\}$ cho ta duy nhất một hàm sinh và ngược lại. Để tìm hiểu tính chất của dãy số ta có thể tìm hiểu tính chất của hàm sinh sinh bởi nó

Bán kính hội tụ của F(x) là $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, nghĩa là với $\forall x,\ |x|<R$ thì chuỗi trên hội tụ. Khi R = 0 chuỗi trên phân kỳ.

Các chuỗi trong chuyên đề luôn hội tụ (nếu không có giải thích gì thêm).

2. Ví dụ:

Dãy $\{1\}\leftrightarrow\dfrac{1}{1-x}$ vì $1+x+x^2+\cdots=\dfrac{1}{1-x},\forall|x|<1$

Tương tự $\left\{(-1)^n\right\} \leftrightarrow \frac{1}{1+x}$; $\left\{m^n\right\} \leftrightarrow \frac{1}{1-mx}$, m=const

3. Công thức khai triển Taylor

Giả sử f(x) là hàm số liên tục, có đạo hàm mọi cấp trên khoảng (a, b); $x_0 \in (a,b)$. Khi đó ta có công thức khai triển Taylor: $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$

Khi $0 \in (a,b)$ ta có $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Ví dụ:

a. Với $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1, \ \forall n$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Vậy $\left\{\frac{1}{n!}\right\} \leftrightarrow e^x$

b. Với $f(x) = (1+x)^\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f^{(n)}(0) = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) = n!C_\lambda^n$

Ở đó $C_\lambda^n = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}$ $\Rightarrow f(x) = \sum_n C_\lambda^n x^n$

Khi $\lambda \in \mathbb{N}^*$ ta có $C_\lambda^n = 0, \ \forall \ \lambda < n$ ta có công thức khai triển Newton

Khi $\lambda = -m, m \in \mathbb{N}^*$ ta có $C_\lambda^n = C_{-m}^n = (-1)^n C_{m+n-1}^n$ $\Rightarrow$ $\left\{(-1)^n C_{m+n-1}^n\right\} \leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^m}$

4. ***Một số tính chất.***

Cho $\{a_n\} \leftrightarrow F$, $\{b_n\} \leftrightarrow G$ khi đó ta có:

- $\{a_n \pm b_n\} \leftrightarrow F \pm G$ (1)
- $\{ka_n\} \leftrightarrow kF, \ \forall k \in \mathbb{R}$ (2)
- $\left\{\sum_{k+l=n} a_k b_l\right\} \leftrightarrow F.G$ (3)
- $\{a_{n+h}\} \leftrightarrow \frac{F - a_0 - a_1x - \cdots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}, \ h \in \mathbb{N}$ (4)
- $\{(n+1)a_{n+1}\} \leftrightarrow F'$ (5)

B. Ứng dụng

I.Tìm dãy số.

1. *Phương pháp*

- Để tìm dãy số $\{a_n\}$. Ta xét hàm sinh sinh bởi dãy $\{a_n\}$ là $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$
- Dựa vào đặc điểm của dãy $\{a_n\}$ ta tìm được F(x)
- Đồng nhất thức sẽ thu được dãy $\{a_n\}$

2. *Bài tập áp dụng*

Bài 1 (Dãy Fibonacci) Tìm dãy số Fibonacci thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_0 = 0, F_1 = 1 \end{cases}$

Lời giải: Xét hàm sinh F(x) sinh bởi dãy $\{F_n\}$

Ta có $\{F_{n+2}\} \leftrightarrow \frac{F-x}{x^2}$, $\{F_{n+1}\} \leftrightarrow \frac{F}{x}$ (do tính chất 4)

Vậy ta có phương trình:

$$\frac{F-x}{x^2}=\frac{F}{x}+F \qquad \text{(Do giả thiết của bài toán 1)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad F=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\ge 0}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)x^n$$

Vậy $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

<u>Bài 2</u>: Tìm số tập con của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho trong mỗi tập con không chứa hai phần tử liên tiếp.

Lời giải.

Gọi F_n là số các tập con như vậy.

Chia các tập hợp con của $\{1, 2, \ldots, n\}$ mà trong mỗi tập con không chứa hai phần tử liên tiếp thành hai nhóm.

- Nhóm không chứa n: số tập con như vậy là F_{n-1}
- Nhóm chứa n : đó là $\{n\}$ và các tập con dạng $\{a_1, a_2, \ldots a_k, n\}, a_i \ne n-1, \forall i=1,...,k; \forall k=1,...,n$ trong trường hợp này có F_{n-2} tập con.

Vậy ta có $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

Dễ thấy F(1) = 2, F(2) = 3

Áp dụng bài tập 1 ta có: $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$

<u>Bài 3</u>: Tìm số tập con k phần tử của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho trong mỗi tập con không chứa hai phần tử liên tiếp.

Lời giải:

Gọi $F_{n,k}$ là số các tập con như vậy.

Chia các tập hợp con k phần tử của $\{1, 2, \ldots, n\}$ mà trong mỗi tập con không chứa hai phần tử liên tiếp thành hai nhóm.

- Nhóm không chứa n: số tập con như vậy là $F_{n-1,k}$
- Nhóm chứa n : đó là $\{n\}$ và các tập con dạng $\{a_1, a_2, \ldots a_k, n\}, a_i \ne n-1, \forall i=1,...,k; \forall k=1,...,n$ trong trường hợp này có $F_{n-2,k-1}$ tập con.

Vậy ta có $F_{n,k}=F_{n-1,k}+F_{n-2,k-1}$ với k > 1 (*)

Xét hàm sinh:

$$F_k(x)=\sum_{n\ge 1}F_{n,k}x^n$$

Từ hệ thức (*) ta có: $F_k(x)=\frac{x^2}{1-x}F_{k-1}(x)$, áp dụng liên tiếp công thức này ta được:

$$F_k(x)=\frac{x^{2k-1}}{(1-x)^{k+1}}=x^{2k-1}\sum_{i\ge 0}C^i_{-k-1}x^i=\sum_{i\ge 0}C^i_{-k-1}x^{i+2k-1}$$

Đồng nhất thức ta thu được $F_{n,k}=C^{n-2k+1}_{-k-1}=C^{n-2k+1}_{n-k+1}=C^k_{n-k+1}$

<u>Nhận xét</u> : Kết hợp hai bài tập 2, và 3 ta thu được hệ thức rất đẹp: $\sum_k C^k_{n-k+1}=F_{n+1}$

Bài 4: Tìm dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn: $\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 2 \\ a_{n+2} = -4a_{n+1} - 8a_n \end{cases}$

Lời giải:

Xét hàm sinh f(x) sinh bởi dãy $\{a_n\}$, tương tự như bài tập 1 ta có phương trình:

$$\frac{f-2x}{x^2} = -\frac{4f}{x} - 8$$

$$\Leftrightarrow f = \frac{2x}{1+4x+8x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-(-2+2i)x} - \frac{1}{1-(-2-2i)x}\right) \quad \text{(Mẫu thức có } \Delta' = -4 = 4i^2\text{)}$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\left[(-2+2i)^n - (-2-2i)^n\right]x^n$$

Đồng nhất thức ta được :

$$a_n = \frac{(-2+2i)^n - (-2-2i)^n}{2i}$$

$$= \frac{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n - \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n}{2i}\cdot(-2\sqrt{2})^n$$

$$= (-2\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}$$

Bài 5: Tìm số hạng tổng quát của dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 0 \\ x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n + n \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt $\{x_n\} \leftrightarrow f(x)$ ta có phương trình :

$$\frac{f(x) - 0 - 0.x}{x^2} - 6\frac{f(x)}{x} + 9f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad f(x) = \frac{x^2}{(1-3x)^2}\left[\frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-x)^2}\right]$$

Viết f(x) dưới dạng:

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-3x)^2}\left[\frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-x)^2}\right] = \frac{a}{(1-3x)^2} + \frac{b}{1-3x} + \frac{c}{1-x} + \frac{d}{(1-x)^2} + \frac{e}{1-2x}$$

Quy đồng mẫu số rồi đồng nhất hệ số ta thu được:

$$a = \frac{5}{12}, b = -\frac{5}{3}, c = 0, d = \frac{1}{4}, e = 1$$

Vậy: $$f(x) = \frac{x^2}{(1-3x)^2}\left[\frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-x)^2}\right] = \frac{\frac{5}{12}}{(1-3x)^2} - \frac{\frac{5}{3}}{1-3x} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x}$$

Ta có:

$$\frac{1}{1-3x}\leftrightarrow\{3^n\} \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{(1-3x)^2}=\left[\frac{1}{1-3x}\right]'\leftrightarrow\{3^{n+1}(n+1)\}$$

$$\frac{1}{1-x}\leftrightarrow\{1\} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\left[\frac{1}{1-x}\right]'\leftrightarrow\{n+1\}$$

$$\frac{1}{1-2x}\leftrightarrow\{2^n\}$$

Vậy : $x_n=\frac{5}{12}(n+1)3^n-\frac{5}{3}\cdot 3^n+\frac{1}{4}(n+1)+2^n=\frac{2^{n+2}+n+1+5(n-3)3^n}{4}$

II. Tính tổng

1. *Phương pháp*

Để tính tổng $f(n)=\sum_m S_m(n)$ ta xét hàm sinh:

$$F(x)=\sum_n f(n)x^n=\sum_n\left(\sum_m S_m(n)x^n\right) \qquad (*)$$

Sau đó sử dụng phương pháp đổi tổng để tính vế phải của (*) rồi đồng nhất thức hai vế ta được f(n).

2. *Bài tập áp dụng*

Bài 1: Tính tổng sau: $\sum_k C_k^{n-k}$

Lời giải:

Đặt $f(n)=\sum_k C_k^{n-k}$ xét hàm sinh :

$$F(x)=\sum_n f(n)x^n=\sum_n\left(\sum_k C_k^{n-k}x^n\right)$$

Biến đổi F(x) ta có:

$$F(x)=\sum_n\left(\sum_k C_k^{n-k}x^n\right)=\sum_n\left(\sum_k C_k^{n-k}x^{n-k}x^k\right)$$

$$=\sum_k\left(\sum_n C_k^{n-k}x^{n-k}\right)x^k=\sum_k(1+x)^k x^k$$

$$=\sum_k(x^2+x)^k=\frac{1}{1-x-x^2}$$

Vậy F(x) chính là hàm sinh của dãy Fibonacci, do đó:

$$f(n)=\sum_k C_k^{n-k}=F_{n+1}$$

Bài 2: Tính tổng sau: $\sum_{k=n}^{m}(-1)^k C_n^k C_k^m$

Lời giải:

Đặt $f(m)=\sum_{k=n}^{m}(-1)^n C_n^k C_k^m$ xét hàm sinh:

$$F(x)=\sum_m f(m)x^m \quad =\sum_m\left(\sum_{k=m}^{n}(-1)^k C_n^k C_k^m\right)x^m$$

$$=\sum_{k\le n}(-1)^k C_n^k\left[\sum_{m\le k} C_k^m x^m\right] \quad =\sum_{k\le n}(-1)^k C_n^k(1+x)^k$$

$$=(-1)^n\sum_{k\le n}(-1)^{n-k}C_n^k(1+x)^k=(-1)^n(1+x-1)^n$$

$$=(-1)^n x^n$$

Đồng nhất thức ta có:

$$f(m)=\begin{cases}(-1)^n & \text{khi } m=n\\ 0 & \text{khi } m<n\end{cases}$$

<u>Bài 3</u>: Tính tổng sau: $\sum_{k=n}^{m} C_n^k C_k^m$

Lời giải:

Đặt $f(m)=\sum_{k=n}^{m} C_n^k C_k^m$ xét hàm sinh:

$$F(x)=\sum_m f(m)x^m \quad =\sum_m\left(\sum_{k=m}^{n} C_n^k C_k^m\right)x^m$$

$$=\sum_{k\le n} C_n^k\left(\sum_{m\le k} C_k^m x^m\right) \quad =\sum_{k\le n} C_n^k(1+x)^k$$

$$=(1+x+1)^n \quad =(2+x)^n$$

Mặt khác theo công thức khai triển Newton ta có:

$$(2+x)^n=\sum_m 2^{n-m}C_n^m x^m$$

Đồng nhất thức ta có: $f(m)=2^{n-m}C_n^m$

<u>Bài 4</u>:

a) Tính tổng sau: $\sum_k C_n^{\left[\frac{k}{2}\right]}x^k$

b) Tính tổng sau: $\sum_k C_n^k C_{n-k}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}x^k$

Lời giải:

a. Ta có:

$$\sum_k C_n^{\left[\frac{k}{2}\right]}x^k=\sum_k C_n^{\left[\frac{2k}{2}\right]}x^{2k}+\sum_k C_n^{\left[\frac{2k+1}{2}\right]}x^{2k+1}$$

$$=\sum_k C_n^k(x^2)^k+x\sum_k C_n^k(x^2)^k$$

$$=(1+x^2)^n+x(1+x^2)^n$$

$$=(1+x)(1+x^2)^n$$

b. Đặt $f(m)=\sum_k C_n^k C_{n-k}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}x^k$. Xét hàm sinh:

$$F(y)=\sum_m f(m)y^m=\sum_m\left(\sum_k C_n^k C_{n-k}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}x^k\right)y^m$$

$$=\sum_k C_n^k x^k\left(\sum_m C_{n-k}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}y^m\right)$$

$$=\sum_k C_n^k x^k y^k\left(\sum_m C_{n-k}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}y^{m-k}\right)$$

Áp dụng câu a ta có

$$\sum_m C_{n-k}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}y^{m-k}=(1+y)(1+y^2)^{n-k}$$

$$\Rightarrow F(y)=\sum_k C_n^k x^k y^k\left(\sum_m C_{n-k}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}y^{m-k}\right)$$

$$=\sum_k C_n^k (xy)^k(1+y)(1+y^2)^{n-k}$$

$$=(1+y)\sum_k C_n^k (xy)^k(1+y^2)^{n-k}$$

$$=(1+y)(1+xy+y^2)^n$$

Khi x= 2 ta có: $F(y)=(1+y)^{2n+1}=\sum_m C_n^m y^m$ do đó đồng nhất các hệ số ta

có: $\sum_k C_n^k C_{n-k}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}2^k=C_{2n+1}^m$

Khi x = -2 ta có :

$$F(y)=(1+y)(1-y)^{2n}=(1-y)^{2n}+y(1-y)^{2n}=\sum_m\left[(-1)^m C_{2n}^m+(-1)^{m-1}C_{2n}^{m-1}\right]y^m$$

Đồng nhất thức ta được :

$$\sum_k C_n^k C_{n-k}^{\left[\frac{m-k}{2}\right]}(-2)^k=(-1)^m[C_{2n}^m-C_{2n}^{m-1}]$$

<u>Bài 5</u>: Tính tổng sau: $f(n)=\sum_k C_{n+k}^{m+2k}C_{2k}^k\frac{(-1)^k}{k+1}$

Lời giải:

Xét hàm sinh của dãy $\{f(n)\}$ ta có:

$$F(x)=\sum_n\left[\sum_k C_{n+k}^{m+2k}C_{2k}^k\frac{(-1)^k}{k+1}\right]x^n$$

$$=\sum_k C_{2k}^k\frac{(-1)^k}{k+1}x^{-k}\left(\sum_n C_{n+k}^{m+2k}x^{n+k}\right)$$

ta có:

$$\sum_n C_{n+k}^{m+2k}x^{n+k}=\quad x^{m+2k}\sum_n C_{n+k}^{m+2k}x^{n-k-m-1}\;=x^{m+2k}\sum_n C_{n+k}^{n-k-m}x^{n-k-m}$$

$$=x^{m+2k}\sum_n C_{-(m+2k+1)}^{n-k-m}x^{n-k-m}=x^{m+2k}(1-x)^{-(m+2k+1)}$$

$$=\frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}}$$

Vậy ta có :

$$F(x)=\sum_k C_{2k}^k \frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}}$$

$$=\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\sum_k C_{2k}^k \frac{1}{k+1}\left\{\frac{-x}{(1-x)^2}\right\}^k$$

$$=\frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1-\sqrt{1+\frac{4x}{(1-x)^2}}\right\}$$

$$=\frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1-\frac{1+x}{1-x}\right\}$$

$$=\frac{x^m}{(1-x)^m}$$

Mặt khác: $\dfrac{x^m}{(1-x)^m}=x^m\sum_n C_{m+n-1}^n x^n=\sum_n C_{m+n-1}^n x^{n+m}=\sum_n C_{n-1}^{m-1}x^n$

Đồng nhất thức ta nhận được: $f(n)=\sum_k C_{n+k}^{m+2k} C_{2k}^k \dfrac{(-1)^k}{k+1}=C_{n-1}^{m-1}$

III. Ứng dụng của hàm sinh trong các bài toán phân hoạch tập hợp.

Bài 1. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ với m, n là các số nguyên dương cho trước (*)

Lời giải:

Ta xét hàm sinh:

$F(x)=\underbrace{(1+x+x^2\cdots)(1+x+x^2\cdots)\cdots(1+x+x^2\cdots)}_{\text{n tích}}$ với |x|<1

Mỗi số hạng trong khai triển F(x) thành tổng có dạng $x^{x_1+x_2+\cdots+x_n}$ trong đó $x_i\ge 0,\forall i$ như vậy quan sát tổng từ trái qua phải mỗi khi ta gặp lũy thừa của x bằng m thì trong biểu thức khai triển thu gọn của F(x) hệ số của x^m được tăng lên một đơn vị, do đó hệ số của x^m trong khai triển của F(x) thành tổng chính là số nghiệm của phương trình đã cho. Vậy ta cần tìm hệ số của x^m trong khai triển thành tổng của F(x).

Ta có: $F(x)=\dfrac{1}{(1-x)^n}=(1-x)^{-n}=\sum_{k\ge 0}(-1)^k C_{-n}^k x^k$

Ở đó: $C_{-n}^k=\dfrac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}=\dfrac{(-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}=(-1)^k C_{n+k-1}^k$

Vậy hệ số của x^m trong khai triển F(x) là C_{n+m-1}^m ,đó cũng là số nghiệm của phương trình (*).

Bài 2: Cho $n\in\mathbb{N}$ và giả sử rằng phương trình:

$x+2y=n$ có m_1 nghiệm trong $\mathbb{N}_0^2$

$2x+3y=n-1$ có m_2 nghiệm trong $\mathbb{N}_0^2$

. . . .

$nx+(n+1)y=1$ có m_n nghiệm trong $\mathbb{N}_0^2$

$(n+1)x+(n+2)y=0$ có m_{n+1} nghiệm trong $\mathbb{N}_0^2$

Chứng minh rằng : $\sum_k m_k=n+1$

Lời giải:

Ta xét hàm sinh:

$F_1(x)=(1+x+x^2\cdots)(1+x^2+x^4\cdots)=\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1-x^2}$ với 0<|x|<1

Khai triển $F_1(x)$ thành tổng thì các số hạng là các lũy thừa của x với số mũ có dạng i + 2j. Vậy m_1 chính là hệ số của x^n trong khai triển $F_1(x)$ thành tổng. Do đó ta có:

$F_1(x) = \cdots + m_1x^n + \cdots$

Lý luận tương tự ta có :

$$F_k(x) = \cdots + m_k x^{n+1-k} + \cdots$$

$$\Leftrightarrow x^{k-1}F_k(x) = \cdots + m_k x^n + \cdots$$

Ở đó $F_k(x) = (1 + x^k + x^{2k}\cdots)(1 + x^{k+1} + x^{2(k+1)}\cdots) = \frac{1}{1-x^k}\cdot\frac{1}{1-x^{k+1}}, \forall\ k=1\cdots n+1$

Suy ra: $\sum_k x^{k-1}F_k(x) = \cdots + \sum_k m_k x^n + \cdots$

Mặt khác : $\sum_k x^{k-1}F_k(x) = \sum_k \frac{x^{k-1}}{(1-x^k)(1-x^{k+1})} = \frac{1}{x-x^2}\sum_k\left(\frac{1}{1-x^k} - \frac{1}{1-x^{k+1}}\right) = \frac{1}{x(1-x)^2}$

Hệ số của x^n trong khai triển $\sum_k x^{k-1}F_k(x)$ là hệ số của x^{n+1} trong khai triển của

$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1-x)(1-x^{n+2})}$.

Vậy $\sum_k m_k = C_{-2}^{n+1} - C_{-1}^{n+1} = n+1$

Bài 3: Cho hữu hạn cấp số cộng, sao cho mỗi số tự nhiên khác 0 là một phần tử của đúng một cấp số. Chứng minh rằng có hai cấp số cộng trong số các cấp số cộng trên có cùng công sai.

Lời giải:

Giả sử có m cấp số cộng $\{a_j + nb_j\}, j = 1,\ldots,m$ mà mỗi số tự nhiên là phần tử của đúng một cấp số. Ta có:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{n\ge 0} x^{a_j+nb_j} = \sum_{j=1}^{m}\frac{x^{a_j}}{1-x^{b_j}} \qquad \forall\,|x|<1$$

Mà $$\sum_{j=1}^{m}\sum_{n\ge 0} x^{a_j+nb_j} = \sum_{k\ge 1} x^k \qquad \forall\,|x|<1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-1} = \sum_{j=1}^{m}\frac{x^{a_j}}{1-x^{b_j}} \qquad (*)$$

Giả sử không có hai cấp số cộng nào nói trên có cùng công sai, suy ra tập hợp $\{b_1, b_2, \ldots b_n\}$ là hữu hạn dó đó tồn tại duy nhất phần tử lớn nhất, giả sử đó là b_1. Gọi ε là một nghiệm khác 1 của phương trình $x^{b_1} = 1$ thỏa mãn $\varepsilon^{b_i} \ne 1,\ \forall i: 1<i \le m$ khi đó thay ε vào phương trình (*) ta thấy vế trái là hằng số còn vế phải bằng ∞

Vậy giả sử là sai (đpcm)

Tiếp theo chúng ta quan tâm đến một định lý mà định lý này song hành cùng hàm sinh trong giải toán tổ hợp rất hiệu quả.

Định lý RUF (Root of unity filter)

Giả sử $F(x) = \sum_k f_k x^k$ là hàm sinh của dãy $\{f_k\}$, với $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ (ε là căn bậc n của đơn vị) ta có:

$$\sum_{k\ge 0} f_{nk} = \frac{1}{n}\left[F(1) + F(\varepsilon) + \cdots + F(\varepsilon^{n-1})\right]$$

Bài 4.(Rumania – 2003)

Cho tập A={2, 3, 7, 9}

Tìm số các số có n chữ số lập từ A mà số đó chia hết cho 3

Lời giải.

Ta cần tìm số các bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i \in A\ \ \forall i = 1, \ldots, n$ sao cho : $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \vdots 3$

Tương tự như bài tập 1 chúng ta xét hàm sinh:

$F(x) = (x^2 + x^3 + x^7 + x^9)^n$

Lý luận như trên ta có số các số cần tìm chính là tổng các hệ số của các lũy thừa có số mũ chia hết cho 3.

Giả sử F(x) có khai triển $F(x) = \sum_{k\ge 0} f_k x^k$

Chúng ta cần phải tính $P = \sum_{k\ge 0} f_{3k}$

Áp dụng định lý RUF ta có : $P = \sum_{k\ge 0} f_{3k} = \frac{1}{3}\left[F(1) + F(\varepsilon) + F(\varepsilon^2)\right], \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$$F(1) \;\; = 4^n$$
$$F(\varepsilon) \;\; = (\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^7 + \varepsilon^9)^n \;\; = (\varepsilon^2 + 1 + \varepsilon + 1)^n = 1$$
$$F(\varepsilon^2) = (\varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{18})^n = (\varepsilon + 1 + \varepsilon^2 + 1)^n = 1$$

Vậy $P = \dfrac{4^n + 2}{3}$

Bài 5.(IMO-95)

Cho tập hợp A = {1, 2, …, 2p}, p là số nguyên tố. Tìm số các tập con của A thỏa mãn:

+) Mỗi tập có đúng p phần tử.

+) Tổng các phần tử của tập con đó chia hết cho p.

Lời giải.

Để giải bài toán bằng phương pháp hàm sinh ta phải sử dụng 2 biến x, y: Lũy thừa của biến x để tính tổng của các phần tử của tập con, lũy thừa của biến y để tính số phần tử của tập con đó. Giả sử khi đã có một tập con của B, khi thêm một phần tử m vào tập con đó thì tổng các phần tử sẽ tăng lên m đơn vị và số lượng phần tử của tập sẽ tăng lên một đơn vị. Nhưng ta phải giữ lại những tập con không chứa m trước khi thêm m vào, do đó trong hàm sinh sẽ chứa các nhân tử có dạng $1 + x^m y$.

Xét hàm sinh như sau:

$F(x, y) = (1 + xy)(1 + x^2 y)...(1 + x^{2p} y)$

Khai triển dưới dạng tổng của F(x, y) có dạng: $F(x, y) = \sum_{k,n} f_{n,k} x^n y^k$

Ta sẽ đi tìm ý nghĩa của $f_{n,k}$. Khi khai triển F(x, y) thành tổng thì các số mũ của x có dạng $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ với $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là các số đôi một phân biệt của tập A, số mũ tương ứng của y là k, như vậy $f_{n,k}$ chính là số tập con của A có k phần tử mà tổng các phần tử là n. Để giải bài toán chúng ta phải đi tìm tổng $P = \sum_{k\ge 0} f_{kp,p} = \sum_{n \vdots p} f_{n,p}$

Áp dụng định lý RUF cho F(x, y) trong đó ta coi x là biến số ta được:

$$\sum_{k\ge 0, n \vdots p} f_{n,k} y^k = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} F(\varepsilon^j, y), \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

Ta có:

$F(1, y) = (1 + y)^{2p}$

$F(\varepsilon^j, y) = (1 + \varepsilon^j y)(1 + \varepsilon^{2j} y)...(1 + \varepsilon^{2jp} y); \quad \forall j \ge 1$

Vì p là số nguyên tố nên {j, 2j, . . . , pj}, {(p+1)j, . . ., 2pj} tạo thành các hệ thặng dư thu gọn mod p, mặt khác ta có $\varepsilon^p = 1$ do đó :

$$F(\varepsilon^j, y) = (1 + \varepsilon^j y)(1 + \varepsilon^{2j} y)...(1 + \varepsilon^{2jp} y)$$
$$= [(1 + \varepsilon y)(1 + \varepsilon^2 y)\ldots(1 + \varepsilon^p y)]^2 \;\; ; \;\; \forall j \ge 1$$

Dễ nhận thấy phương trình $y^p + 1 = 0$ có các nghiệm là $-\varepsilon^{-1}, -\varepsilon^{-2}, \ldots, -\varepsilon^{-p}$ do đó ta có :

$$(1+\varepsilon y)(1+\varepsilon^2 y)\ldots(1+\varepsilon^p y)=1+y^p$$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 0, n\vdots p} f_{n,k}y^k=\frac{1}{p}\left[(1+y)^{2p}+(p-1)(1+y^p)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n\vdots p} f_{n,p}=\frac{C_{2p}^p+2(p-1)}{p}$$

Vậy số tập con tìm được là: $\dfrac{C_{2p}^p+2(p-1)}{p}$

Nhận xét :

- ✓ Nếu bỏ qua điều kiện thứ nhất thì bài toán sẽ đơn giản hơn rất nhiều, khi đó ta chỉ cần xét hàm sinh:

$$F(x)=(1+x)(1+x^2)...(1+x^{2p})$$

Khi đó số tập con cần tìm là

$$P=\sum_{k\geq 0} f_{kp}=\frac{1}{p}\left[F(1)+F(\varepsilon)+\cdots+F(\varepsilon^{p-1})\right]=\frac{2^{2p}+4(p-1)}{p}$$

- ✓ Ta có thể mở rộng bài toán 5 thành bài toán 5' như sau:

<u>Bài toán 5'</u>:

Cho tập hợp A = {1, 2, …, m}, p là số nguyên tố. Tìm số các tập con của A thỏa mãn:

+) Mỗi tập có đúng p phần tử.

+) Tổng các phần tử của tập con đó chia hết cho p.

Lời giải

Lý luận tương tự như bài tập 5 chúng ta xét hàm sinh:

$$F(x,y)=(1+xy)(1+x^2y)...(1+x^my)=\sum_{k,n} f_{n,k}x^ny^k$$

Và ta cần phải tính tổng : $P=\sum_{k\geq 0} f_{kp,p}=\sum_{n\vdots p} f_{n,p}$

Áp dụng định lý RUF cho F(x, y) trong đó ta coi x là biến số ta được:

$$\sum_{k\geq 0, n\vdots p} f_{n,k}y^k=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}F(\varepsilon^j,y), \qquad \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

Ta có:

$$F(1,y)\ =(1+y)^m$$

$$F(\varepsilon^j,y)=(1+\varepsilon^j y)(1+\varepsilon^{2j}y)...(1+\varepsilon^{jm}y);\ \ \forall j\geq 1$$

Ta viết m = pq + r với $0\leq r<p-1$

Vì p là số nguyên tố nên {j, 2j, . . . , pj}, {(p+1)j, . . ., 2pj}, . . .,{(q-p+1)j, . . .,qj} tạo thành các hệ thặng dư thu gọn mod p, mặt khác ta có $\varepsilon^p=1$ do đó :

$$\begin{aligned}F(\varepsilon^j,y)&=(1+\varepsilon^j y)(1+\varepsilon^{2j}y)...(1+\varepsilon^{mj}y)\\&=[(1+\varepsilon y)(1+\varepsilon^2 y)\ldots(1+\varepsilon^p y)]^q(1+\varepsilon^j y)(1+\varepsilon^{2j}y)\ldots(1+\varepsilon^{rj}y)\ \ ;\ \ \forall j\geq 1\\&=(1+y^p)^q(1+\varepsilon^j y)(1+\varepsilon^{2j}y)\ldots(1+\varepsilon^{rj}y)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k\geq 0, n\vdots p} f_{n,k}y^k=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}F(\varepsilon^j,y)=\frac{1}{p}(1+y^p)^q\sum_{j=0}^{p-1}(1+\varepsilon^j y)(1+\varepsilon^{2j}y)\ldots(1+\varepsilon^{rj}y)+\frac{1}{p}(1+y)^n$$

Đồng nhất hệ số của y^p ta có :

$$P=\sum_{k\geq 0} f_{kp,p}=\sum_{n\vdots p} f_{n,p}=\frac{(p-1)q+C_p^m}{p}=\frac{(p-1)\left[\frac{m}{p}\right]+C_m^p}{p}$$

Khi n = 2p ta được kết quả là bài toán 5

Bài 6: Cho tập hợp A = {1, 2, . . . , 2009}
Tìm số các tập con của A mà tổng các phần tử trong mỗi tập con đó chia hết cho 7
Lời giải.
Tương tự như nhận xét trên chúng ta xét hàm sinh:
$$F(x) = (1+x)(1+x^2)...(1+x^{2009})$$
Khai triển F(x) thành dạng $F(x) = \sum_k f_k x^k$ ta cần tính :
$$P = \sum_{k\ge 0} f_{7k} = \frac{1}{7}\left[F(1) + F(\varepsilon) + \cdots + F(\varepsilon^6)\right]$$
Vì 7 là số nguyên tố, với phương pháp tương tự bài tập 3 ta có:
$$F(1) = 2^{2009}$$
$$F(\varepsilon^j) = (1+\varepsilon^j)(1+\varepsilon^{2j})\dots(1+\varepsilon^{2009j}) = \left[(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\dots(1+\varepsilon^7)\right]^{287} = (1+1)^{287} = 2^{287}$$
Vậy: $P = \dfrac{2^{2009} + 6.2^{287}}{7}$

Bài 7: Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng số các cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương lẻ bằng số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương khác nhau.
Lời giải.
Xét hàm sinh:
$$F(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots$$
Số mũ của số hạng trong phân tích thành tổng của F(x) có dạng: $i_1 + 3i_2 + 5i_3 + \cdots$ có nghĩa là tổng của các số lẻ, mỗi số lẻ có thể lặp lại. Vậy số cách phân tích n thành tổng các số nguyên dương lẻ chính là hệ số của x^n trong khai triển của F(x)
Tương tự ta xét hàm sinh:
$$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$$
Số mũ của các số hạng trong khai triển thành tổng của G(x) có dạng $i_1 + i_2 + i_3 + \cdots$ với $i_1, i_2, i_3, \dots$ là các số nguyên dương đôi một phân biệt. Như vậy hệ số của x^n chính là số cách phân tích n thành tổng của các số nguyên dương phân biệt.
Vậy ta chỉ cần chứng minh : F(x) = G(x).
Thật vậy:
$$F(x) = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots = \prod_{k\ge 0}\frac{1}{1-x^{2k+1}}$$
$$G(x) = \prod_{k\ge 1}(1+x^k) = \prod_{k\ge 1}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \prod_{k\ge 0}\frac{1}{1-x^{2k+1}}$$
Vậy F(x) = G(x) (đpcm)

Bài 8: Giả sử với mỗi số tự nhiên n có hai dãy số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ sao cho dãy tổng $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n$ là một hoán vị của dãy các tổng
$b_1 + b_2, b_1 + b_3, \dots, b_{n-1} + b_n$
Chứng minh rằng n là lũy thừa của 2
Lời giải:
Xét các hàm sinh
$$F(x) = \sum_{a_i \in A} x^{a_i}, \quad G(x) = \sum_{b_i \in B} x^{b_i}$$
Ta có:
$$[F(x)]^2 = \sum_{a_i\in A} x^{2a_i} + \sum_{a_i,a_j\in A} x^{a_i+a_j} = F(x^2) + \sum_{a_i,a_j\in A} x^{a_i+a_j}$$
$$[G(x)]^2 = \sum_{b_i\in B} x^{2b_i} + \sum_{b_i,b_j\in B} x^{b_i+b_j} = G(x^2) + \sum_{b_i,b_j\in B} x^{b_i+b_j}$$
$$\Rightarrow [F(x)]^2 - [G(x)]^2 = F(x^2) - G(x^2)$$

Vì $F(1) = G(1) = n$ do đó 1 là nghiệm của $F(x) - G(x)$ suy ra

$$F(x) - G(x) = (x-1)^k H(x),\ k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow F(x) + G(x) = \frac{F^2(x) - G^2(x)}{F(x) - G(x)} = \frac{F(x^2) - G(x^2)}{F(x) - G(x)} = \frac{(x^2-1)^k H(x^2)}{(x-1)^k H(x)} = (x+1)^k \frac{H(x^2)}{H(x)}$$

Chọn x = 1 ta nhận được :

$$2n = F(1) + G(1) = (1+1)^k \frac{H(1^2)}{H(1)} = 2^k$$

$$\Rightarrow n = 2^{k-1}$$

<u>Bài 9</u>: Tìm số các hoán vị không có điểm cố định của tập hợp {1, 2, . . . , n}

Lời giải.

Gọi số các hoán vị với đúng k điểm cố định cho trước là D_{n-k} suy ra tổng số các hoán vị với đúng k điểm cố định là $C_n^k D_{n-k}$. Vì tổng số hoán vị là n! nên ta có:

$$n! = \sum_k C_n^k D_{n-k} \Leftrightarrow \sum_k \frac{D_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1 \Leftrightarrow \sum_k \frac{H_{n-k}}{k!} = 1;\ \ H_{n-k} = \frac{D_{n-k}}{(n-k)!}$$

Áp dụng tính chất nhân hai hàm sinh ta có

$$e^x H(x) = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow H(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_k x^k \sum_m \frac{(-1)^m}{m!} x^m$$

Vậy ta có : $\dfrac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \Rightarrow D_n = n!\left[\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{n!}\right]$

Số hoán vị cần tìm là $D_n = n!\left[\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{n!}\right]$

<u>Bài 10</u>: (Chọn dự tuyển Việt Nam 2008)

Cho M là tập hợp của 2008 số nguyên dương đầu tiên , mỗi số đó được tô bởi một trong 3 màu : xanh , đỏ và vàng , và mỗi màu thì được tô ít nhất một số , xét 2 tập :

$S_1 = \{$ (x, y, z) thuộc M^3 mà x, y, z tô cùng màu , $x + y + z \equiv 0 \pmod{2008}$ $\}$

$S_2 = \{$ (x, y, z) thuộc M^3 mà x, y, z tô cùng màu , $x + y + z \equiv 0 \pmod{2008}$ $\}$

Chứng minh rằng : $2|S_1| > |S_2|$

Lời giải:

Gọi A, B, C là 3 tập hợp tương ứng gồm các số màu xanh, đỏ, vàng

Xét các hàm sinh:

$$F(x) = \sum_{a\in A} x^a, G(x) = \sum_{b\in B} x^b, H(x) = \sum_{c\in C} x^c$$

$$I(x) = F^3(x) + G^3(x) + H^3(x) = \sum_{a_i\in A} x^{a_1+a_2+a_3} + \sum_{b_i\in B} x^{b_1+b_2+b_3} + \sum_{c_i\in C} x^{c_1+c_2+c_3} = \sum_n f_n x^n$$

Trong đó f_n chính là số bộ (x, y, z) có cùng một màu và có tổng là n

Gọi ε là nghiệm của phương trình $x^{2008} - 1 = 0$.

Theo định lý RUF ta có

$$\frac{1}{2008}\sum_k I(\varepsilon^k) = f_0 + f_{2008} + f_{2.2008} + f_{3.2008} = |S_1|$$

Vậy $|S_1| = \dfrac{1}{2008}\sum_k I(\varepsilon^k) = \dfrac{1}{2008}\sum_k \left[F^3(\varepsilon^k) + G^3(\varepsilon^k) + H^3(\varepsilon^k)\right]$

Lý luận tương tự ta có :

$$|S_2| = \frac{6}{2008}\sum_k F(\varepsilon^k)G(\varepsilon^k)H(\varepsilon^k) = \frac{2}{2008}\sum_k 3.F(\varepsilon^k)G(\varepsilon^k)H(\varepsilon^k)$$

Với $k \neq 0$ ta có $F(\varepsilon^k) + G(\varepsilon^k) + H(\varepsilon^k) = 0$

do đó : $F^3(\varepsilon^k) + G^3(\varepsilon^k) + H^3(\varepsilon^k) = 3F(\varepsilon^k)G(\varepsilon^k)H(\varepsilon^k)$

vậy ta chỉ cần chứng minh $F^3(1) + G^3(1) + H^3(1) > 3F(1)G(1)H(1)$

Thật vậy ta luôn có $F^3(1)+G^3(1)+H^3(1)\ge 3F(1)G(1)H(1)$ (BĐT Cauchy), dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi F(1) = G(1) = H(1), suy ra 3F(1) = 2008 điều này vô lý vì 2008 không chia hết cho 3. (Đpcm).

C. Bài tập tương tự:

Bài 1: Tính tổng sau: $\sum_{k\ge 0} C_{2n+1}^{2p+2k+1}C_{p+k}^{k}$

Bài 2: Chứng minh rằng: $\sum_{k} C_n^k C_m^{t-k} = C_{m+n}^t$

Từ đó tính tổng $\sum_k (C_n^k)^2$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\sum_k C_{2n+1}^{2k}C_{2n}^{m+k} = C_{2m+1}^{2n}$

Bài 4: Chứng minh rằng với mọi n > 0 ta có:

$$x\sum_k C_{n+k}^{2k}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{n-k} = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}$$

Bài 5: Tính tổng sau:

$$\sum_k \frac{1}{k+1}C_{2k}^k \frac{1}{n-k+1}C_{2n-2k}^{n-k}$$

Bài 6:

Cho T là tập các số nguyên không âm.

a. Kí hiệu f(n, k, T) là số các tập con sắp thứ tự của T gồm k phần tử mà có tổng là n(các phần tử có thể trùng nhau).

Xác định $\sum_n f(n,k,T)x^n$

b. Kí hiệu g(n, k, T) là số các tập con sắp thứ tự của T gồm k phần tử phân biệt mà có tổng là n.

Xác định $\sum_n g(n,k,T)x^n$

Bài 7: Chứng minh rằng có duy nhất cách phân chia tập số tự nhiên thành hai tập hợp A và B sao cho : với mỗi số nguyên không âm n thì số cách phân tích n thành dạng

$a_1+a_2, a_1\ne a_2\ge 1, a_1\in A, a_2\in A$ bằng số cách phân tích n thành tổng

$b_1+b_2, b_1\ne b_2, b_1\in B, b_2\in B$

Bài 8: Xác định dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{2n} = f_n \\ f_{2n+1} = f_n + f_{n+1} \end{cases}$

Bài 9: Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương n nguyên tố cùng nhau với p. Tìm số các bộ $\left(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}\right)$ gồm p – 1 số tự nhiên sao cho tổng $x_1+2x_2+\ldots(p-1)x_{p-1}$ chia hết cho p, trong đó các số $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ đều không lớn hơn n – 1

Bài 10: Cho hai số nguyên dương m và n, trong đó n + 2 chia hết cho m. Tìm số các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn điều kiện x + y + z chia hết cho m trong đó x, y , z đều bé hơn hoặc bằng n

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- **Generating functionology - Herbert S. Wilf. Department of Mathematics University of Pennsylvania.**

♥**Chuyên đề chọn lọc tổ hợp và toán rời rạc. Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Vũ Đình Hòa, Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng, Nhà xuất bản giáo dục 2008.**

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

Trần Xuân Đáng
(THPT chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định)

Trong các kỳ thi Olympic toán Quốc gia và Quốc tế chúng ta thường gặp các bài toán về phương trình nghiệm nguyên. Các định nghĩa và định lý sau thường được sử dụng trong việc tìm lời giải cho các bài toán tìm nghiệm nguyên của một phương trình.

1) Định lý nhỏ Phecma: Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p thì $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p)

2) Số chính phương (modn)

a) Định nghĩa: Cho số nguyên dương n ≥ 2. Số nguyên a được gọi là số chính phương (modn) nếu tồn tại $x \in N$ sao cho $x^2 \equiv a$ (modn)

b) Định lý 1: Cho số nguyên tố p.

i) Nếu p = 2 thì mọi số lẻ a đều là số chính phương (mod 2)

ii) Nếu p > 2 thì a là số chính phương (mod p) $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$

a là số không chính phương (mod p) $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$

c) Ký hiệu Lơgiăngđrơ: Cho số nguyên tố lẻ p; a là số nguyên không chia hết cho p. Ký hiệu $\left(\frac{a}{p}\right)$ được định nghĩa như sau:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{nếu a là số chính phương (mod p)} \\ -1 & \text{nếu a là số không chính phương (mod p)} \end{cases}$$

d) Định lý 2: Cho số nguyên tố p và số nguyên a không chia hết cho p. Khi đó:

+) $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p$

+) Nếu a ≡ b (mod p) (a, b ∈ Z; (a, p) = (b, p) = 1) thì $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

+) $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$ (a, b $\in$ Z; (a, p) = (b, p) = 1)

+) $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$ +) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ +) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

e) Luật tương hỗ Gauss:

Nếu p, q là các số nguyên tố lẻ và $p \neq q$ thì $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$

Tiếp theo là một số bài toán về phương trình nghiệm nguyên với lời giải của chúng:

Bài toán 1: Tìm tất cả các bộ 3 số nguyên dương (a, b, c) sao cho: $a^2 + 2^{b+1} = 3^c$

(Đề thi Olympic Toán của Italia năm 2008)

Lời giải: Giả sử (a, b, c) là bộ 3 số nguyên dương sao cho $a^2 + 2^{b+1} = 3^c$

$\Rightarrow$ c chẵn (vì $2^{b+1} \vdots 4$; $a^2 \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $a^2 \equiv 1 \pmod 4$)

$\Rightarrow c = 2d$ ($d \in N^*$) $\Rightarrow 2^{b+1} = (3^d - a)(3^d + a)$

$\Rightarrow 3^d - a = 2^m$; $3^d + a = 2^n$ (m, n $\in$ N, m < n)

$\Rightarrow 2 . 3^d = 2^n + 2^m = 2^m (2^{n-m} + 1) \Rightarrow m = 1 \Rightarrow 3^d = 2^{n-1} + 1$

Nếu $n - 1 = 1 \Rightarrow d = 1$, $n = 2 \Rightarrow c = 2, a = 1, b = 2$

Nếu $n - 1 \geq 2 \Rightarrow 2^{n-1} \vdots 4 \Rightarrow$ d chẵn $\Rightarrow d = 2k$ ($k \in N^*$)

$\Rightarrow 2^{n-1} = (3^k - 1)(3^k + 1) \Rightarrow 3^k - 1 = 2^t$, $3^k + 1 = 2^s$ (t, s $\in$ N*; t < s)

$\Rightarrow 2 . 3^k = 2^t + 2^s = 2^t (2^{s-t} + 1) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow k = 1, s = 2$

$\Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow c = 4, n = 4, a = 7, b = 4$

Vậy (a, b, c) = (1, 2, 2) hoặc (a, b, c) = (7, 4, 4)

Bài toán 2: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $3^x + 4^y = 7^z$

Lời giải: Giả sử x, y, z là các số nguyên dương sao cho $3^x + 4^y = 7^z$

Trường hợp 1: $y \geq 2 \Rightarrow z > 1$

Giả sử $3^x \equiv r \pmod{16}$ ($0 \leq r \leq 15$, r $\in$ N) $\Rightarrow r \in \{1, 3, 9, 11\}$

Nếu z = 2k + 1 (k $\in$ N*) thì $7^z \equiv 7 \pmod{16} \Rightarrow z = 2k$ ($k \in N^*$)

$\Rightarrow (7^k - 2^y)(7^k + 2^y) = 3^x \Rightarrow 7^k - 2^y = 3^a$; $7^k + 2^y = 3^b$ (a, b $\in$ N; a < b)

$\Rightarrow 2^{y+1} = 3^b - 3^a = 3^a (3^{b-a} - 1) \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 7^k = 2^y + 1$

Ta có $2^y \vdots 4 \Rightarrow$ k chẵn $\Rightarrow k = 2m$ ($m \in N^*$) $\Rightarrow 2^y = (7^m - 1)(7^m + 1)$

Ta có $7^m - 1 \vdots 3$, 2^y không chia hết cho 3. Đó là điều vô lý

Trường hợp 2: $y = 1 \Rightarrow 3^x + 4 = 7^z$. Nếu $x = 1 \Rightarrow z = 1$.

Giả sử $x > 1 \Rightarrow z > 1$. Ta có $3^x - 3 = 7^z - 7 \Rightarrow 3(3^{x-1} - 1) = 7(7^{z-1} - 1)$

$\Rightarrow 3^{x-1} - 1 \vdots 7 \Rightarrow x - 1 = 6k$ ($k \in N^*$)

$\Rightarrow 3(3^{6k} - 1) = 7(7^{z-1} - 1) \Rightarrow 7^{z-1} -1 \vdots 13$

$\Rightarrow z - 1 = 12m\ (m \in N^*) \Rightarrow 7(7^{z-1} - 1) = 7\ (7^{12m} - 1)\ \vdots\ 9$

Mặt khác $3(3^{6k} - 1)$ không chia hết cho 9. Đó là điều vô lý.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm nguyên dương duy nhất

$(x, y, z) = (1, 1, 1)$

<u>Bài toán 3</u>: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $7^x + 12^y = 13^z$

(Đề thi Olympic Toán của Serbia năm 2008)

<u>Lời giải</u>: Giả sử x, y, z là các số nguyên dương sao cho: $7^x + 12^y = 13^z$

Đặt $d = 7^x + 12^y$, $g = 13^z$

Nếu y = 1 thì $d \equiv 5 \pmod 7$, $g \equiv (-1)^z \pmod 7$. Đó là điều vô lý.

Nếu $y \geq 2$ thì $12^y\ \vdots\ 12^2\ \vdots\ 8 \Rightarrow d \equiv (-1)^x \pmod 8$.

Với $k \in N$ ta có $5^{2k} \equiv 1 \pmod 8$, $5^{2k+1} \equiv 5 \pmod 8 \Rightarrow$ z và x chẵn

$\Rightarrow g \equiv (-1)^z \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 5^y \equiv 1 \pmod 7$

Ta có $5^6 \equiv 1 \pmod 7$ và $5^t \not\equiv 1 \pmod 7$ với $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\Rightarrow y\ \vdots\ 6 \Rightarrow$ x, y, z đều chẵn. Giả sử $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$ $(a, b, c \in N^*)$

$\Rightarrow (7^a)^2 + (12^b)^2 = (13^c)^2$

Vì $(7^a, 12^b) = 1 \Rightarrow \exists$ các số nguyên dương m, n $(m > n, (m, n) = 1)$ sao cho $7^a = m^2 - n^2$, $12^b = 2mn$, $13^c = m^2 + n^2$.

Ta có $2^{2b} . 3^b = 12^b = 2mn$

<u>Trường hợp 1</u>: $n = 1$, $m = 2^{2b-1} . 3^b$

$(m - 1)(m + 1) = 7^a \Rightarrow m + 1\ \vdots\ 7$, $m - 1\ \vdots\ 7 \Rightarrow 2\ \vdots\ 7$. Đó là điều vô lý.

<u>Trường hợp 2</u>: $\{m, n\} = \{2^{2b-1}; 3^b\}$

Ta có $|m^2 - n^2| = |2^{4b-2} - 3^{2b}| \equiv |(2^4)^{b-1} . 2^2 - 2^b| \equiv |2^{b-1} . 2^2 - 2^b| \equiv 2^b \pmod 7$

$\Rightarrow m^2 - n^2$ không chia hết cho 7. Đó là điều vô lý vì $m^2 - n^2 = 7^a$ $(a \in N^*)$.

Vậy phương trình $7^x + 12^y = 13^z$ không có nghiệm nguyên dương.

<u>Bài toán 4</u>: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, n) thoả mãn $x^3 + 2x + 1 = 2^n$

(Đề thi Olympic Toán của Serbia năm 2007)

<u>Lời giải</u>: Giả sử x, n là các số nguyên dương sao cho $x^3 + 2x + 1 = 2^n$ (1)

Nếu $n \leq 2$ thì n = 2 và x = 1. Giả sử $n \geq 3$; Từ (1) $\Rightarrow$ x lẻ

Từ (1) $\Rightarrow x(x^2 + 2) = 2^n - 1$. Vì $x(x^2 + 2)\ \vdots\ 3$ nên n chẵn.

Từ (1) $\Rightarrow x^3 + 2x + 3 = 2^n + 2 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - x + 3) = 2^n + 2$

Giả sử p là một ước nguyên tố của $x^2 - x + 3 \Rightarrow$ p lẻ và -2 là số chính phương (mod p)

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

$\Rightarrow$ p có dạng $8m + 1$ hoặc $8m + 3$ $(m \in N)$

Ta có $x^3 + 2x + 1 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow x \equiv 5 \pmod 8 \Rightarrow x^2 - x + 3 \equiv 7 \pmod 8$

Đó là điều vô lý.

Vậy chỉ có một cặp số nguyên dương (x, n) duy nhất thoả mãn đề bài là (x, n) = (1, 2)

Bài toán 5: Chứng minh tồn tại vô số cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $\dfrac{m+1}{n} + \dfrac{n+1}{m}$ là một số nguyên dương.

(Đề thi Olympic Toán của Anh năm 2007)

Lời giải: Ta chứng minh rằng phương trình $\dfrac{x+1}{y} + \dfrac{y+1}{x} = 4$ (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow x^2 + (1 - 4y)x + y^2 + y = 0$ (2)

$(x_1 = 1, y_1 = 1)$ là một nghiệm nguyên dương của (2)

Xét dãy (t_k) $(k \geq 1)$ sao cho $t_1 = t_2 = 1$, $t_{k+2} = 4t_{k+1} - t_k - 1$ $(k \geq 1)$

Dễ dàng chứng minh được $t_{k+1} > t_k > 0$, $\forall\ k \geq 2$. Ta có (t_1, t_2) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2). Giả sử (t_k, t_{k+1}) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2) tức là $t_k^2 + (1 - 4t_{k+1})\, t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0$.

Xét $t_{k+2}^2 + (1 - 4t_{k+1})\, t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} - [\, t_k^2 + (1 - 4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1}] =$

$= t_{k+2}^2 - t_k^2 + (1 - 4t_{k+1})(t_{k+2} - t_k) = (t_{k+2} - t_k)(t_{k+2} + t_k + 1 - 4t_{k+1}) = 0$

$\Rightarrow t_{k+2}^2 + (1 - 4t_{k+1})\, t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0$

$\Rightarrow (x, y) = (t_{k+1}, t_{k+2})$ cũng là nghiệm nguyên dương của phương trình (2)

Vì $t_{k+1} > t_k$ $\forall\ k \geq 2$ nên phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Vậy tồn tại vô số cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $\dfrac{m+1}{n} + \dfrac{n+1}{m}$ là một số nguyên dương.

Bài toán 6: Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên dương n sao cho $n^7 + 7$ là bình phương của một số nguyên dương.

(Đề chọn đội tuyển Mỹ thi IMO năm 2008)

Lời giải: Giả sử $n^7 + 7 = a^2$ $(a \in \mathbb{N}^*)$

Khi đó $n^7 + 128 = a^2 + 121$

$\Rightarrow a^2 + 121 = (n + 2)(n^6 - 2n^5 + 4n^4 - 8n^3 + 16n^2 - 32n + 64)$

Nếu n chẵn $\Rightarrow a^2 \equiv 7 \pmod 8$. Đó là điều vô lý. Vậy n lẻ $\Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 4$

Đặt $b = n^6 - 2n^5 + 4n^4 - 8n^3 + 16n^2 - 32n + 64$ thì b lẻ và

$b \equiv n^6 - 2n^5 + n^4 - n^4 \equiv n^4 (n - 1)^2 - n^4 \pmod 4$

Vì $n^4 \equiv 1 \pmod 4$ và n - 1 chẵn $\Rightarrow (n - 1)^2 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow b \equiv -1 \pmod 4$

$\Rightarrow$ b có ước nguyên tố dạng 4k + 3 (k $\in$ N). Giả sử p là ước nguyên tố dạng 4k + 3 (k $\in$ N) của b $\Rightarrow a^2 + 121 \vdots p \Rightarrow p = 11$ và $a \vdots p \Rightarrow a = 11q$ ($q \in N^*$) và b□11. Nếu n + 2 □11 thì $b \equiv 7.8^2$ (mod 11). Đó là điều vô lý.

Vậy n + 2 không chia hết cho 11. Mặt khác $a^2 + 121$□121 $\Rightarrow$ b□121

$\Rightarrow$ b = 121. r ($r \in N^*$, r lẻ).

Ta có $a^2 + 121 = 121(q^2 + 1) = (n + 2)b = 121r(n + 2) \Rightarrow r(n + 2) = q^2 + 1$

$\Rightarrow$ r không có ước nguyên tố dạng 4t + 3 ($t \in N$) $\Rightarrow b \equiv 1$ (mod 4). Đó là điều vô lý.

Vậy không tồn tại số nguyên dương n sao cho $n^7 + 7$ là bình phương của một số nguyên dương.

Bài toán 7: Tìm tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình

$12^x + y^4 = 2008^z$ *(Đề thi Olympic Toán của Serbia năm 2008)*

Lời giải 1: Giả sử x, y, z là các số nguyên không âm sao cho $12^x + y^4 = 2008^z$

$z = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$

Nếu $z > 0 \Rightarrow 2008^z$ □2008. Ta có $2008 = 251.\ 2^3$

Giả sử x chẵn $\Rightarrow x = 2x_1$ ($x_1 \in N^*$) $\Rightarrow (12^{x_1})^2 \equiv -y^4$ (mod 251)

$\Rightarrow 1 \equiv (12^{x_1})^{250} \equiv -(y^2)^{250} \equiv -1$ (mod 251). Đó là điều vô lý.

Giả sử x lẻ. Hiển nhiên y chẵn $\Rightarrow y = 2^u y_1$ ($y_1 \in N^*$, y_1 lẻ, $u \in N^*$)

$\Rightarrow 2^{2x}3^x + 2^{4u}\ y_1^4 = 2^{3z}\ 251^z$

Ta có $2x \neq 4u$ (vì x lẻ) $\Rightarrow 3z = 2x$ hoặc $3z = 4u$

Trường hợp 1: $3z = 2x < 4u \Rightarrow$ z □2 và $3^x + 2^{4u-2x}\ y_1^4 = 251^z$

Vế trái có dạng 4k + 3 (k $\in$ N) (vì x lẻ), vế phải có dạng 4m + 1(m$\in$ N). Đó là điều vô lý.

Trường hợp 2: $3z = 4u < 2x \Rightarrow$ z □2. Ta có $2^{2x - 4u}\ .\ 3^x + y_1^4 = 251^z$

Vế phải có dạng 5k + 1 (k $\in$ N).

Nếu y_1 không chia hết cho 5 $\Rightarrow y_1^4 \equiv 1$ (mod 5)

$\Rightarrow 2^{2x - 4u}\,3^x \equiv 0$ (mod 5). Đó là điều vô lý.

Nếu y_1 □5 $\Rightarrow 1 \equiv 2^{2x - 4u}\,3^x \equiv -3^x \equiv \pm 3$ (mod 5) (vì x lẻ). Đó là điều vô lý.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm nguyên không âm duy nhất là

$x = y = z = 0$

Lời giải 2: Giả sử $z > 0 \Rightarrow y > 0$. Với x chẵn vế trái có dạng $a^2 + b^2$, với x lẻ vế trái có dạng $a^2 + 3b^2$, trong đó a, b là các số nguyên dương không chia hết cho 251. Tuy nhiên -1 và -3 không là số chính phương (mod 251). Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên không âm thoả mãn $z > 0$.

Cuối cùng là một số bài toán dành cho bạn đọc:

Bài toán 8: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $3^x + 4^y = 5^z$

Bài toán 9: Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 5 = y^3$ không có nghiệm nguyên

(Đề thi Olympic Toán của Ba Lan năm 2007)

Bài toán 10: Chứng minh rằng phương trình $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = 3$ có vô số nghiệm nguyên dương.

Bài toán 11: Cho số nguyên dương m. Tìm tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình $x^2 + y^2 = m^2 (xy + 1)$.

(Đề thi Olympic Toán của Canađa năm 1998)

Bài toán 12: Cho số nguyên tố p. Chứng minh rằng số $3^p + 7p - 4$ không là bình phương của một số nguyên.

Bài toán 13: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế năm 2006)

Bài toán 14:

Cho hai số nguyên dương (a, b) sao cho $(4a^2 - 1)^2$ chia hết cho $(4ab - 1)$. Chứng minh rằng a = b.

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế năm 2007)

Bài toán 15: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^3 - 1$ là bình phương của một số nguyên.

Bài toán 16: Tìm tất cả các số nguyên a để tồn tại các số nguyên dương phân biệt x, y sao cho $(ax^2 + 1)^2$ chia hết cho $axy + 1$.

Bài toán 17: Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng số $2^n + 1$ không có ước nguyên tố dạng 8k - 1 với k là số nguyên dương.

(Đề chọn đội tuyển Việt Nam thi IMO năm 2003)

Bài toán 18: Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p, q) sao cho $2p^q - q^p = 7$.

PHƯƠNG PHÁP GIEN

giải phương trình nghiệm nguyên.

Thạc sĩ **: Đặng Kim Long**

Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định

Phương trình nghiệm nguyên (hay còn gọi là phương trình Diophant) là một trong những dạng toán xuất hiện sớm nhất trong toán học. Nhiều nhà toán học nổi tiếng trên thế giới như Ơclit, Diophantus, Fibonacci, Fermat, Euler, Lebesgue, ... đã nghiên cứu dạng toán này và để lại nhiều kết quả thú vị.

Trong các bài thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế vẫn thường có các bài toán về phương trình nghiệm nguyên, và đó là những bài toán khó vì tính không mẫu mực của nó. Bài viết này giới thiệu một phương pháp đại số, gọi là phương pháp gien, có thể áp dụng khi giải một số phương trình nghiệm nguyên.

Nếu từ một nghiệm của phương trình đã cho ta có quy tắc để xây dựng ra một nghiệm mới thì quy tắc đó gọi là gien.

Phương pháp gien là phương pháp dựa vào gien để tìm tất cả các nghiệm của phương trình đã cho từ các nghiệm cơ sở của nó. Chẳng hạn với phương trình Pell:

$x^2 - Dy^2 = 1$

trong đó D là số nguyên dương không chính phương, nếu biết (x_0, y_0) là

nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của nó thì mọi nghiệm (x_n , y_n) của phương trình đều tìm được theo công thức:

$$x_n = \frac{(x_0 + y_0\sqrt{D})^n + (x_0 - y_0\sqrt{D})^n}{2}$$

$$y_n = \frac{(x_0 + y_0\sqrt{D})^n - (x_0 - y_0\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}}$$

Sau đây, ta xét ứng dụng của phương pháp gien vào phương trình Markov cổ điển, đó là phương trình có dạng:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = kx_1x_2x_n \qquad (1)$$

trong đó k, n là các tham số nguyên dương, x_i là các ẩn nhận giá trị nguyên($i = \overline{1, n}$)

Ta nhận thấy nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên thì nó sẽ có rất nhiều nghiệm nguyên.

Thật vậy nếu phương trình (1) có nghiệm là: $(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(x_i \in z)$

Thì: $x_1^2 - k(x_2x_3...x_n).x_1 + (x_2^2 + ... + x_n^2) = 0$

Xét phương trình bậc hai: $x^2 - k(x_2x_3...x_n)x + (x_2^2 + ...x_n^2) = 0$ (2)

Thì phương trình (2) có nghiệm $x = x_1$, dó đó phải có nghiệm $x = x_1'$

Theo định lý Viet có: $\begin{cases} x_1 + x_1' = kx_2x_3...x_n \\ x_1.x_1' = x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2 \end{cases}$

Vì $k \in \mathbf{N}^*$, $x_i \in z$ nên từ hệ trên suy ra x_1' nguyên.

Nếu có thêm diều kiện x_i nguyên dương thì từ hệ trên suy ra x_1' nguyên dương.

Nếu lại có thêm điều kiện $x_1 < x_2 <... < x_n$, $x_i \in N^*$ thì từ hệ trên suy ra

$x_1' > x_1$, ta được nghiệm mới $(x_1', x_2, ..., x_n)$ của phương trình (1) "lớn hơn" nghiệm cũ $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Nội dung như trên cũng được áp dụng cho các phương trình dạng tương tự, chẳng hạn cho phương trình dạng:

$$(x + y + z)^2 = kxyz$$

Sau đây là một số ví dụ áp dụng của phương pháp gien

Ví dụ 1: (**Bài thi học sinh giỏi quốc gia THPT năm học 2001-2002 bảng A**)

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình

$$x + y + u + v = n\sqrt{xyuv}$$

có nghiệm nguyên dương x,y,u,v.

Giải:

Với $\mathbf{x,y,u,v} \in \mathbf{N}^*$ thì phương trình đã cho tương đương với:

$$\mathbf{(x+y+u+v)^2 = n^2.xyuv}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x(y+u+v) + (y+u+v)^2 = n^2.xyuv$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left[2(y+u+v) - n^2yuv\right].x + (y+u+v)^2 = 0 \qquad (3)$$

Điều kiện cần:

Giả sử n là số nguyên dương sao cho phương trình (3) có nghiệm nguyên dương x,y,u,v .Gọi (x_0,y_0,u_0,v_0) là nghiệm nguyên dương của (3) mà tổng các thành phần nghiệm có giá trị nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát có thể giả thiết $\mathbf{x_0 \ge y_0 \ge u_0 \ge v_0}$

Ta có: $\mathbf{x_0^2 + \left[2(y_0+u_0+v_0) - n^2y_0u_0v_0\right].x_0 + (y_0+u_0+v_0)^2 = 0}$

Do đó phương trình bậc hai:

f(x) = $\mathbf{x^2 + \left[2(y_0+u_0+v_0) - n^2y_0u_0v_0\right].x + (y_0+u_0+v_0)^2 = 0}$

Có nghiệm: x = x_0, suy ra phương trình này phải có nghiệm x = x_1 và theo định lý Viét:

$$\begin{cases} \mathbf{x_1 + x_0 = -2(y_0+u_0+v_0) + n^2y_0u_0v_0} \\ \mathbf{x_1.x_0 = (y_0+u_0+v_0)^2} \end{cases}$$

Do n , x_0 , y_0 , u_0 , v_0 là các số nguyên dương nên từ hệ trên suy ra x_1 nguyên dương.

Vì (x_1 , y_0, u_0 ,v_0) thoả mãn (3) nên đó là nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

Từ giả thiết (x_0 , y_0, u_0 ,v_0) là nghiệm nguyên dương "nhỏ nhất", ta suy ra $\mathbf{x_1 \ge x_0}$. Do đó $\mathbf{x_1 \ge x_0 \ge y_0 \ge u_0 \ge v_0}$.

Tam thức bậc hai f(x) có nghiệm thoả mãn $\mathbf{x_1 \ge x_0 \ge y_0} \quad \Rightarrow \mathbf{f(y_0) \ge 0}$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y_0^2 + 2(y_0+u_0+v_0)y_0 - ny_0^2u_0v_0 + (y_0+u_0+v_0)^2 \ge 0}$$
$$\Rightarrow \mathbf{ny_0^2u_0v_0 \le y_0^2 + 2(y_0+u_0+v_0)y_0 + (y_0+u_0+v_0)^2 \le 16y_0^2}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{nu_0v_0 \le 16}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{n \le nu_0v_0 \le 16} \qquad \text{vậy } n \in \{\mathbf{1,2,3,4}\}$$

Điều kiện đủ:

Với n = 1 phương trình x + y + u + v = $\sqrt{\mathbf{xyuv}}$ có nghiệm (4,4,4,4)

Với n = 2 phương trình x + y + u + v = 2$\sqrt{\mathbf{xyuv}}$ có nghiệm (2,2,2,2)

Với n = 3 phương trình x + y + u + v = 3$\sqrt{\mathbf{xyuv}}$ có nghiệm (1,1,2,2)

Với n = 4 phương trình x + y + u + v = 4$\sqrt{\mathbf{xyuv}}$ có nghiệm (1,1,1,1)

Kết luận: Các giá trị cần tìm là n $\in \{\mathbf{1,2,3,4}\}$

Ví dụ 2: (**Đề thi vô địch quốc tế 1988**)

Cho a, b là 2 số nguyên dương sao cho ab + 1 chia hết $a^2 + b^2$

CMR: $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ là số chính phương

Giải: Đặt p = $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ từ giả thiết suy ra p là số nguyên dương. Ta có

$a^2 + b^2 - pab - p = 0$.

Chứng tỏ cặp (a,b) là nghiệm nguyên dương của phương trình

$x^2 + y^2 - pxy - p = 0$ (4)

Ta chứng minh: phương trình (4) với tham số p nguyên dương sẽ có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi p là số chính phương.

Điều kiện cần: Giả sử phương trình (4) có nghiệm nguyên dương.

Gọi (x_0 , y_0) là nghiệm nguyên dương sao cho $x_0 + y_0$ nhỏ nhất, không mất tính tổng quát có thể giả thiết $x_0 \geq y_0$

Ta có: $x_0^2 + y_0^2 - px_0y_0 - p = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - py_0x_0 + y_0^2 - p = 0$

Xét phương trình: $\Leftrightarrow x^2 - py_0x + y_0^2 - p = 0$ thì phương trình có nghiệm

$x = x_0$. Mà đó là phương trình bậc hai, nên cũng có nghiệm $x = x_1$. Theo định lý Viét có: $\begin{cases} x_0 + x_1 = py_0 \\ x_0x_1 = y_0^2 - p \end{cases}$

suy ra $x_1 = py_0 - x_0$ nên x_1 là số nguyên

Ta có: $(x_1 + 1)(x_0 + 1) = x_1x_0 + (x_1 + x_0) + 1 =$

$$= y_0^2 - p + py_0 + 1 = y_0^2 + p(y_0 - 1) + 1 \rangle 0 \quad (\text{vì } p > 0,\ y_0 \geq 1)$$

suy ra $x_1 + 1 > 0 \Rightarrow x_1 > -1$ mà $x_1 \in \mathbf{Z}$ nên $x_1 \geq 0$

Nếu $x_1 > 0$ thì x_1 nguyên dương

Ta có $x_1^2 - py_0x_1 + y_0^2 - p = 0 \Rightarrow (x_1, y_0)$ là nghiệm nguyên dương của phương trình (4).

Từ giả thiết (x_0, y_0) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất ta suy ra $x_1 \geq x_0$

Mặt khác ta lại có: $x_1x_0 = y_0^2 - p \langle y_0^2 \leq y_0x_0 \quad \Rightarrow x_1 \langle y_0 \leq x_0$ mâu thuẫn

Vậy phải có $x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0^2 - p = 0 \to p = y_0^2$ tức p là số chính phương .

Điều kiện đủ:

Nếu p là số chính phương tức $p = k^2$ (k nguyên dương) ta dễ thấy phương trình (4) có nghiệm nguyên dương:

$\begin{cases} x = k \\ y = k^3 \end{cases}$

Kết luận: Phương trình (4) có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi p là số chính phương. Bài toán đã được chứng minh.

Ví dụ 3: (**Bài thi chọn đội tuyển toán quốc tế Việt Nam 2002**)

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $n \geq 2002$ và n số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$ là số chính phương.

<u>Giải:</u> Ta chứng minh tồn tại số nguyên dương $n \geq 2002$ và n số nguyên dương

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho :

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i - 2\right)^2 \quad \text{hay} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \prod_{i=1}^{n} a_i + 1 = 0 \qquad (1)$$

Ta lấy m số 1 và k số 2

$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$

$a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots a_{m+k} = 2$

Sao cho thoả mãn phương trình (1)

$m + 4k - 2^k + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2^k - 4k - 1$

Số các số lấy được là n = m + k. Chọn m , k đủ lớn thì $n \geq 2002$.

Cụ thể lấy $k = 11 \Rightarrow m = 2^{11} - 44 - 1 = 2003$

Như vậy ta được: n = m + k = 2014 số (n > 2002)

$a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ thoả mãn (1)

$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2003} = 1$

$a_{2004} = a_{2005} = \ldots = a_{2014} = 2$

Viết (1) dưới dạng $a_1^2 - \prod_{i=2}^{n} a_i . a_1 + \left(\sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 1\right) = 0$

Xét phương trình: $x^2 - \prod_{i=2}^{n} a_i . x + \left(\sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 1\right) = 0$

Thì phương trình có nghiệm $x = a_1$, do đó sẽ có nghiệm $x = a_1'$

Theo định lý Vi-ét: $\begin{cases} a_1 + a_1' = \prod_{i=2}^{n} a_i \\ a_1 . a_1' = \sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow a_1' = \prod_{i=2}^{n} a_i - a_1$

Do dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ xếp tăng dần nên $a_1' > a_n$ ta được các số

$a_1', a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn phương trình (1)

Đổi chỗ a_1' và a_n ta được dãy số mới xếp tăng dần, lại coi đó là dãy

$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ trong đó $a_n > a_{n-1}$. Làm lại quá trình trên n - 1 lần, cuối cùng ta được dãy số :

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ và thoả mãn phương trình (1)

Các số này thoả mãn $\prod_{i=1}^{n} a_i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ là số chính phương và n > 2002 (đpcm).

<u>Cuối cùng là một số bài tập để các bạn tự giải</u>

Bài 1:

Cho a, b là hai số nguyên dương thoả mãn :

ab chia hết $a^2 + b^2 + 1$.

CMR: $\dfrac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$ là số nguyên tố

Bài 2:

Tìm tất cả các giá trị nguyên dương m để phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 = mxyz$ có nghiệm nguyên dương

Bài 3:

Tìm tất cả các giá trị nguyên dương n để phương trình :

$x^2 + y^2 = nxy - n$ có nghiệm nguyên dương

Bài 4:

Tìm tất cả các giá trị nguyên dương n sao cho phương trình:

$(x + y + z)^2 = nxyz$ có nghiệm nguyên dương

Bài 5:

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) sao cho

$mn - 1$ chia hết $m^2 + n^2$

Bài 6:

Tồn tại hay không nghiệm của phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = xyzuv - 65$

Trong tập các số nguyên lớn hơn 2004.

Bài 7:

Chứng minh rằng phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 2xyzuv - 185$

Có nghiệm nguyên dương thoả mãn:

$x + 2y + 3z + 4u + 5v > 2^{2004}$

Bài 8:

Cho A là tập hợp hữu hạn các số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại tập hợp hữu hạn các số nguyên dương phân biệt B sao cho $A \subset B$ và

$$\prod_{x_i \in B} x_i = \sum_{x_i \in B} x_i^2$$

Nam Định, tháng 10 năm 2008

BẢN CHẤT HÌNH HỌC TRONG BIỂU HIỆN ĐẠI SỐ
CHUYÊN QUẢNG NINH

NỘI DUNG CỤ THỂ:

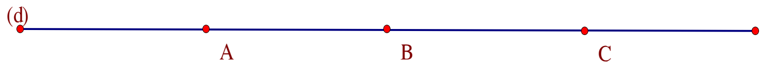
Gợi mở vấn đề như thế nào để tự nhiên hơn?

Đây là một câu hỏi thường trực cho bất kỳ một giáo viên nào khi chúng ta chuẩn bị một giờ giảng trong PP toạ độ dành cho học sinh lớp 10, chúng ta sẽ nhận được kết quả tốt hơn nếu ta nhận ra, làm rõ cái hồn hình học tiềm ẩn trong mỗi biểu hiện đại số.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví du I..1:

- *Trên một đường thẳng (d) cho ba điểm thẳng hàng theo thứ tự: A, B, C. Để mô tả vị trí tương đối của chúng một cách chính xác hơn ta cần ba thông tin:*



+) Các điểm A, B, C thẳng hàng;

+) Điểm B nằm giữa hai điểm A và C;

+) Khoảng cách $AC = a; BC = b$.

Mặc dầu vậy vị trí chính xác tuyệt đối của ba điểm trên đường thẳng (d) vẫn không xác định, đó chỉ là vị trí tương đối giữa chúng!

Bài toán sẽ được giải quyết một cách triệt để khi ta xây dựng đường thẳng (d) thành **trục**.

Và khi đó thay vì mô tả như trên ta chỉ cần nói đến toạ độ của chúng trên trục. Và sự tương ứng của mỗi điểm trên (d) với một số thực α được gọi toạ độ của nó, điều này mở ra con đường chinh phục các bài toán hình học bằng công cụ đại số sau này (thực chất đây là một phép nhúng).

* Một hình ảnh rất hay:

+) *Con Kiến bò (chất điểm chuyển động) trong phòng (mặt phẳng) hoặc con Ruồi (chất điểm chuyển động) bay trong phòng (không gian) để mô tả vị trí của nó ta phải nói thế nào (về mặt hình học)?*

Cả hai câu hỏi này đều được giải bởi các khái niệm **Mặt phẳng toạ độ** và **Không gian toạ độ** trong PP toạ độ mà quy trình suy luận là:

QUAN HỆ HÌNH HỌC $\Rightarrow$ QUAN HỆ VÉC TƠ $\Rightarrow$ QUAN HỆ TOẠ ĐỘ.

Ví du I.2:

- Trước hết ta xét một quan hệ hình học đơn giản trên trục số:

Ta có một trục gốc O là x'Ox : Ta có nếu một điểm $M(x)$ trên trục:

+) $x > 0$ thì M nằm bên phải điểm gốc O;

+) $x < 0$ thì M nằm bên trái điểm gốc O;

+) $x = 0$ thì M nằm chính tại điểm gốc O;

Tiến xa hơn một chút ta quan sát trên đường thẳng (AB) ta có điểm M khi đó tồn tại một số thực k sao cho: $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ và chú ý là:

+) nếu k >0 thì thuộc tia AB;

+) nếu k <0 thì M thuộc tia đối của tia AB;

+) nếu k =0 thì M trùng tại A.

Đặc biệt: $k \in [0,1]$ thì tương ứng với M thuộc đoạn AB

Tính chất thuộc của điểm M đối với đường thẳng AB là sự tồn tại hay không của số thực k thoả mãn: $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ hay trên mặt phẳng toạ độ: $\exists k : \begin{cases} x_M = x_a + k(x_b - x_a) \\ y_M = y_a + k(y_b - y_a) \end{cases}$?

- Việc giải toán đôi khi không chỉ diễn ra trên đường thẳng (AB) mà có thể còn vượt ra khỏi đường thẳng này vì vậy cần mở rộng hệ thức $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ trở thành:

Với mọi điểm I trong mặt phẳng hay kể cả không gian thì tồn tại cặp số $(p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \overrightarrow{IM} = p\overrightarrow{IA} + q\overrightarrow{IB}$ với $p+q=1$; đặc biệt $p,q \in [0,1]$ thì $M \in [AB]$.

Như vậy có thể nói mỗi biểu hiện về mặt Đại Số đều ẩn tàng trong đó một bản chất hình học tương ứng và ngược lại. Điều này khích lệ chúng ta tìm tòi cách biểu thị các bản chất hình học thông qua các hiển thị Đại số, mở đầu cho việc giải toán hình học bằng cách đại số hoá mà PP toạ độ chỉ là một cách thức. Về quan điểm thì mọi vật thể hình học đều được nhìn nhận dưới con mắt một tập hợp điểm chỉ có điều chúng được sắp xếp như thế nào mà thôi. Điều này dẫn đến khái niệm **PHƯƠNG TRÌNH** của các đường trong PP toạ độ. Đây là sự chuyển dẫn bài toán tập hợp điểm trong hình học sang Đại số. Tuy nhiên trong giới hạn CT PT thì các tập hợp điểm được xét chỉ là các đường:

Đường (L) trong mặt phẳng toạ độ được xét theo quan điểm tập hợp điểm:

$(L) = \{M(x,y) : f(x,y) = 0\}$ và hệ thức $f(x,y)=0$ được gọi là phương trình của đường (L) trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

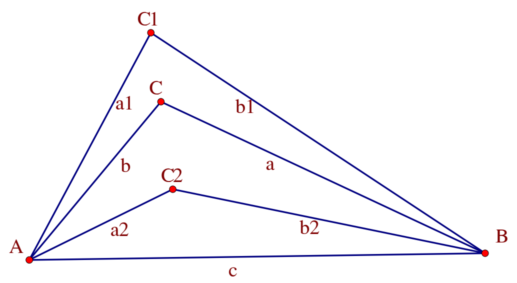
+) Nếu $f(x,y)=0 \Leftrightarrow Ax+By+C=0$ ta nhận được đường thẳng

+) Nếu $f(x,y)=0 \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \eta y + \mu = 0;$ ta có thể nhận được đường tròn hoặc Conic.

+) Nếu $f(x,y)=0 \Leftrightarrow y = f(x); x = g(y)$ ta nhận được các đồ thị hàm.

- Bây giờ ta xét một tam giác vuông ABC vuông tại C:

Ta quan sát hình ảnh hình học sau:



Nhận xét:

Rõ ràng ta có đồng thời : $\widehat{C_1} < \frac{\pi}{2} < \widehat{C_2}$ và: $a_1^2 + b_1^2 > c^2 > a_2^2 + b_2^2$

Vậy phải chăng tồn tại mối quan hệ giữa độ lớn góc $\widehat{ACB}$ với hiệu số: $H = a^2 + b^2 - c^2$.

Lời giải câu hỏi này là Định lý Cosin phát biểu cho tam giác:

Trong tam giác ABC ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Leftrightarrow \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Như vậy ta có: $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ thì góc $\widehat{C}$ nhọn;

$a^2 + b^2 - c^2 = 0$ thì góc $\widehat{C}$ vuông;

$a^2 + b^2 - c^2 < 0$ thì góc $\widehat{C}$ tù.

- Lời chứng minh được xuất phát từ tích vô hướng của hai véc tơ: $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB} = b.a.\cos C$.
- Tiếp đó ta cũng nhận được công thức tính độ dài đường trung tuyến xuất phát từ hệ thức véc tơ:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}.$$

- Vậy nếu CD là phân giác trong của tam giác CAB thì ta có hệ thức véc tơ:

$\overrightarrow{CD} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{CA} + \dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{CB}$ từ đây bình phương vô hướng hai vế ta nhận được công thức:

$CD = l_c = \dfrac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}cos\dfrac{C}{2}$. Trong đó $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi.

- Tam giác CAB xác định, một điểm M xác định trên đường thẳng (AB) ta luôn tính được độ dài CM theo cách tương tự.

- Điều này khiến ta liên hệ với kết quả quen thuộc trong đường tròn:

Cho một đường tròn (C) tâm O bán kính R khi đó ta có:

M ở trong đường tròn khi chỉ khi $MI - R < 0$;
M ở trên đường tròn khi chỉ khi $MI - R = 0$;
M ở ngoài đường tròn khi chỉ khi $MI - R > 0$.

Như vậy nếu một đường tròn (C) có phương trình: $f(x,y) = 0$ và một điểm $M(x_m, y_m)$.

$f(x_m, y_m) = MI^2 - R^2 = P\, M/(c)$ là phương tích của điểm M đối với đường tròn (C)

Trong đó I là tâm đường tròn và R là bán kính của nó; thế thì ta có:

$f(x_m, y_m) < 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trong đường tròn.

$f(x_m, y_m) > 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm ngoài đường tròn.

$f(x_m, y_m) = 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trên đường tròn.

Đặc biệt với hai đường tròn: $(C_1): f_1(x,y) = 0; (C_2): f_2(x,y) = 0;$ không đồng tâm thì đường thẳng:

$(\Delta): f_1(x,y) = f_2(x,y)$ Chính là trục đẳng phương của hai đường tròn đó.

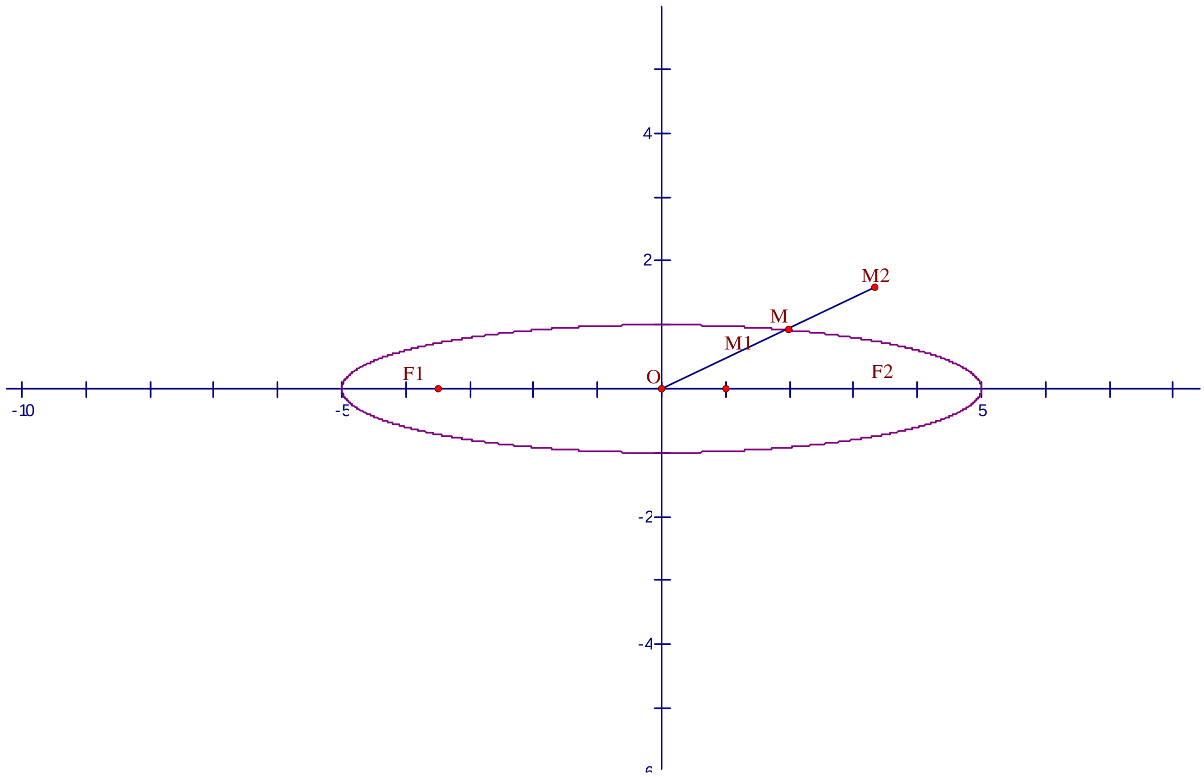
- Đối với các đường Conic ta cũng có kết quả tương tự:

Nếu gọi phương trình Elip là: $f(x,y) = 0$ và điểm $M(x_m, y_m)$ thì:

$f(x_m, y_m) < 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trong miền chứa tiêu điểm.

$f(x_m, y_m) > 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trong miền không chứa tiêu điểm.

$f(x_m, y_m) = 0$ tương ứng ta có điểm $M(x_m, y_m)$ nằm trên Conic.

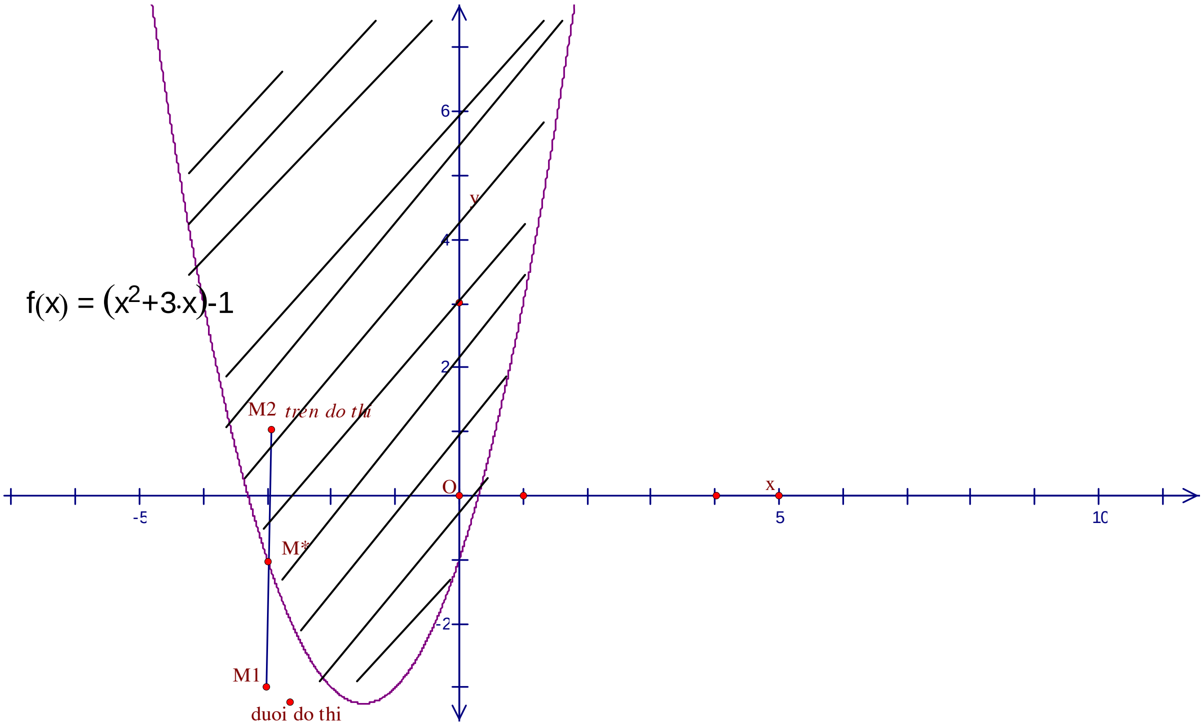


- Đối với các đồ thị hàm số cũng vậy (xem hình vẽ sau):

Gọi (C) là đồ thị hàm số: $y = f(x)$. khi đó trên mặt phẳng toạ độ tập hợp các điểm $M(x_m, y_m)$ thoả mãn: i) $y_m - f(x_m) > 0$ là miền trên đồ thị —miền gạch (ví dụ M2)

ii) $y_m - f(x_m) < 0$ là miền dưới đồ thị —miền không gạch (ví dụ M*)

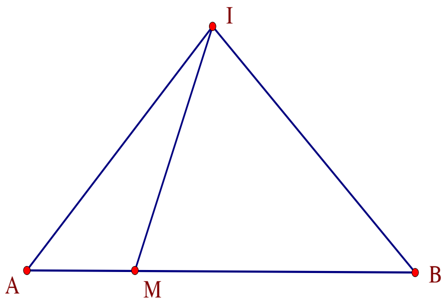
iii) $y_m - f(x_m) = 0$ là đồ thị (C) (ví dụ M1)



Ví du I.3:

- Trên một đoạn thẳng AB ta lấy một điểm M bất kỳ khi đó với mọi I trong không gian ta có:

$$IM \le Max\{IA, IB\}$$



Thật vậy do tồn tại cặp $(p,q) \in \mathrm{R}^2; p+q=1\ ; p,q \in [0,1]$ sao cho:

$\overrightarrow{IM} = p\overrightarrow{IA} + q\overrightarrow{IB}$ nên: $IM = |\overrightarrow{IM}| \le pIA + qIB \le (p+q)Max\{IA, IB\} = Max\{IA, IB\}$.

Điều này dẫn đến bài toán cực trị trên đa giác lồi:

Chẳng hạn:

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy có tam giác ABC xác định bởi giao các đường thẳng:

$(d_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0$; $(d_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$; $(d_3): A_3x + B_3y + C_3 = 0$.

Điểm $M(x_m, y_m)$ thuộc miền trong tam giác ABC khi chỉ khi đồng thời có:

$f_1(A)f_1(M) > 0; f_2(B)f_2(M) > 0; f_3(C)f_3(M) > 0$. ở đây ta ký hiệu:

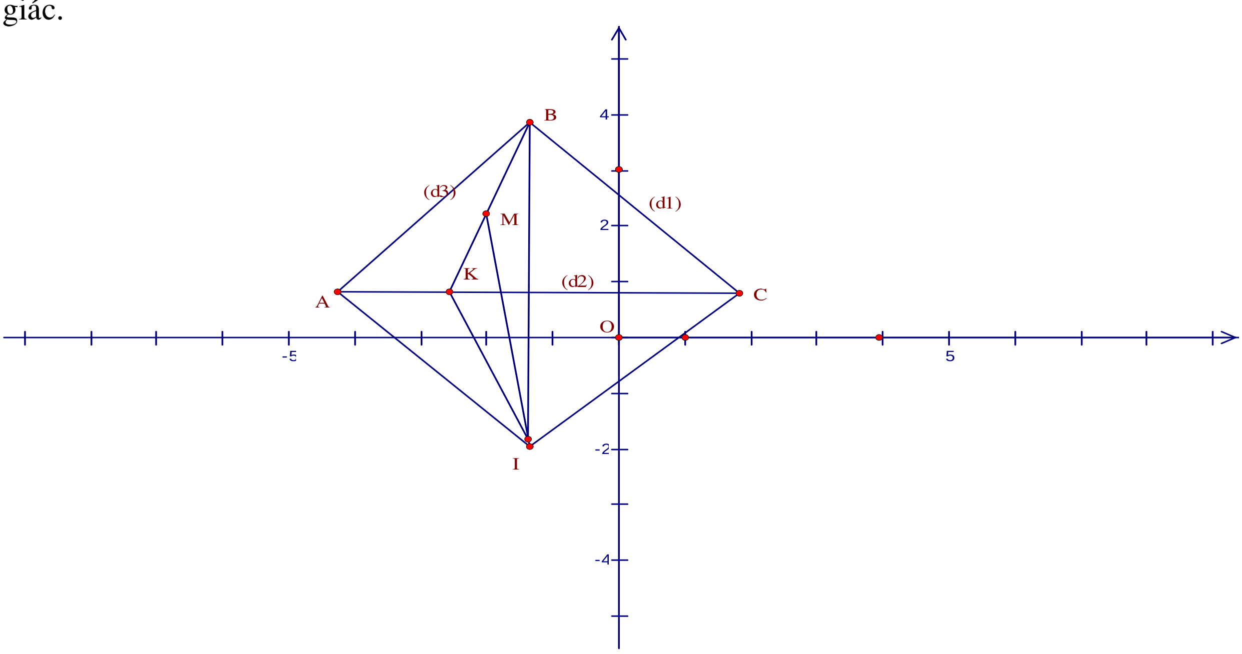
$f_i(M) = f_i(x_m, y_m) = A_ix_m + B_iy_m + C$.

Theo trên với mọi điểm I trong mặt phẳng Oxy (kể cả trong không gian):

$IM \le Max\{IA, IB, IC\}$.

- Kết quả này còn có thể mở rộng cho n-giác bất kỳ (tam giác chỉ là một ví dụ).

- Kết quả này cũng có thể dùng tốt cho việc phân biệt đường phân giác ứng với góc nhọn hay tù của các góc do hai đường thẳng cắt nhau mà thành, cũng như việc phân biệt phân giác trong hay ngoài của tam
  giác.



- ***Sau đây để làm rõ vấn đề được đề cập ta xét một số bài toán cụ thể:***

Bài toán 1:

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $f(x,y)=x^2+y^2-4x-2y$.

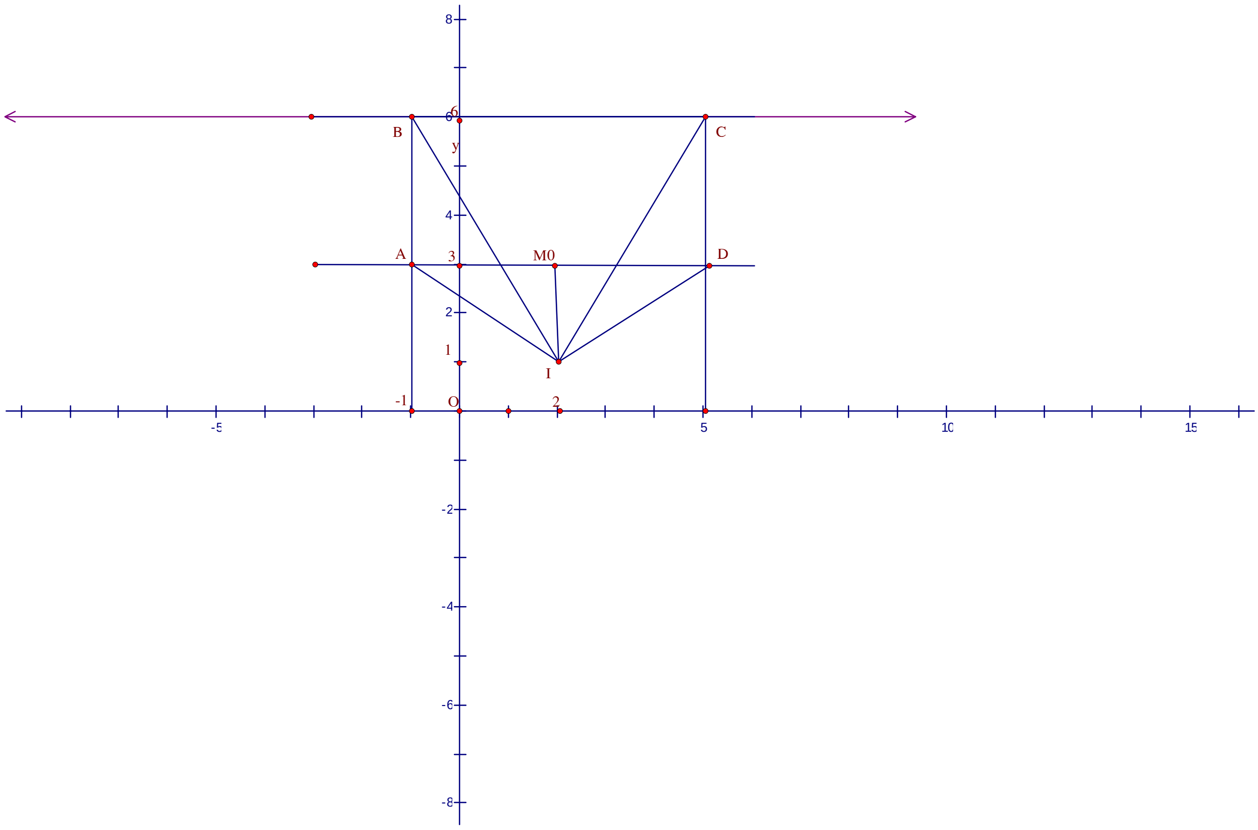
Xét trên miền: $D=\{(x,y):-1\le x\le 5;3\le y\le 6\}$.

Lời giải:

Xét bài toán trên mặt phẳng có hệ trục Oxy, khi đó miền ràng buộc là miền hình chữ nhật có các đỉnh $A(-1,3);B(-1,6);C(5,6);D(5,3)$. Viết $f(x,y)=(x-2)^2+(y-1)^2-5$

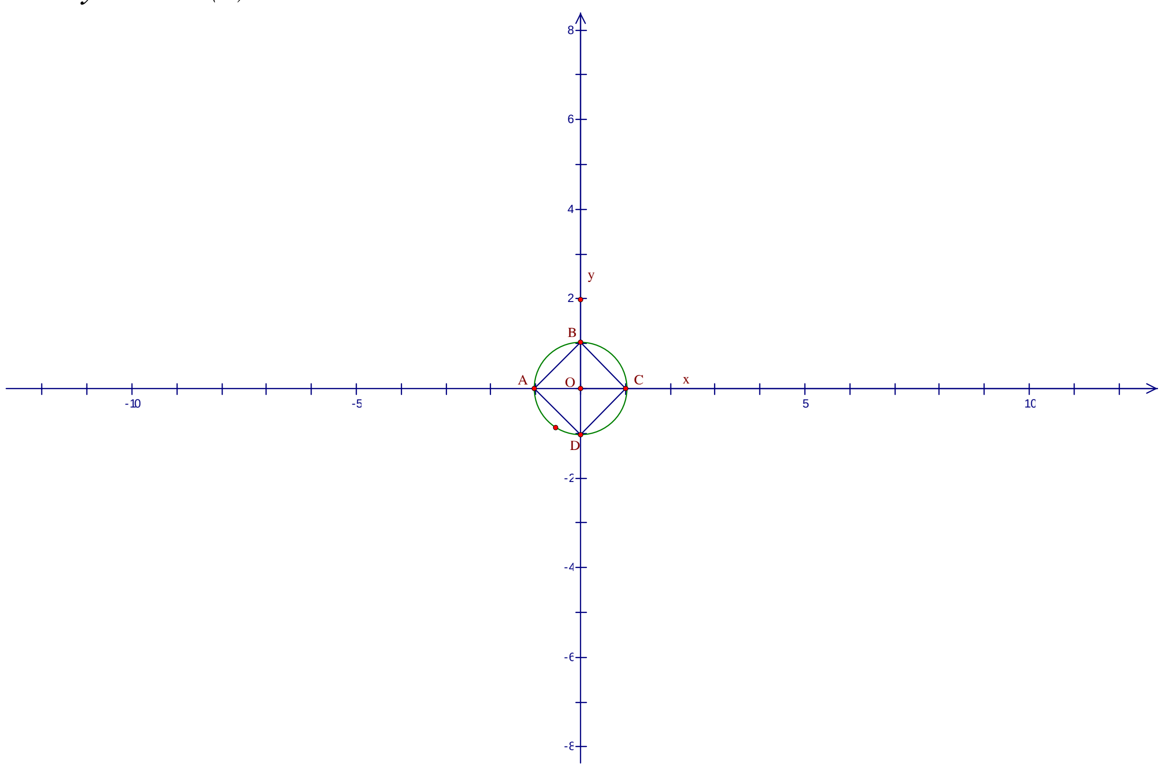
Nếu đặt $M(x,y)$ và $I(2,1)$ thì $f(x,y)=IM^2-5$. Do đó

$\underset{D}{Min}f(x,y)=IM_0^2-5=-1$; $\underset{D}{Max}f(x,y)=Max\{IA^2,IB^2,IC^2,ID^2\}-5=34-5=29$



Bài toán 2:

Tìm a để mọi nghiệm bất phương trình: $|x|+|y|\le 1$. (1) cũng là nghiệm bất phương trình: $x^2+y^2\le a$ (2).



Mỗi cặp số thực (x,y) thoả mãn bất phương trình (1) tương ứng duy nhất với một điểm $M(x,y)$ nằm trong hình vuông ABCD. Rõ ràng cần có $a>0$ và trong điều kiện này Mỗi cặp số thực (x,y) thoả mãn bất phương trình (2) tương ứng duy nhất với một điểm $M(x,y)$ nằm trong miền hình tròn tâm O bán kính $R=\sqrt{a}$ Do vậy a cần tìm là: $\sqrt{a}\ge 1 \Leftrightarrow a\ge 1$.

Bài toán3:

Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất:

$P=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}$.

Lời giải:

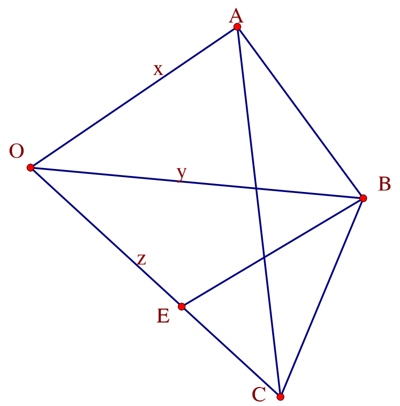
Ta có: $P=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{(x+1)^2+9}$

Trên mặt phẳng toạ độ ta xét các điểm: $M(x,0);A(1,2);B(-1,-3)$. Thì giá trị $P=AM+BM$. Khi x thay đổi thì điểm M chạy trên trục hoành; hai điểm $A;B$ cố định, khác phía so với trục hoành nên: $MinP=AM^*+BM^*;M^*\equiv(AB)\cap x'Ox$ tức phải chọn $x=x^*=\frac{9}{5}$.

Bài toán4:

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}=\sqrt{x^2+xz+z^2};x+y+z\le 11$..



Lời giải:

Đặt OA=x; OB=y; OC=z và $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=60^0$.

Khi đó theo định lý Cosin trong tam giác ta có:

$AB=\sqrt{x^2-xy+y^2};BC=\sqrt{y^2-yz+z^2};AC=\sqrt{x^2+xz+z^2}$.

Theo hình học ta luôn có: $AB+BC\ge AC$, dấu bằng chỉ có khi chỉ khi A,B,C thẳng hàng. kẻ $BE//OA$ thì: $\frac{BE}{OA}=\frac{CE}{OC}\Leftrightarrow\frac{y}{x}=\frac{z-y}{z}\Leftrightarrow\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$, lưu ý từ giả thiết $x+y+z\le 11;x,y,z\in N^*$ bằng phương pháp liệt kê dễ dàng có các nghiệm là: $(2,1,2);(4,2,4);(3,2,6);(6,2,3)$.

Bài toán 5:

Cho $a_1,a_2,...,a_n;b_1,b_2,...,b_n$. *là các số thực tuỳ ý.*

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\ge\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2+(\sum_{i=1}^{n}b_i)^2}$. (1)

Lời giải:

Xét các véc tơ: $\overrightarrow{x_i}=(a_i,b_i);i=1,2,...,n$. Khi đó: $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{x_i}=(\sum_{i=1}^{n}a_i,\sum_{i=1}^{n}b_i)$ hiển nhiên có:

$\sum|\overrightarrow{x_i}|\ge|\sum\overrightarrow{x_i}|\Leftrightarrow$ (1) Đpcm. Dấu bằng xảy ra khi chỉ khi các véc tơ được xét cùng phương cùng chiều, tức tồn tại $t\in\mathbb{R}:a_i=ta_1;b_i=tb_1;t\ge 0\forall i=2,3,...,n$.

- Bằng cách này ta cũng nhận được dạng hình học của bất đẳng thức Bunhiacôpki

- Có thể thấy ngay lời giải các bài toán sau:

1. Cho các số thực thoả mãn $a+b+c=2; ax+by+cz=6$. Chứng minh rằng:
$\sqrt{16a^2+a^2x^2}+\sqrt{16b^2+b^2y^2}+\sqrt{16c^2+c^2z^2}\geq 10$.

2. Chứng minh rằng với mọi α,β ta có:
$\sqrt{cos^4\alpha+cos^4\beta}+sin^2\alpha+sin^2\beta\geq\sqrt{2}$.

3. Cho các số thực bất kỳ: $a_1,a_2,...,a_n$ Chứng minh rằng:
$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+(1-a_{i+1})^2}\geq\frac{n\sqrt{2}}{2}; a_{n+1}\equiv a_1$.

<u>Bài toán 6:</u> (*Đề thi HSG Duyên hải Bắc bộ lần thứ nhất*)

Cho một 2008 □ giác có tính chất: tất cả các đỉnh có tọa độ nguyên và độ dài của tất cả các cạnh là những số nguyên. Chứng minh rằng: chu vi của đa giác là một số chẵn.

<u>Lời giải:</u>

Giả sử $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=(a_i;b_i)$ với $i=\overline{1;2008}$ (Quy ước $A_{2009}=A_1$), trong đó $a_i;b_i$ là các số nguyên và $\sqrt{a_i^2+b_i^2}$ cũng là số nguyên với mọi $i=\overline{1;2008}$. Ta có: Giả sử $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=(a_i;b_i)$ với $i=\overline{1;2008}$ (Quy ước $A_{2009}=A_1$), trong đó $a_i;b_i$ à các số nguyên và $\sqrt{a_i^2+b_i^2}$ cũng là số nguyên với mọi $i=\overline{1;2008}$.

Ta có:
$\sum_{i=1}^{2008}\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\vec{0}\Rightarrow\sum_{i=1}^{2008}a_i=\sum_{i=1}^{2008}b_i=0$. Do đó
$\sum_{i=1}^{2008}a_i^2=-2\sum_{1\leq i<j\leq 2008}a_ia_j;\sum_{i=1}^{2008}b_i^2=-2\sum_{1\leq i<j\leq 2008}b_ib_j$, tức là $\sum_{i=1}^{2008}a_i^2;\sum_{i=1}^{2008}b_i^2$ là các số chẵn.

Kí hiệu N là chu vi tam giác, ta có N là một số nguyên dương và:

$$N^2=\left(\sum_{i=1}^{2008}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)^2=\sum_{i=1}^{2008}\left(a_i^2+b_i^2\right)+2\sum_{1\leq i<j\leq 2008}\sqrt{a_i^2+b_i^2}\sqrt{a_j^2+b_j^2}$$

Tức là N^2 là số chẵn và do đó N cũng là số chẵn.

<u>Bài toán 7</u> (Đề do Hưng Yên đề nghị — kỳ thi HSG Duyên hải Bắc bộ lần thứ nhất)

Cho tam giỏc ABC cố định. $MNPQ$ l□ hỡnh chữ nhật thay đổi sao cho M,N thuộc đường thẳng BC. P thuộc cạnh AC, Q thuộc cạnh AB. Tỡm tập hợp tõm cỏc hỡnh chữ nhật.

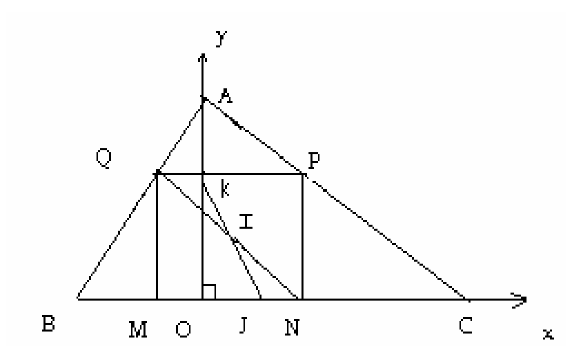
Lời giải:

Chọn hệ Oxy sao cho O l□ chõn đường cao kẻ từ A của tam giỏc ABC, $A\in Oy$. B,C thuộc trục hoành, chiều dương của trục hoành từ B đến C.

Giả sử $A(0;a)$ $a>0$, $B(b;0)$, $C(c;0)$.

- $\frac{AQ}{AB}=\frac{AP}{\text{AC}}=p$ $\quad 0<p<1$.

$\overrightarrow{AQ}=p.\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{\text{AQ}}(pb;-pa)\Rightarrow Q(pb;a-pa)$



- $\dfrac{CN}{CO}=\dfrac{CP}{CA}=1-p\Rightarrow\overrightarrow{CN}=(1-p)\overrightarrow{CO}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{CN}(cp-c;0)\Rightarrow N(cp;0)$$

I là trung điểm $QN\Rightarrow I(\dfrac{p(b+c)}{2};\dfrac{(1-p)a}{2})$ (1) Do $p\in(0;1)\Rightarrow y_{I}=\dfrac{(1-p)a}{2}\in(0;\dfrac{a}{2})$.

- Nếu tam giác ABC cân tại $A\Rightarrow I(0;\dfrac{(1-p)a}{2})$; $I\in[KO]$ với K là trung điểm OA; $I\neq K;I\neq O$.

- Nếu tam giác ABC không cân tại A. Từ (1) ta có I thuộc đường thẳng Δ có phương trình:

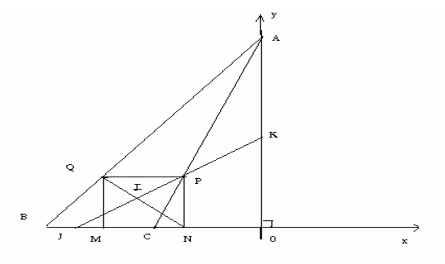
$\dfrac{x}{b+c}+\dfrac{y}{a}=\dfrac{1}{2}$. Δ cắt trục tung tại $K(0;\dfrac{a}{2})$ (K là trung điểm OA), Δ cắt trục hoành tại $J(\dfrac{b+c}{2};0)$.

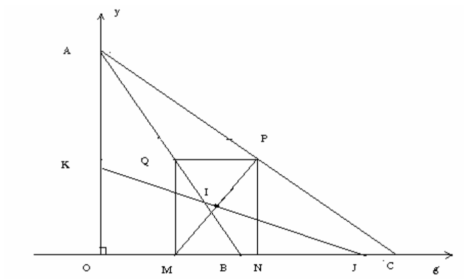
$$I\in[KO] \text{ với } I\neq K;I\neq J.$$

KL: Tập hợp tâm I của hình chữ nhật $MNPQ$ là đoạn KJ bỏ đi hai đầu mút, với K là trung điểm AO, J thuộc BC được xác định cụ thể như sau:

+) Nếu $C\geq 90^0$; J nằm giữa O,B : $\mathrm{OJ}=\dfrac{\mathrm{OB}+OC}{2}$; Nếu $B\geq 90^0$; J nằm giữa $O;C$: $\mathrm{OJ}=\dfrac{\mathrm{OB}+OC}{2}$;

+) Nếu $B<C<90^0$; J nằm giữa O,B : $\mathrm{OJ}=\dfrac{\mathrm{OB}-OC}{2}$;Nếu $C<B<90^0$; J nằm giữa $O;C$: $\mathrm{OJ}=\dfrac{\mathrm{OC}-OB}{2}$`.





- Các kết quả nêu trên giúp ích rất lớn trong các bài toán cực trị đại số hay hình học kể cả trong mặt phẳng hay trong không gian, xử lý các bài toán biện luận định tính trong vấn đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình, hệ bất phương trình, dài hơn là các bài toán cực trị và tối ưu .
- Sau đây chúng ta xét một số tìm tòi trong lĩnh vực rất được quan tâm: Bất đẳng thức.

<u>**Bài toán 8**</u> (Đề do Quảng ninh đề nghị thi HSG Duyên hải Bắc bộ lần thứ nhất)
Cho nửa đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên nửa đường tròn này người ta lấy n điểm: $P_1,P_2,P_3,...,P_n$*, n là một số tự nhiên lẻ không nhỏ hơn 1.*

Chứng minh rằng : $|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+...+\overrightarrow{OP_n}|\geq 1$.

Lời giải:

+) Đặt n=2k-1. Chọn trục OP_k và véc tơ $\overrightarrow{OP_k}$ là véc tơ đơn vị của trục. $\overline{OP_k}=1$.

+) Chiếu các véc tơ $\overrightarrow{OP_i}; i=1,2,...n$ lên trục ta nhận được các hình chiếu là $\overline{OP_i}$ và chú ý rằng hình chiếu của véc tơ tổng $\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}$ chính là $\overline{OP}=\sum_{i=1}^{n}\overline{OP_i}$.

Gọi AB là đường kính của nửa đường tròn, A_1, B_1 là các hình chiếu của A,B trên trục.

+) Ta có $\overline{OP_i}\ge\overline{OA_1}; \forall i=1,2,...,k-1$. Và: $\overline{OP_j}\ge\overline{OB_1}; \forall j=k+1,k+2,...,2k-1$.

Hơn nữa $\overline{OA_1}<0<\overline{OB_1}; \overline{OA_1}+\overline{OB_1}=0$.

+) Từ $|\vec{v}|\ge|\overline{OP}|=|\sum_{i=1}^{2k-1}\overline{OP_i}|\ge(k-1)(\overline{OA_1}+\overline{OB_1})+\overline{OP_k}=1$. (Đpcm).

<u>Bài toán 9</u>

Cho n là một số tự nhiên không nhỏ hơn 3. chứng minh tồn tại một tập hợp gồm n điểm thoả mãn đồng thời các điều kiện:

i) Ba điểm bất kỳ trong chúng không thẳng hàng;

ii) Khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong chúng là một số vô tỷ;

iii) Diện tích của tam giác bất kỳ thành lập từ ba điểm bất kỳ trong chúng là một số vô tỷ.

Lời giải:

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy xét các điểm $A_i(i,i^2); i=1,2,...,n.$ Ta sẽ chứng minh đây là bộ điểm thoả mãn yêu cầu đặt ra.

i) Giả sử có ba điểm thẳng hàng $A_k, A_l, A_m; k<l<m$ khi đó ta có:

$\overrightarrow{A_kA_l}=(l-k,l^2-k^2); \overrightarrow{A_lA_m}=(m-l,m^2-l^2)$; do tính thẳng hàng ta có:

$\frac{m-l}{l-k}=\frac{m^2-l^2}{l^2-k^2}\Leftrightarrow m=k$ điều này vô lý vì $k<m$.

ii) Ta có $A_kA_l=\sqrt{(k-l)^2+(k^2-l^2)^2}$ giả sử khoảng cách này là một số hữu tỷ thi sẽ tồn tại

$\frac{p}{q}$ tối giản sao cho: $A_kA_l=\sqrt{(k-l)^2+(k^2-l^2)^2}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow p^2=(k-1)^2(1+(k+1)^2)$;

để ý là $p^2 \vdots q^2; (p,q)=1\Rightarrow q=1$ và p là số nguyên dương, bằng cách phân tích tiêu chuẩn ra các thừa số nguyên tố ta suy ra:

$\exists a\in N^*: a^2=1+(l+k)^2\Rightarrow 1=(a-k-l)(a+k+l)>0$ nên $a+k+l\ge 4\Rightarrow 1\ge 4$ vô lý!

iii) Xét một tam giác bất kỳ có các đỉnh lấy từ các điểm đó:

$A(a,a^2); B(b,b^2); C(c,c^2); a<b<c; a,b,c\in N^*$. Gọi

$E(a,c^2); F(b,a^2); K(c,c^2);$ Khi đó ta có:

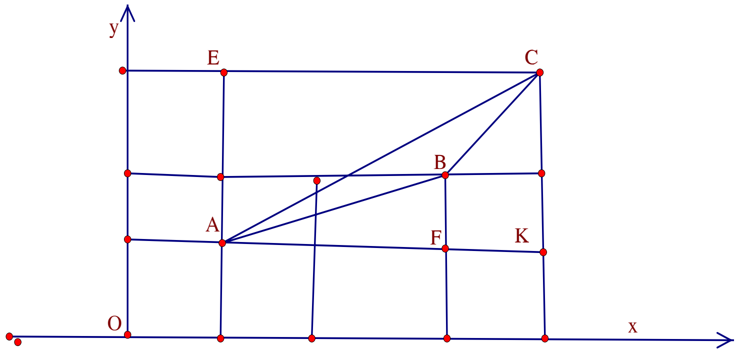
$[ABC]=[AKCE]-[AEC]-[ABF]-[FBCK]$ ta ký hiệu $[\Omega]$ là diện tích miền Ω.

iv) Vậy ta có:

$[ABC]=$

$$=(c-a)(c^2-a^2)-\frac{1}{2}(c-a)(c^2-a^2)-\frac{1}{2}(b-a)(b^2-a^2)-\frac{1}{2}(c-b)(c^2+b^2-2a^2)$$

$=s\in Q$ do a,b,c đều là các số nguyên dương.



LỜI KẾT:

Phải thực sự thừa nhận rằng tồn tại mối liên hệ ẩn tàng giữa hình thức Đại số và bản chất hình học, PP hình học hoá các bài toán Đại số là đặc biệt hữu hiệu. Chúng ta có thể kể ra đây ngoài PP toạ độ rất nhiều PP khác nữa để tiếp cận ý tưởng này, chẳng hạn một trong chúng là Lý thuyết đồ thị,Và đương nhiên không thể kể hết các ứng dụng, các bài toán, điều quan trọng là vai trò người thày trong việc dẫn dắt các em tiếp cận PP như thế nào, nhằm khơi dậy trong chúng khả năng tư duy sáng tạo niềm say mê tìm tòi khám phá vẻ đẹp trong toán học. Do khả năng và kinh nghiệm còn hạn chế bài viết không tránh khỏi sai sót tôi chỉ dám hy vọng bài viết này là một chia sẻ nhỏ với các đồng nghiệp.

Cuối cùng để kết thúc tôi xin được nhắc ra đây lời của giáo sư George Polya, nhà toán học và giáo dục Mỹ nổi tiếng dành cho các bạn yêu Toán:

" ***Có thể rằng bài toán kia chẳng khó, nhưng nếu nó thách thức trí tò mò cũng như phát huy được khả năng sáng tạo của bạn và nếu như bạn giải nó chỉ bằng phương tiện riêng của bạn, thì bạn sẽ trải nhiều cam go căng thẳng cùng bao niềm vui khám phá. Vào lứa tuổi nhạy cảm, những kinh nghiệm như thế sẽ tạo nên điều thú vị cho hoạt động tinh thần và là dấu son ảnh hưởng mãi tương lai...***

Hạ long ngày 9-10-2008

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ HÀM SỐ

$y= ax +b$ và $y= ax^2 +bx + c = 0$

ĐỖ VĂN ĐỨC

Tổ trưởng tổ toán tin

Trường THPT Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình

Trong chương trình lớp 10, học sinh đã được học về các hàm số bậc nhất và bậc 2. Đây là 2 hàm số cơ bản trong chương trình phổ thông và có rất nhiều ứng dụng trong kì thi các cấp.

Sau đây tôi nêu lên một số ví dụ áp dụng hai hàm số trên (kể cả trường hợp suy biến) để giải toán.

I) Ta chú ý đến một số kết quả sau:

1. Hàm số f(x) luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến, hoặc không đổi trên $[\alpha, \beta]$ thì:

$$\underset{[\alpha,\beta]}{\text{Max}}\, |f(x)| = \text{Max}\{|f(\alpha)|, |f(\beta)|\}$$

2. $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$$\underset{[\alpha,\beta]}{\text{Max}}\, |f(x)| = \begin{cases} \text{Max}\{|f(\alpha)|, |f(\beta)|\} \text{ Khi } \dfrac{-b}{2a} \notin (\alpha, \beta) \\ \text{Max}\{|f(\alpha)|, |f(\beta)|, f(\dfrac{-b}{2a})\} \text{ Khi } \dfrac{-b}{2a} \in (\alpha, \beta) \end{cases}$$

3. $$\underset{X_i \in D_i\ (i = 1, 2, \ldots n)}{\text{Max}} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \geq \underset{x_1 \in D_1}{\text{Max}}\Big(\underset{x_2 \in D_2}{\text{Max}} \ldots \big(\underset{x_n \in D_n}{\text{Max}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\ldots\Big)$$

II) Các bài toán được chia làm 3 loại

A- Các bài toán ứng dụng hàm bậc nhất và suy biến

B- Các bài toán ứng dụng hàm bậc hai và suy biến

C- Các bài toán ứng dụng phối hợp hai hàm số trên.

A Các bài toán ứng dụng hàm y= ax +b

Bài toán 1 (đề thi vô địch KIEP)

Chứng minh rằng với bất cứ a, b nào cũng tìm được x, y $\in [0,1]$ để

$$|xy - ax - by| \geq \frac{1}{3}$$

Giải: Bài này đã có nhiều sách đưa lời giải nhưng các lời giải đều mang tính chất áp đặt. Với cách giải như vậy là không cho ta cách mở rộng được bài toán, đồng thời cũng không cho ta cách tìm thấy số $\frac{1}{3}$. Sau đây tôi đưa ra cách giải sử dụng tính chất hàm y= ax +b, và qua đó cho ta ra thêm hàng loạt các bài toán dạng này.

$$\text{Max}\, |xy-ax-by| \geq \text{Max}\ \{|a|, |b|. |a+b-1|\} \geq \frac{1}{3}|a+b-a-b+1| = \frac{1}{3}$$

Bài toán 2: Cho số thực α, β, b $(\alpha<\beta)$ Tìm a để

$\underset{x\in[\alpha,\beta]}{\text{Max}}\, |ax+b|$ Có giá trị bé nhất

Giải: $\underset{x\in[\alpha,\beta]}{\text{Max}}\, |ax+b| = \text{Max}\ \{|a\alpha + b|, |a\beta + b|\} \geq$

$$\geq \frac{|a\alpha\beta + b\beta| + |a\alpha\beta + b\alpha|}{|\alpha| + |\beta|} \geq \frac{|b||\beta - \alpha|}{|\alpha| + |\beta|}$$

Cú □□ng th□c $\begin{cases} |a\alpha + b| = |a\beta + b| & (1) \\ \alpha\beta\,(a\alpha + b)\,(-a\beta - b) \ge 0 & (2) \end{cases}$

*) Nều $\alpha\beta \ge 0$ (2) $\Leftrightarrow (a\alpha + b)(-a\beta - b) \ge 0$ khi đó

(1) $\Rightarrow a\alpha + b = -a\beta - b \leftrightarrow a = \dfrac{-2b}{\alpha + \beta}$

*) Nều $\alpha\beta \le 0$ (2) $\Leftrightarrow (a\alpha + b)(-a\beta - b) \le 0$ Khi đó

(1) $\Rightarrow a\alpha + b = a\beta + b \leftrightarrow a = 0$

Vậy Max $|ax+b|$ bé nhất bằng $\dfrac{|b||\beta - \alpha|}{|\alpha| + |\beta|}$ $\left[\begin{array}{l} Khi\ \alpha\beta \ge 0 \text{ và } a = \dfrac{-b}{\alpha + \beta} \\ \text{khi } \alpha\beta \le 0 \text{ và } a = 0 \end{array}\right.$

Max $|ax + b|$ bé nhất bằng $\dfrac{|b||\beta - \alpha|}{|\alpha| + |\beta|}$

$[\alpha, \beta]$

Bài toán 3: Cho hai số α và β xét các hàm số

$f(x) = a^2x + \alpha a + \beta$

Xác định a để Max $|f(x)|$ nhỏ nhất

$x \in [-1, -1]$

Giải:

<u>trường hợp 1:</u> $\beta \ge 0$

A) Nếu $\alpha^2 - 2\beta > 0$ ta chọn $k > 0$ sao cho

$$\frac{\alpha(1-k)}{2(1+k)} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow k = \frac{\alpha^2 + 2\beta}{\alpha^2 - 2\beta} > 0$$

Max $|f(x)|$ = Max $\{|a^2 + \alpha a + \beta|; |a^2 - \alpha a - \beta|\} \ge$

$x \in [-1, 1]$

$$\ge \frac{1}{k+1}|ka^2 + k\alpha a + k\beta + a^2 - \alpha a - \beta| =$$

$$= |a^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}a + 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}| = (a + \frac{\beta}{\alpha})^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \ge \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

có đẳng thức $\Leftrightarrow a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

B) nếu $\alpha^2 - 2\beta \le 0$

$\Rightarrow$ Max $|f(x)|$ = Max $\{|a^2 + \alpha a + \beta|, |a^2 - \alpha a - \beta|\}$

$[\alpha, \beta]$

Ta chứng minh Max $|f(x)|$ bé nhất là $\beta - \dfrac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow a = -\dfrac{\alpha}{2}$

Thật vậy với a = - $\frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ Max $\{|a^2 + \alpha a + \beta|, |a^2 - \alpha a - \beta|\}$

$$= \text{Max}\{\beta - \frac{\alpha^2}{4} ; |\frac{3\alpha^2}{4} - \beta|\} = \beta - \frac{\alpha^2}{4}$$

$$\text{do } (\beta - \frac{\alpha^2}{4}) - |\frac{3\alpha^2}{4} - \beta| = \begin{cases} 2\beta - \alpha^2 \geq 0 \\ \frac{\alpha^2}{2} \geq 0 \end{cases}$$

Mặt khác Max $\{|a^2 + \alpha a + \beta|, |a^2 - \alpha a - \beta|\} \geq |a^2 + \alpha a + \beta| =$

$= |(a + \frac{\alpha}{2})^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}| \geq \beta - \frac{\alpha^2}{4}$ có $\Leftrightarrow$ a= - $\frac{\alpha}{2}$

Vậy $\beta \geq 0$ thì Max |f(x)| bé nhất = $\begin{cases} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \; khi \; \alpha^2 - 2\beta \geq 0, \beta \geq 0 \quad Và \; a = \frac{-\beta}{\alpha} \\ \beta - \frac{\alpha^2}{4} khi \, \alpha^2 - 2\beta \leq 0, \beta \geq 0 \; Và \; a = \frac{-\alpha}{2} \end{cases}$

trường hợp 2: $\beta < 0$

$\beta < 0$ do Max|f(x)| = Max|a(-x) + (-α)a + (-β)

[- 1,1] -1≤ -x ≤ 1

Áp dụng kết quả của trường hợp 1 với $\begin{cases} \alpha \; là - \alpha \\ \beta \; là - \beta > 0 \end{cases}$

Vậy ta có kết luận chung

Max|f(x)| bé nhất = $\begin{cases} \frac{\beta^2}{\alpha^2} khi \; \alpha^2 - 2|\beta| > 0 \; và \; a = -\frac{\alpha}{\beta} \\ |\beta| - \frac{\alpha^2}{4} khi \; \alpha^2 - 2|\beta| \leq 0 \; và \; a = \frac{-|\beta|}{2\beta}\alpha \end{cases}$

[- 1,1]

Bây giờ ta lại xét bài toán 2 ở trên với điều kiện

$\alpha^2 - 2\beta > 0$, $\beta > 0$ nhưng a = $-\frac{\beta}{\alpha}$ (vô nghiệm) (xét bài 4)

Hoặc $\alpha^2 - 2\beta \leq 0$, $\beta > 0$ và phương trình a= 0 vô nghiệm (xét bài 5)

Bài toán 4: Cho $0 < \alpha < \beta$ và $\alpha + \beta < \frac{25}{8}$

Xét các hàm số f(x) = $(a^2 + 2a + \frac{9}{25})x + 1$

Tìm a để Max |f(x)| nhỏ nhất

[α , β]

Giải: Để ý rằng với điều kiện $0 < \alpha < \beta$ và $\alpha + \beta < \frac{25}{8}$ thì

Phương trình $a^2 + 2a + \frac{9}{25} = \frac{-2}{\alpha + \beta}$ (vô nghiệm ẩn a)

Nên kết quả bài 2 không thoả mãn

*) Nếu $a^2 + 2a + \frac{9}{25} = 0 \Leftrightarrow a \in \{-\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}\} \Rightarrow f(x) = 1$

*) Nếu $a^2 + 2a + \frac{9}{25} > 0 \Rightarrow f(x) > 1$

*) với $a^2 + 2a + \frac{9}{25} < 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{5} < a < -\frac{1}{5}$

+) $f(\alpha) = (a^2 + 2a + \frac{9}{25})\alpha + 1 > (a^2 + 2a + \frac{9}{25})\frac{25}{16} + 1 =$

$= [(a+1)^2 - \frac{16}{25}]\frac{25}{16} + 1 \geq 0$ do $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{25}{16}$

$\Rightarrow |f(\alpha)| = f(\alpha) = [(a+1)^2 - \frac{16}{25}]\alpha + 1 \geq 1 - \frac{16}{25}\alpha$

Có đẳng thức $\Leftrightarrow a = -1$

+) nếu $\beta \leq \frac{25}{16} \Rightarrow f(\beta) \geq f(\frac{25}{16}) \geq 0$

$\Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) > 0 \Rightarrow \underset{[\alpha,\beta]}{\mathrm{Max}} |f(x)| = f(\alpha) \geq 1 - \frac{16}{25}\alpha$

đạt $\Leftrightarrow a = -1$

+) Nếu $f(\beta) \leq 0 \Rightarrow \beta \geq \frac{25}{16} \Rightarrow |f(\beta)| = -f(\beta) =$

$= -1 - [(a+1)^2 - \frac{16}{25}]\beta = f_1$

do $\frac{25}{16} \leq \beta < \frac{25}{8} - \alpha \Rightarrow f_1 \leq 1 - [(a+1)^2 - \frac{16}{25}](\frac{25}{8} - \alpha) =$

$= 1 - \frac{16}{25}\alpha - (a+1)^2(\frac{25}{8} - \alpha) \leq 1 - \frac{16}{25}\alpha \leq f(\alpha)$

Vậy $\underset{[\alpha,\beta]}{\mathrm{Max}} |f(x)| \geq 1 - \frac{16}{25}\alpha$ có đẳng thức $\Leftrightarrow a = -1$

Bài toán 5: $f(x) = (a^2+1)x - 1$ cho $\alpha < o < \beta$

Tìm a để $\underset{[\alpha,\beta]}{\mathrm{Max}}|f(x)|$ bé nhất

Giải: Trường hợp này $a^2 + 1 = 0$ vô nghiệm nên giải như bài 2 không được

$M = \underset{[\alpha,\beta]}{\mathrm{Max}} |f(x)| = \mathrm{Max}\{|f(\alpha)|; |f(\beta)|\} = \mathrm{Max}\ \{|(a^2+1)\alpha - 1|; |(a^2+1)\beta - 1|\}$

*) $f(\alpha) = |(a^2+1)\alpha - 1| = 1 - \alpha(a^2+1) = 1 + (a^2+1)|\alpha| \geq 1 + |\alpha|$

Nếu $M = |f(\beta)| = |(a^2+1)\beta - 1| \Rightarrow M \geq 1 + |\alpha|$ nên

$M = |(a^2+1)\beta - 1| = (a^2+1)\beta - 1 \geq \beta - 1 \geq 1 + |\alpha| \Leftrightarrow \beta \geq 2 + |\alpha|$

Vậy $\beta \geq 2+|\alpha| \Rightarrow$ M bé nhất là $\beta - 1 \Leftrightarrow a = -1$

Còn $\beta < 2+|\alpha| \Rightarrow$ M bé nhất là $|\alpha| + 1 \Leftrightarrow a = -1$

Vậy M bé nhất = Max $\{\beta - 1; |\alpha|+1\} \Leftrightarrow a = -1$

Bài toán 6: Cho $0<a_1<a_2<a_3$; $\dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_2}{a_2} < \dfrac{b_3}{a_3}$

$f(x) = \underset{x \in R}{\text{Max}} \{|a_1x - b_1|; |a_2x - b_2|; |a_3x - b_3|\}$

tìm $\underset{x \in R}{\text{Min}} f(x)$

Giải:

*) Phương trình $-a_3x + b_3 = a_1x - b_1 \Leftrightarrow x = x_1 = \dfrac{b_1+b_3}{a_1+a_3}$ (1)

*) Phương trình $-a_3x + b_3 = a_2x - b_2 \Leftrightarrow x = x_2 = \dfrac{b_2+b_3}{a_2+a_3}$ (2)

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{b_1}{a_1} < x_1 < \dfrac{b_3}{a_3} \text{ Ví nó} \Leftrightarrow \dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_3}{a_3} \\ \dfrac{b_2}{a_2} < x_2 < \dfrac{b_3}{a_3} \text{ Ví nó} \Leftrightarrow \dfrac{b_2}{a_2} < \dfrac{b_3}{a_3} \end{cases}$ (3)

Ta xét 2 trường hợp

I) $x_2 \geq x_1$ Ta chứng minh $\underset{X \in R}{\text{Min}} f(x) = |a_1x_1 - b_1|$

a) Ta chứng minh $f(x_1) = |a_1x_1 - b_1|$

Do (3) $\Rightarrow |a_1x_1 - b_1| = a_1x_1 - b_1 = -a_3x_1 + b_3 = |a_3x_1 - b_1|$

Ta chứng minh $|a_1x_1 - b_1| > |a_2x_1 - b_2|$

*) $a_1x_1 - b_1 \geq -a_2x_1 + b_2 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{b_1+b_3}{a_1+a_3} > \dfrac{b_1+b_2}{a_1+a_2} \Leftrightarrow a_2b_1 + a_1b_3 > a_1b_2 + a_3b_1 + a_3b_2$

$\Leftrightarrow (a_1b_3 - a_3b_1 + a_2b_1 - a_1b_2) + (a_2b_3 - a_3b_2) > 0$ đúng

Do $\dfrac{b_3}{a_3} - \dfrac{b_1}{a_1} > \dfrac{b_2}{a_2} - \dfrac{b_1}{a_1} \Leftrightarrow a_1b_3 - a_3b_1 > \dfrac{a_3}{a_2}(a_1b_2 - a_2b_1) > a_1b_2 - a_2b_1$

*) $|a_1x_1 - b_1| = a_1x_1 - b_1 = -a_3x_1 + b_3 \geq -a_3x_2 + b_3 = a_2x_2 - b_2 \geq a_2x_1 - b_1$

Vậy $f(x_1) = |a_1x_1 - b_1|$

b) Ta chứng minh $f(x) \geq f(x_1)\ \forall\ x \in R$

*) $x < x_1 \Rightarrow -a_3x + b_3 > -a_3x_1 + b_3 = a_1x_1 - b_1 = f(x_1)$

*) $x > x_1 \Rightarrow a_1x - b_1 > a_1x_1 - b_1 = f(x_1)$

$$\text{Vậy } \underset{X \in R}{\text{Min}}\, f(x) = |a_1x_1 - b_1| = \left(\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1 + a_3}\right)$$

II) $x_1 \geq x_2$

a) Ta chứng minh $f(x_2) = |ax_2 - b_2|$

$|a_2x_2 - b_2| = a_2x_2 - b_2 = -a_3x_2 + b_3 = |a_3x_2 - b_3|$

$|a_2x_2 - b_2| > |a_1x_2 - b_1|$ đúng do

$|a_2x_2 - b_2| = a_2x_2 - b_2 = -a_3x_2 + b_3 > -a_3x_1 + b_3 = a_1x_1 - b_1 > a_1x_2 - b_2 >$

$$> a_1\frac{b_1}{a_1} - b_2 > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) = |ax_2 - b_2|$$

b) Ta chứng minh $f(x) \geq f(x_2)\ \forall x \in R$

Nếu $x \geq x_2 \Rightarrow f(x) \geq |a_2x - b_2| = a_2x - b_2 \geq |a_2x_2 - b_2|$

$X < x_2 \Rightarrow f(x) \geq |-a_3x + b_3| = -a_3x + b_3 > -a_3x_2 + b_3 = |a_2x_2 - b_2|$

$$\text{Vậy } \underset{X \in R}{\text{Min}}\, f(x) = \text{Max}\,\{f(x_1); f(x_2)\} = \text{Max}\left\{\left|\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1 + a_3}\right|; \left|\frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_2 + a_3}\right|\right\}$$

Bài toán 7: $f(x,y) = x^2y + xy^2 - ax - by$. Tìm a, b để $\underset{x,y \in [0,1]}{\text{Max}}\, |f(x, y)|$ bé nhất

Bài này có thể yêu cầu cao hơn các bài trên là phải tìm giá trị bé nhất của hàm số $|f(x,y)|$

$$\underset{x,y \in [0,1]}{\text{Max}}\, |f(x,y)| \geq \text{Max}\,\{|a|; |b|; |2-a-b|\} \geq \frac{1}{3}|a+b+2-a-b| = \frac{2}{3}$$

Với $a = b = \frac{2}{3} \Rightarrow |f(x,y)| = |(x+y)(xy - \frac{2}{3})|$

a) Nếu $xy \geq \frac{2}{3}$ do $x,y \in [0,1]$ nên $|(x+y)(xy - \frac{2}{3})| = (x+y)(xy - \frac{2}{3}) \leq$

$$\leq (1+1)(1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$$

b) Nếu $xy < \frac{2}{3} \Rightarrow (1-x)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow x+y \leq 1 + xy$

$\Rightarrow 0 \geq (x+y)(xy - \frac{2}{3}) \geq (1+xy)(xy - \frac{2}{3})$

$\Rightarrow |(x+y)(xy - \frac{2}{3})| \leq |(1 + xy)(xy - \frac{2}{3})| = (1 + xy)(\frac{2}{3} - xy) =$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}xy - (xy)^2 \leq \frac{2}{3} \Rightarrow$ Max $|f(x,y)|$ bé nhất là $\frac{2}{3}$ $\qquad x,y \in [0,1]$

SAU ĐÂY LÀ CÁC BÀI TOÁN TƯƠNG TỰ

Bài toán 8: Chứng minh rằng với bất cứ a, b, c, d, p, q nào ta cũng tìm được x,y,z thuộc đoạn [0,1] để $|xyz - axy - byz - czx - dx - py - qz| \geq \frac{1}{7}$

Bài toán 9:Chứng minh rằng với mỗi mười bốn số thực $a_1, a_2, \dots a_{14}$ nào ta cũng tìm được x, y, z, t thuộc [0,1] để

$|xyzt - a_2xyz - a_2xyt - a_3yzt - a_4ztx + a_5xy - a_6xz - a_7xy - a_8yz - a_9yt - a_{10}zt +$

$- a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z - a_{14}t| \geq \frac{1}{15}$

Bài toán 10: Cho $0 < a < b$, $m \geq 2$, $m \in Z$

Các số $a_1, a_2, \dots a_n$ không âm và không thuộc khoảng (a, b) các số $b_1, b_2, \dots b_k$ đều thuộc đoạn [a, b] thoả mãn $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{k} b_j$

a) Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[m]{a_i} \leq \sum_{j=1}^{k} \sqrt[m]{b_j}$

b) Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} \geq \sum_{j=1}^{k} b_j^{\alpha}$ $(\alpha \geq 1)$

Bài toán 11: Cho $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$f(x) = \text{Max}\ \{|x-a_1|, |x-a_2|, \dots |x- a_n|\}$

Tìm Min f(x)

$x \in R$

Bài toán 12 cho $0<a_1< a_2< ..<a_n$

$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \dots < \frac{b_n}{a_n}$

$f(x) = \text{Max}\ \{|a_ix - bi|\ (i = 1,2,\dots,n)\}$

Tìm Min f(x)

$x \in R$

Trên đây là một số bài toán áp dụng tính chất của hàm y = ax + b để giải. Còn 2 phần nữa xin được trao đổi cùng các bạn ở chuyên đề sau.

Ninh Bình, Ngày 10 tháng 10 năm 2008

PHÉP BIẾN HÌNH TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NAM

Phần I: Đặt vấn đề

Trong chuyên đề hình học phẳng sử dụng phép biến hình trong hình học phẳng là một phần kiến thức rất quan trọng. Sau đây là nội dung bài soạn của tôi khi dạy về các phép biến hình trong mặt phẳng.

Phần II: Nội dung

A. Phép đối xứng tâm, đối xứng trục, tịnh tiến.

I. Phép đối xứng tâm

1. Định nghĩa: $Đ_0$: M $\rightarrow$ M'

$$\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$$

2. Tính chất:

a. $Đ_0$ biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng.

b. $Đ_0$ biến đường thẳng thành đường thẳng // hoặc trùng với đường thẳng ban đầu.

c. Biến đoạn EF thành E'F': EF = E'F'

d. Góc xSy thành góc x'S'y' và góc x'S'y' = góc x'S'y'.

e. $Đ_0$ là phép biến đổi 1 - 1

h: Đo: A $\rightarrow$ A'

B $\rightarrow$ B'

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$

II. Phép đối xứng trục

1. Định nghĩa:

Đđ: M $\rightarrow$ M'

MM' $\perp$ d tại H

$\overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{HM'}$

2. Tính chất

Giống như phép đối xứng trục

III. Phép tịnh tiến:

1. Định nghĩa:

Cho $\overrightarrow{V} \neq \vec{0}$

$T_{\vec{V}} : M \rightarrow M'$

$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

2. Tính chất:- Giống như phép đối xứng tâm, đối xứng trục

- Phép $T_{\vec{V}}$ không có điểm bất động.

IV. Bài tập áp dụng

Bài tập 1: Cho tam giác ABC và đường tròn O. Trên cạnh AB lấy 1 điểm E sao cho BE = 2AE gọi F là trung điểm AC và I là đỉnh thứ 4 của hình bình hành AEIF. Với mỗi điểm P trên đường tròn (O) dựng Q sao cho $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=6\overrightarrow{IQ}$. Tìm tập hợp Q khi P thay đổi.

**** Hướng dẫn học sinh***

+ Xác đỉnh điểm K cố định t/c: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

+ Chứng minh K ≡ I

+ $Đ_I$: P → Q vậy Q thuộc đường tròn là ảnh (O)

**** Lời giải:***

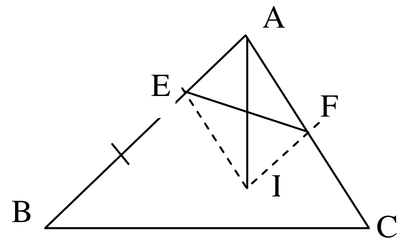
Gọi K là điểm thoả mãn:

$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

$6\overrightarrow{KA}=-(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



Ta có

$\leftrightarrow 6\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

$\leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AI}\rightarrow I\equiv K$

$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=6\overrightarrow{IQ}$

Từ

$\leftrightarrow 6\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=6\overrightarrow{IQ}$

$\leftrightarrow \overrightarrow{PI}+\overrightarrow{QI}=\vec{0}$ → là trung điểm PQ

→ Đ: P → Q

OP thuộc đường tròn

→ Q ∈ đường tròn là ảnh của (O) qua $Đ_I$

Bài tập 2: Cho hình bình hành ABCD và đường tròn (γ) bàng tiếp của tam giác ABD tiếp xúc với phần kéo dài AB và AD tương ứng tại M, N. Đoạn thẳng MN cắt BC, DC tương ứng tại P và Q. Chứng minh đường tròn nội tiếp tam giác BCD tiếp xúc BC, DC tại P và Q.

**** Hướng dẫn học sinh:***

+ Chứng minh BH = DK

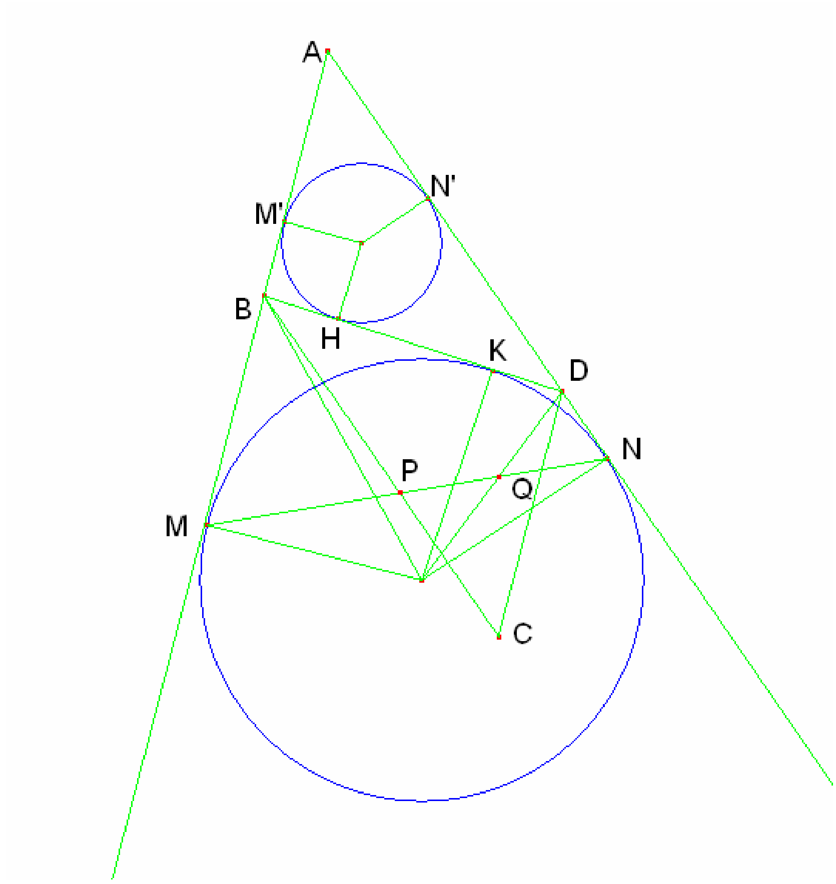
Có $Đ_I$: B → D

+ Chứng minh DQ = DN = BH = BM’

→ $Đ_I$: (C) → (C1)

Với (C) là đường tròn qua M’, N’, H ; (C1) là đường tròn qua D, Q, P

Lời giải:



Gọi K là tiếp điểm (γ) và BD

(C) là đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc AB, AD,BD tại M', N', H

Do: MM' = NN'

MM' = MB + DN' = BK + BH

NN' = ND + DN' = DH + DK

$\Rightarrow$ BH + BK = DH + DK

$\Rightarrow$ BH + BH + HK = DK + DK + HK

$\Leftrightarrow$ BH = DK

$\Rightarrow$ ∃ Phép đối xứng tâm $Đ_I$: B $\to$ D

H $\to$ K

A $\to$ C

ΔAMN cân tại A => góc AMN = góc ANM

DQ // AM => góc DQN = góc AMN

=> góc DQN = góc ANM

=> ΔDQN cân tại D => DQ = DN = DK = BH = BM'

Do $Đ_I$: B -> D

=> $Đ_I$: M' -> Q

Tương tự ΔMBP cân

$Đ_I$: N' -> P

H -> K

(C) -> (C1)

(C) là đường tròn qua M', N', H và (C1) là đường tròn qua D, Q, P do M', N' H là điểm chung duy nhất của AB, AD, BC và (C)

Và khi đó K, Q, P là điểm chung duy nhất (C_1) và BC, CD, CB

Bài tập 3:

Cho đường tròn (O, R) ΔABC có 3 góc đều nhọn nội tiếp trong đường tròn. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm thứ hai của các đường cao kẻ từ A, B,C với đường tròn. Hãy xác định kích thước 3 cạnh ΔABC theo R để diện tích lục giác AB'CA'BC' lớn nhất.

**** Hướng dẫn giải***

CMinh: dt BHC = dt BCA'

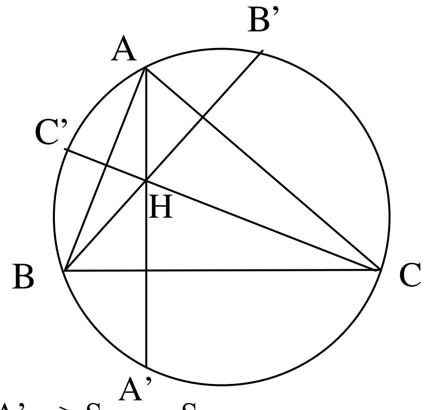
dt AHC = dt ACB'

dt AHB = dt ABC'

+ Từ đó dt AB'C.A'BC' max khi S_{ABC} max

+ Dựa vào công thức hê rông tìm max S_{ABC}

**** Lời giải:***



$Đ_{BC}$: H -> A' => $S_{BHC} = S_{BCA'}$

$Đ_{AC}$: H -> B' => $S_{AHC} = S_{ACB'}$

$Đ_{AB}$: H -> C' => $S_{AHB} = S_{ABC'}$

Đặt S_{ABC} = S => $S_{AB'CA'BC'} = 2S$

Vậy max $S_{AB'CA'BC'}$ khi S đạt max

* Ta chứng minh kết quả quen thuộc

+) $S \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

+) $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

Thật vậy:

$$S \le \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$$

$$\leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{48}$$

$$\leftrightarrow (a+b+c)(a+b-c)(b+c-b)(a+c-b) \le \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}$$

$$\leftrightarrow 3\left[(a+b)^2-c^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right] \le (a^2+b^2+c^2)^2$$

<=> $a^4 + b^4 + c^4 \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ (BĐT luôn đúng)

Chứng minh: $a^2 + b^2 = c^2 \le 9R^2$

<=> $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le 9/4$ (dễ dàng chứng minh)

Vậy $S \le \dfrac{9R^2}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow \max S = \dfrac{9R^2}{4\sqrt{3}}$

$$\max S = \frac{9R^2}{4\sqrt{3}} \text{ khi } \Delta \text{ ABC đều}$$

Bài tập 4:

Cho lục giác lồi ABCDEF có AB = BC = CD; DE = EF = FA Và GócBCD góc EFA = 60^0. giả sử G và H là hai điểm nằm trong lục giác sao cho góc AGB = góc DHE = 120^0. CMR

AG + GB + GH + DH + EF ≥ CF

**** Hướng dẫn giải***

+) $Đ_{BE}$ biến đ' nào:

A -> D

C -> C'

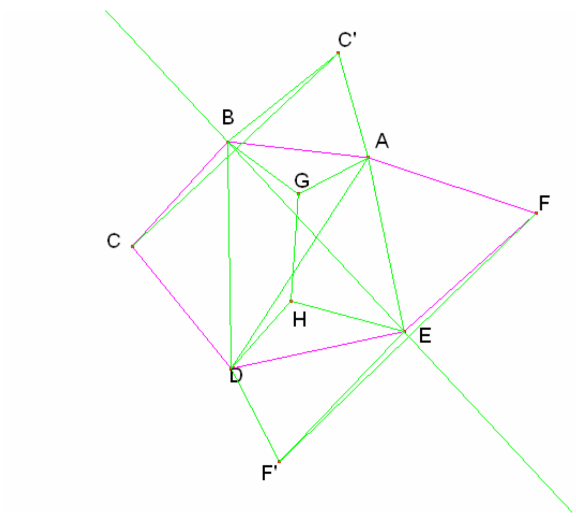
D -> A

F -> F'

+) CM: GA + GB = GC'

+) Vẽ thêm hình phụ cho bài toán dễ quan sát

**** Giải:***



Ta có: BD = AB

AE = DF

$Đ_{BE}$: A -> D vì (ΔDBE = ΔBAE

=> Góc B_1 = góc B_2 => BE là phân giác và BE ⊥ AD)

C -> C'

D -> A

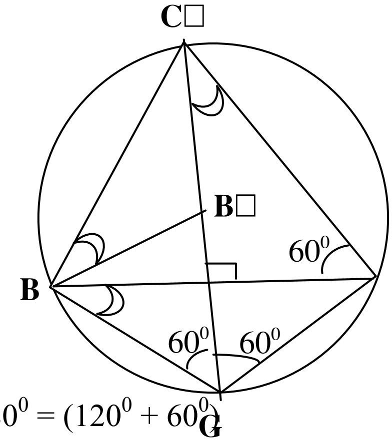
=> CD = C'A = AB => ΔABC' đều

E -> F -> ΔDEF đều

* ΔBCD; ΔAEF dựng phía ngoài tứ giác ABDE

C', G khác phí với AB

H, F' khác phía với DF



=> Tứ giác AGBC' nội tiếp góc BGA + góc B'CA = 180^0 = (120^0 + 60^0)

=> $BC'^2 = C'G^2 + BG^2 - 2BG.C'G.1/2$

$C'A^2 = C'G^2 + GA^2 - 2AG.C'G.1/2$

=> BG^2 – BG . C'G = GA^2 – AG . C'G

<=> (GA - GB) (GA + GB – GC') = 0

* Nếu GA = GB => GC' ⊥ AB => C'K = $\frac{a\sqrt{3}}{2}; GK = BK\,tg30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$GC' = \frac{4a\sqrt{3}}{6} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Cos 30^0 = $\frac{\frac{a}{2}}{GB} \rightarrow BG = \frac{a}{\sqrt{3}} \rightarrow GA + GB = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Vậy có GA + GB = GC'

Trong cả 2 trường hợp → GA + GB = GC'

HE + HD = HF'

Vậy có C'G + GH + HF' ≥ C'F'

Mà C'F' là ảnh CF qua phép BE → C'F'

Vậy GA + GB + GH + HE + HD ≥ C'F

Dấu = khi G, H nằm trên [C'F']

Bài tập 5: Cho ΔABC. Từ đỉnh A ta kẻ trung tuyến AM và phân giác trong AD. Phép đối xứng qua đường thẳng AD biến đường thẳng AM thành AK (K ∈ BC): CMR: $\frac{BK}{CK} = \frac{AB^2}{AC^2}$

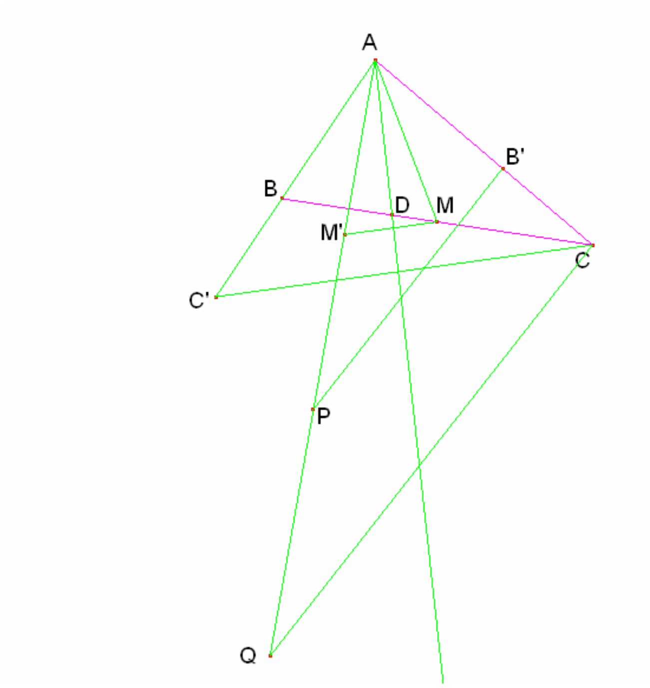
Hướng dẫn học sinh:

+ Gọi P là điểm đối xứng của A qua M'

+ Từ C kẻ đường thẳng // PB' cắt AK tại Q. Từ đó có tứ giác AC'PB' là hình bình hành.

+ áp dụng định lý talet ta có đpcm.

Lời giải:



Đ$_{AD}$: B → B'

C → C'

$M \to M'$

M' là trung điểm B'C', B' $\in$ AC, C' $\in$ AB, M' $\in$ đường thẳng AK

Gọi P là điểm đối xứng của A qua M'

Từ C kẻ đường thẳng // PB' cắt AK tại Q

$\left.\begin{array}{l} M'C' = M'B' \\ M'A = M'P \end{array}\right\} \Rightarrow$ Tứ giác AC'PB' là hình bình hành

$\Rightarrow$ AB // PB' // QC

Theo định lý ta lét: $\dfrac{BK}{KC} = \dfrac{AB}{CQ}$ (1)

Ta có: $\dfrac{CQ}{PB'} = \dfrac{CQ}{C'A} = \dfrac{CQ}{AC} = \dfrac{PB'}{AB'} = \dfrac{AC'}{AB} = \dfrac{AC}{AB}$

Vậy $\dfrac{CQ}{AC} = \dfrac{AC}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{AC}{CQ} = \dfrac{AB}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{CQ} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ (2)

$\Rightarrow$ Từ (1) và (2) $\dfrac{BK}{CK} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD. Từ B ta kẻ các đường thẳng BE vuông góc CD và BK vuông góc AD (E $\in$ CD, K $\in$ AD). Biết KE = a và BD = b (b > a). Tính khoảng cách từ B đến trực tâm Δ BEK.

Hướng dẫn giải

+ Xác định phép tịnh tiến

$T_{\vec{KD}}$: $K \to D$

$H \to E$ (H là trực tâm Δ BKE)

$B \to B'$

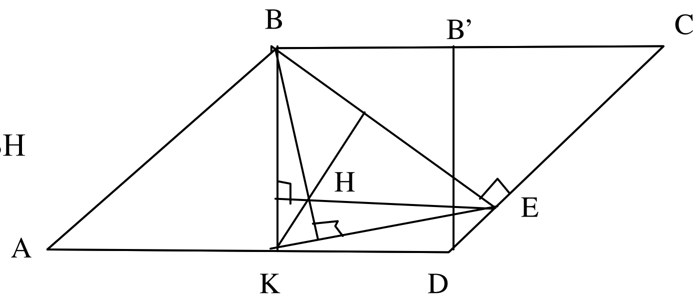
+ Chỉ ra B'E = BH = $\sqrt{b^2 - a^2}$

Lời giải:

Gọi H là trực tâm Δ BEK

Do EH vuông góc BK, EK vuông góc BH

$\Rightarrow \vec{DE} = \vec{KH}$; $\vec{EH} = \vec{KD}$



$T_{\vec{KD}}$: $K \to D$

$H \to E$

$B \to B'$

$BH \to B'E$

Vì BH vuông góc EK nên B'E vuông góc KE

Δ B'EK vuông tại E $\Rightarrow$ B'E^2 = B'K^2 – KE^2

Mặt khác B'K = BD (do tứ giác BB'DK là hình chữ nhật)

Do đó B'K = b vậy B'E – BH = $\sqrt{b^2 - a^2}$

*** Các bài tập rèn luyện kỹ năng:**

Bài 1: Cho Δ ABC và điểm O nằm trong tam giác. Tìm tập hợp điểm M và N thuộc các cạnh tam giác sao cho O là trung điểm của đoạn MN

Gợi ý học sinh:

+ Thực hiện phép đối xứng tâm O.

$Đ_o$: $M \to N$

$A \to A'$

M là điểm chung AB và A'B' (A'B' là ảnh của AB qua $Đ_o$)

N là điểm chung AC và A'C' (A'C' là ảnh của AB qua $Đ_o$)

+ Từ đó suy ra các điểm M, N phải thuộc đoạn AB, AC có thể cả các đỉnh tam giác.

<u>Bài 2</u>: Cho hình bình hành ABCD. Với mỗi điểm M trên cạnh AB ta lấy điểm M_1 đối xứng với M qua đỉnh D, M_2 đối xứng với M_1 qua trung điểm cạnh CD và M_3 đối xứng với M_2 qua B. Tìm tập hợp các điểm M_3 khi M thay đổi trên cạnh AB.

Gợi ý học sinh:

$Đ_D$: $M \to M_1$

$Đ_H$: $M_1 \to M_2$ (H là trung điểm CD)

$Đ_B$: $M_2 \to M_3$

$Đ_K$: $M \to M_3$ (K xác định HK = HD + HB)

Từ đó suy ra tập hợp M_3 là đoạn AB.

<u>Bài 3</u>: Cho đường tròn (O) và hai đường tròn bằng nhau (O_1); (O_2) cùng tiếp xúc với (O) lần lượt tại các điểm A_1, A_2. Trên đường tròn (O) ta lấy điểm M. Các đoạn MA_1, MA_2 cắt lần lượt thứ hai các đường tròn (O_1), (O_2) tương ứng tại điểm B_1, B_2. Chứng minh B_1B_2 // A_1A_2.

Gợi ý học sinh:

+ Gọi đường thẳng x là trung trực của $O_1O_2 \Rightarrow O \in x$

+ $Đ_x$: $O_1 \to O_2$

+ Ta chứng minh dễ dàng:

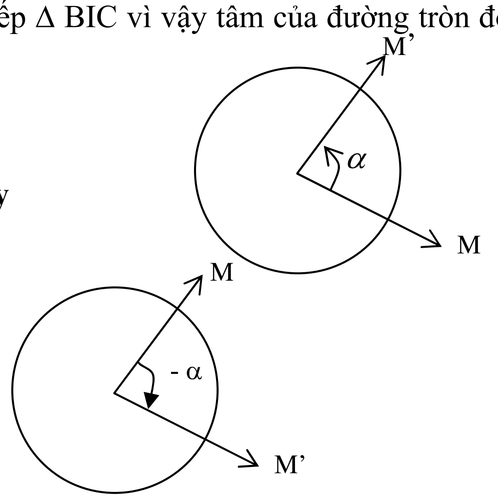
$$\frac{A_1B_1}{A_1M} = \frac{O_1B_1}{OM} = \frac{A_2B_2}{OM} = \frac{A_2B_2}{A_2M}$$

<u>Bài 4:</u> Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp hình tam giác ABC không cân. Đường tròn ngoại tiếp Δ BIC cắt phần kéo dài của các cạnh AB, AC tương ứng tại B' và C'. Chứng minh BB' = CC'.

Gợi ý học sinh:

+ Ta chứng minh AI đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp Δ BIC vì vậy tâm của đường tròn đó cách đều hai dây cung BB' và CC'.

B) Phép quay



I. Định nghĩa: Q_O^{α}: $M \to M'$

Sao cho (OM, OM') = α

OM = OM'

O: tâm quay

α: Góc quay

$/\alpha/ \in [0^o, 180^o]$

II. Tính chất

1. Q_o^{α} có một điểm bất động duy nhất

2. Q_o^{α}: $A \to A'$

$B \to B'$

Thì AB = A'B'; (AB, AB') = α ($0 \le \alpha \le 180^0$)

3. Phép quay biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng.

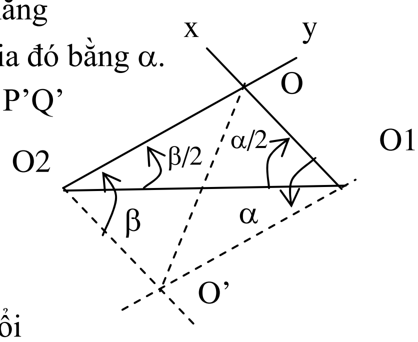
Hệ quả: + Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng

+ Biến tia S_x thành tia $S'_{x'}$ và góc tạo bởi hai tia đó bằng α.

+ Biến đoạn thẳng PQ thành đoạn P'Q': PQ = P'Q'

+ Biến góc thành góc bằng nó

+ Biến đường tròn (I,R) thành (I',R)



III. Mở rộng phép quay tâm O góc quay α: $180^0 < \alpha \le 360^0$:

1. Định nghĩa:

Cho trước điểm O và góc α với $180^0 < \alpha \le 360^0$. Phép biến đổi

$Q = Q_0^{\alpha - 180^0} . Q_0^{180^0}$ là phép quay tâm O với góc quay α kí hiệu là Q_0^{α}.

2. Tính chất:

a. Tính chất 1: Q_0^{α} với $\alpha \in (180^0, 360^0)$

$Q^{\alpha}: M \to M'$ thì $Q_0^{\alpha - 360^0}$: M -> M' và (OM, OM') = $\alpha - 360^0$

b. Tính chất 2:

Cho 2 phép quay Q_{O1}^{α}, Q_{O2}^{β} với 2 tâm quay phân biệt ($O_1 \neq O_2$) và thoả mãn điều kiện $0^0 < \alpha \le 360^0$; $0^0 < \beta \le 360^0$, $\frac{\alpha + \beta}{2} \neq 180^0$

Khi đó Q = $Q_{O2}^{\beta} . Q_{O1}^{\alpha}$ là 1 phép quay với góc quay $\varphi = \alpha + \beta$ và tâm quay O được xác định: $Q_{01}^{\frac{-\alpha}{2}}$: $0_1 0_2$ -> x

$Q_{0_2}^{\beta/2} : O_2 O_1 \to y$ và x cắt y tại O

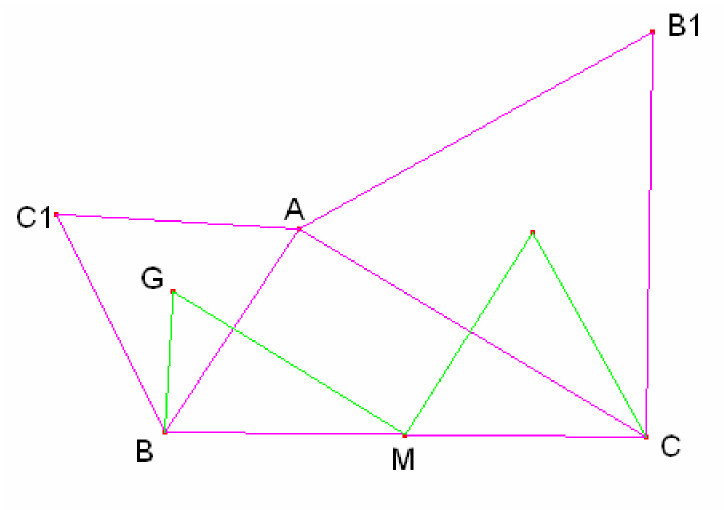
IV. Bài tập áp dụng

<u>Bài tập 1:</u> Cho Δ ABC trên các cạnh AB, AC và về phía ngoài ta dựng các Δ đều ABC_1, ACB_1, ACB_1. Gọi G là trọng tâm Δ ABC_1; M là trung điểm BC, Chứng minh rằng Δ MGB_1 vuông và MB_1= MG $\sqrt{3}$

Hướng dẫn học sinh

- Học sinh có thể chứng minh dựa vào tam giác đồng dạng
- Sử dụng tính chất trích hai phép quay

Lời giải:



$Q_G^{120^0} : B \to A$

$Q_{b1}^{60^0} : A \to C$

$Q_{b1}^{60^0} . Q_G^{120^0} : B \to C$

$Q_M^{180^0} : B \to C \Rightarrow Q_{B1}^{60^0} . Q_G^{120^0}$

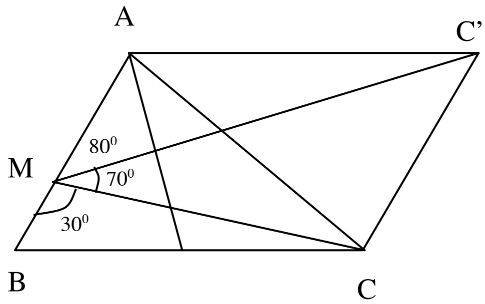
Theo tính chất trên $\Rightarrow$ Góc (GB_1, GM) = - 60^0

$\Rightarrow$ Góc (GM, GB_1) = 60^0; Góc (B_1G, B_1M) = 30^0

$\Rightarrow$ Góc $GMB_1 = 90^0$ $\Rightarrow MB_1 = MG\sqrt{3}$

<u>Bài tập 2:</u> Cho Δ ABC cân (AB = AC). Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho MA = BC. Tính góc BMC.

Hướng dẫn học sinh:



+ Xét phép quay tâm A góc quay là bao nhiêu

+ Xét các tam giác bằng nhau.

Xét Q_A^{60}: C → C'; B, C' nằm về 2 phía AC

Xét Δ MAC' và Δ ABC có MA = BC

AC = AC'

Góc MAC' = $60^0 + 20^0 = 80^0$ = Góc ACB

$\Rightarrow$ Δ MAC' = Δ ABC (c.g.c)

$\Rightarrow$ C'M = C'A = CC' (vì Δ ACC' đều)

$\Rightarrow$ Δ MCC' cân tại C'

Mà C'M = C'A $\Rightarrow$ Δ AMC' cân tại C'

$\Rightarrow$ Góc AMC = góc MAC' = 80^0 $\Rightarrow$ Góc AC'M = 20^0

$\Rightarrow$ Góc AC'C = 40^0

Do Δ MC'C cân tại C' ⇒ Góc CM'C = góc MCC' = $\dfrac{180^0 - 40^0}{2} = 70^0$

⇒ Góc BMC = $180^0 - 70^0 - 80^0 = 30^0$

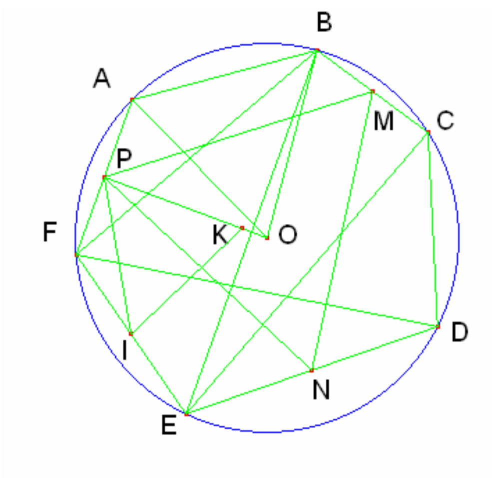
Bài 3: Cho lục giác lồi ABCDEF nội tiếp trong đường tròn (O) có AB, CD, EF bằng bán kính đường tròn. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, DF, AF. Chứng minh rằng Δ MNP đều.

Hướng dẫn học sinh

+ Xét Q_0^{60}

+ Có phép quay Q_P^{60}: N → M khi đó có Δ MNP đều:

Giải:



- Gọi P là trung điểm của AF

- K là trung điểm BE

I là trung điểm EF

Q_0^{60}: B → A

F → E

=> $\overrightarrow{BF} \to \overrightarrow{BE} \Rightarrow \left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{AE}\right) = 60^0 \Rightarrow AE$ cắt BF theo góc nhọn 60^0

Do tứ giác ABEF là hình thang cân

⇒ AE = BF ⇒ PI = IK theo tính chất đường trung bình

⇒ PI cắt IK theo một góc nhọn 60^0 ⇒ Δ PIK đều

Q_0^{60}: F → E

D → C

⇒ $\left(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{EC}\right) = 60^0$ mà $\overrightarrow{IN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{FD}$

$\overrightarrow{KM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EC}$

=> góc $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{KN}\right) = 60^0$ (1)

Mà IN = KM = $\frac{1}{2}$FD = $\frac{1}{2}FD = \frac{1}{2}EC$

-> $Q_P^{60^0} : I \to K$

$N \to N'$

=> $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{KN}\right) = 60^0$ từ (1) -> $\left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{KN}\right) = 60^0 \Rightarrow \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KM} \Rightarrow M \equiv N'$

=> $Q_P^{60^0} : N \to M \Rightarrow \Delta PMN$ đều

Bài tập rèn kỹ năng

Bài 1: Cho hình vuông nội tiếp trong hình bình hành MNPQ, A $\in$ MN, B $\in$ NP, C $\in$ PQ, D $\in$ QM. Gọi M' là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AD, N' là chân đường góc vuông hạ từ N xuống AB, P' là chân đường vuông góc hạ từ P xuống BC, Q' là chân đường vuông góc hạ từ Q xuống CD. CMR tứ giác M'N'P'Q' là hình vuông.

Gợi ý học sinh

+ Xét phép quay $Q_O^{-90^0}$: A $\to$ B; M $\to$ M_1; D $\to$ A; Q $\to$ Q_1

Từ đó $\Rightarrow$ AQ_1 qua trực tâm H của Δ ABN

$Q_O^{-90^0}$: M $\to$ H $\Rightarrow$ [MM'] $\to$ [HN']

AD $\to$ AB M' $\to$ N'

Bài 2: Hai Δ vuông ABC = Δ vuông A'B'C' (Góc C = góc C' = 90^0) được đặt trong mặt phẳng và các đỉnh của 2 tam giác được đánh số theo cùng chiều đường thẳng. Gọi D là giao điểm của các đường thẳng BC và B'C'; E là giao điểm các đường thẳng AC, A'C'. CMR 4 điểm C, D, M, E cùng thuộc một đường tròn.

Gợi ý học sinh

Ta thực hiện phép quay tâm M biến C $\to$ C'

A $\to$ A'

B $\to$ B'

+ Chỉ ra góc CMC' = góc CA'C' = góc CDC'

C- PHÉP TỰ VỊ

I. *Định nghĩa*:

V_O^k: M $\to$ M'

$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ ZZ

O: tâm tự vị

k $\neq$ 0: tỷ số tự vị

k > 0: V_O^kphép tự vị dương

k < 0: V_O^k phép tự vị âm

Đặc biệt k = 0 $\Rightarrow$ ảnh thuộc điểm M đều là 0

II. *Tính chất*

1. Phép V_O^k (k $\neq$ 1) có 1 điểm bất động duy nhất là 0
2. V_O^k: M $\to$ M' $\Rightarrow$ O, M, M' thẳng hàng
3. V_O^k $\left.\begin{array}{l} A \to A' \\ B \to B' \end{array}\right\}$ $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

   (A $\neq$ B)
4. Phép vị tự biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng

Hệ quả: Phép V_O^k biến

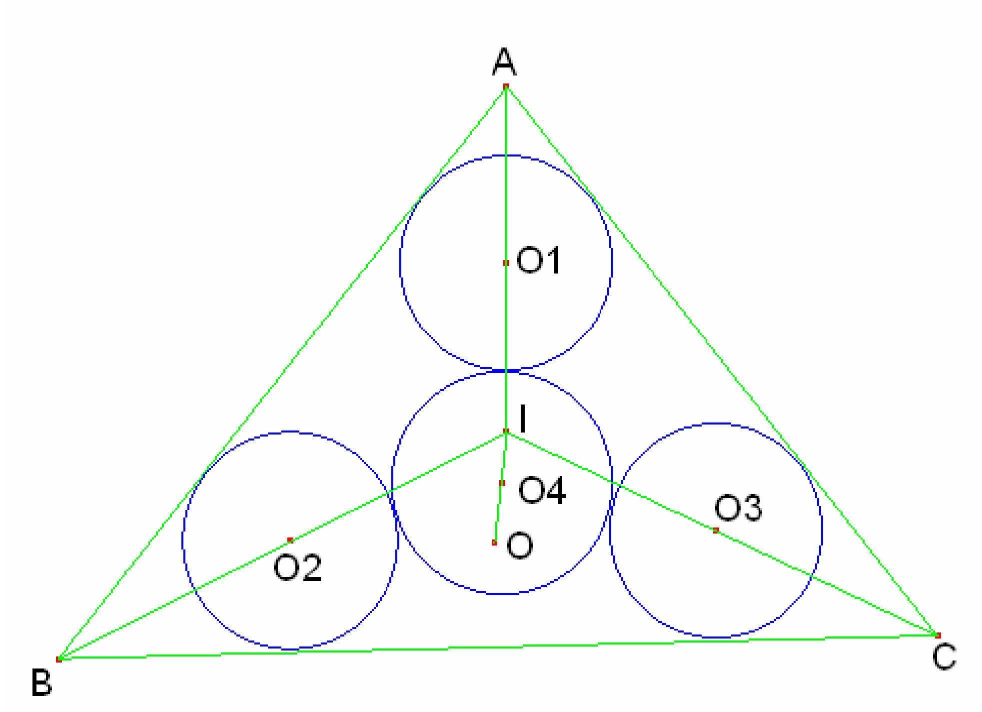
* Biến đường thẳng (d) thành đường thẳng (d') và d'//d hoặc d' ≡ d
* Tia Sx thành tia S'x' và hai tia đó hoặc trùng nhau
* Đoạn PQ thành P'Q': P'Q' = /k/ PQ
* Δ ABC thành Δ A'B'C' và hai tam giác này đồng dạng tỷ số đồng dạng bằng /k/.
* Góc xSy thành góc x'S'y': góc xsy = góc x's'y'
* Biến đường tròn (I,R) thành đường tròn (I',R') và R' = /k/R

Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho Δ ABC bên trong Δ dựng 4 đường tròn (O_1); (O_2); (O_3); (O_4) bằng nhau sao cho 3 đường tròn đầu tiên cùng tiếp xúc với 2 cạnh Δ. CMR tâm đường tròn nội ngoại tiếp Δ ABC và tâm đường tròn (O_4) thẳng hàng.

Gợi ý học sinh

* Xét phép vị tự tâm I tỷ số k
* Dựa vào tính chất V_O^k: M → M' chứng tỏ O, M, M' thẳng hàng



Lời giải:

Ta có IA, IB, IC chứa O_1, O_2, O_3

→ O_1O_2 //AB
O_2O_3 //BC
O_3O_1 //AC

Đặt $\frac{IO_1}{IA} = \frac{IO_2}{IB} = \frac{IO_3}{IC} = \frac{1}{k}$

V_I^k: $O_1 \to A$
$O_2 \to B$
$O_3 \to C$

Do O_4 là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ $O_1O_2O_3$ (vì cách đều 3 điểm).

Tức là: V_I^k: $O_4 \to O \Rightarrow$ I, O_4, O thẳng hàng

Bài 2: (Đề thi HSGQG 2003).

Cho 2 đường tròn cố định (O_1, R_1); (O_2, R_2); $(R_2 > R_1)$ tiếp xúc nhau tại M. Xét điểm A nằm trên (O_2, R_2) sao cho 3 điểm A, O_1, O_2 không thẳng hàng.Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O_1, R_1), (B, C là tiếp điểm). Các đường thẳng MB; MC cắt lần thứ hai đường tròn (O_2, R_2) tương ứng tại E, F. Gọi D là giao điểm EF và tiếp tuyến tại A của (O_1, R_2). CMR điểm D di động trên 1 đường thẳng cố định khi A di động trên (O_2, R_2) sao cho A, O_2, O_1 không thẳng hàng.

Hướng dẫn học sinh:

* Gọi D' là giao 2 tiếp tuyến tại M và A'

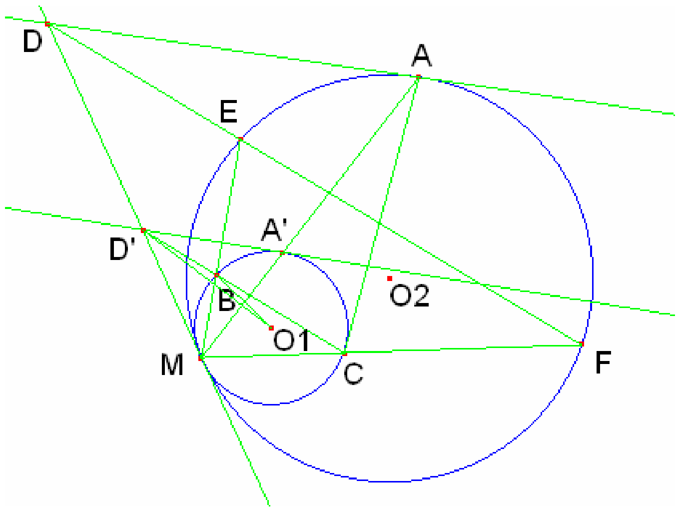
Chứng minh D' thuộc trục đẳng phương BC của 2 đường tròn (O_1) và (O_3).

* Xét phép vị tự $V_M^{\frac{R_2}{R_1}}$: $(O_1, R_1) \to (O_2, R_2)$

$B \to E$

$C \to F$

$BC \to EF$



Lời giải:

* Ta thấy tứ giác ABO_1C nội tiếp đường tròn (O_3)

* Gọi A' là giao điểm thứ hai của AM với (O_1, R_1)

* D' là giao 2 tiếp tuyến tại M và A'

\- Chứng minh D' thuộc trục đẳng phương của BC của (O_1) và (O_3)

⇔ Chứng minh: $P_{D'/(01, R1)} = P_{D'/(03)}$

Vậy D' di động trên tiếp tuyến của đường tròn (O_1, R_1) tại M

$\Rightarrow$ D' $\in$ đường thẳng cố định

Xét $V_M^{\frac{R_2}{R_1}}$: $(O_1, R_1) \to (O_2, R_2)$

$B \to E$

$C \to F$

$BC \to EF$

Tiếp tuyến tại A' $\to$ tiếp tuyến tại A

$\Rightarrow$ D nằm trên đường thẳng MD' là tiếp tuyến với đường tròn (O_1, R_1).

Bài 3: (Đề thi HSGQG năm 2000)

Cho 2 đường tròn (O) và (O’) có bán kinh khác nhau cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với (O) tại P, tiếp xúc (O’) tại P’. Gọi Q, Q’ lần lượt là chân đường thẳng AQ, AQ’ cắt lần thứ hai 2 đường tròn tại M và M’. CMR M, M’, B thẳng hàng.

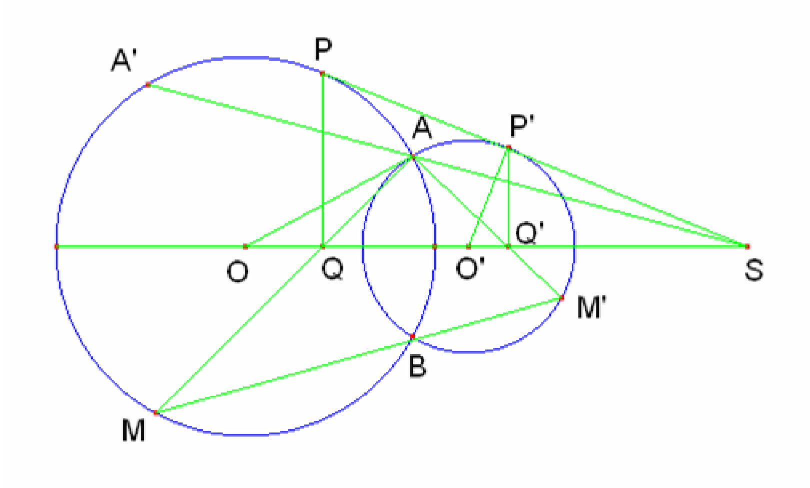
Hướng dẫn học sinh:

* Xét phép vị tự $V_S^{\frac{R_1}{R_2}}$ (S là tâm vị tự ngoài của 2 đường tròn)

* Chứng minh tứ giác AQOA’ nội tiếp

* Chứng minh: Tổng 2 góc bằng $180^0 \Rightarrow$ B, M, M’ thẳng hàng

Lời giải:



2 đường tròn cắt nhau, R ≠ R’, Gọi S là tâm vị tự ngoài của 2 đường tròn

$$\left.\begin{aligned} V_S^{\frac{R_2}{R_1}}: \quad & O \to O \\ & P' \to P \\ & A \to A' \\ & Q' \to Q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Góc } A_2 = \text{Góc } OA'Q$$

Ta lại có: $SP^2 = \overline{SQ}.\overline{SO}$; $SP^2 = \overline{SA}.\overline{SA'}$

$\Rightarrow \overline{SQ}.\overline{SO} = \overline{SA}.\overline{SA'} \Rightarrow$ Tứ giác AQOA’ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow$ Góc A_1 = góc OA’Q (chắn góc QO). Vậy góc A_1 = góc A_2

Do Δ MOA cân và Δ M’O’A’ cân $\Rightarrow$ Góc MOA = góc AOM’

Có Góc $B_1 = 1/2\ (360^0 -$ góc MO’A)

Góc $B_2 = 1/2$ góc M’O’A’

$\Rightarrow$ Góc B_1+ góc $B_2 \Rightarrow$ M, B, M’ thẳng hàng

HU

<u>Bài tập 4</u>: Cho 2 đường tròn (O) và (O’) tiếp xúc với nhau tại A, (O’) nằm trong (O) BC là 1 dây cung của (O) tiếp xúc (O’). Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp ΔABC khi dây BC thay đổi.

Hướng dẫn học sinh

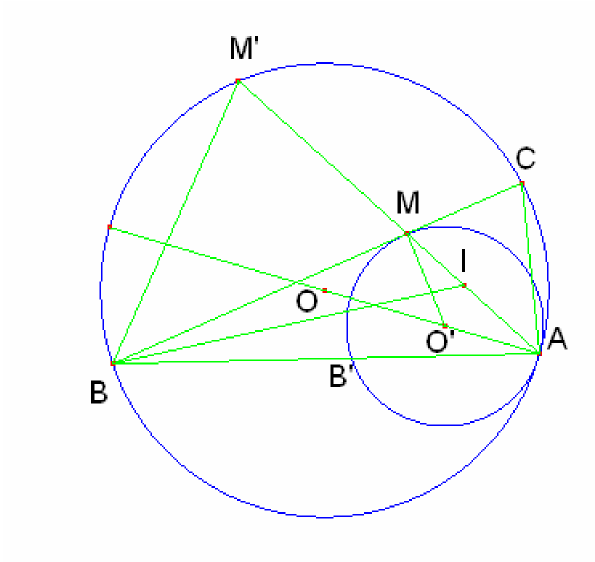
- Xét phép vị tự $V_A^{\frac{R}{R}}$: $\quad O' \to O \quad$ (M là tiếp điểm của BC và (O’))

$\quad M \to M'$

$B \to B'$

- Từ đó xác định phép vị tự $M \to I$

Do M chạy trên đường tròn (O') $\Rightarrow$ I chạy trên đường tròn là ảnh của (O') qua phép vị tự trên.



Lời giải:

$V_A^{\frac{R}{R'}}$: $O \to O'$

$M \to M'$

$\overrightarrow{AO} = \frac{R}{R'}\overrightarrow{AO'}$; M; $\in$ đường tròn (O)

Ta thấy AM là tia phân giác của góc BACư

Vì Góc A = góc C; Góc A_1 = góc B_1

$\left.\begin{array}{l} O'M \,//\, NM' \\ OM \text{ vuông góc } BC \end{array}\right\} \Rightarrow$ OM' vuông góc BC

$\Rightarrow$ OM' là đường kính chia đôi dây BC

$\Rightarrow \Delta$ M'BC cân $\Rightarrow$ Góc C_1 = góc B_1 $\Rightarrow$ Góc A_1 = góc A_2

$\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp Δ ABC thuộc MA

Theo tính chất phân giác

$$\frac{MI}{IA} = \frac{BM}{AB} \Leftrightarrow \frac{AB}{IA} = \frac{BM}{MI} \Leftrightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AI}{IM}$$

PB/ (O') = BM^2 = BB' . BA

$$\Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AI}{IM} = \frac{AB}{\sqrt{BB'.BA}}$$

$V_A^{\frac{R'}{R}} : B' \to B$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{R}{R'}\overrightarrow{AB} \rightarrow AB' = \frac{R'}{R}.AB$$

$$\rightarrow AB = k\,AB' (k = \frac{R}{R'} > 1)$$

$$\rightarrow \frac{AB'}{AB} = k \rightarrow \frac{AB - AB'}{AB} = \frac{1-k}{1}$$

$$BB' = (1-k)\,AB \rightarrow \frac{AB}{\sqrt{BA.BB'}} = \frac{AB}{\sqrt{(1-k)\,AB^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-k}}$$

Ta có:

$$\frac{AI}{IM} = \frac{1}{\sqrt{1-k}} = q \rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{q}{1+q}\overrightarrow{AM}$$

$$\rightarrow V_A^{\frac{q}{1+q}} : M \rightarrow I$$

Vậy I thuộc đường tròn là ảnh (O') qua $V_A^{\frac{q}{1+q}}$

Bài tập rèn kỹ năng

Bài 1: Cho Δ ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC tại M. Gọi N là điểm đối xứng với M qua I, K là giao điểm AN và BC. Ta kí hiệu H là điểm đối xứng với riếp điểm (I) trên AC qua trung điểm cạnh AC. L là điểm đối xứng với tiếp điểm của (I) trên AB qua trung điểm cạnh AB, G là trọng tâm Δ ABC. P là giao HB và CL. Chứng minh rằng P, G, I thẳng hàng.

**** Hướng dẫn học sinh:***

* Gọi A' là trung điểm BC

Phải chứng minh A' là trung điểm MK

Phép $V_A^{\frac{r_2}{r_1}}$: $N \rightarrow K_1$

$I \rightarrow I_1$

Chứng minh $K \equiv K_1$

* Chứng minh ∃ phép tự vị: $V_G^{-2} : I \rightarrow P$

Vậy chứng tỏ G, I, P thẳng hàng

Bài tập 2: Cho 2 đường tròn (C_1), (C_2) cùng tiếp xúc trong với đường tròn (C) tại M với tâm (C_1) nằm trên (C_2) Dây chung của (C_1); (C_2) cắt (C) tại A, B. MA, MB cắt (C_2) tại C và D.

CMR: (C_1) tiếp xúc CD

Hướng dẫn học sinh:

* Chứng minh bài toán phụ: Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc trong (O) tại A, tiếp tuyến của (O_1) tại M cắt (O) ở B và C. AM cắt (O) ở D. Khi đó AD là phân giác góc BAC và $AM.DP = DB^2$.

* Chứng minh B' thuộc trục đẳng phương (C_1) và (C_2)

B thuộc trục đẳng phương (C_1) và (C_2)

Từ đó ⇒ B ≡ B'; D ≡ D'

- Chứng minh: $O_1E = O_1I = R_1$

Bài tập 3: Cho đường tròn (J) tiếp xúc trong với 2 đường tròn ngoại tiếp ΔABC cân ở A đồng thời tiếp xúc với 2 cạnh AB, AC tại M và N. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn MN là tâm đường tròn nội tiếp Δ ABC.

Hướng dẫn học sinh

* Xét phép vị tự

V_A^k: H $\rightarrow$ K

A $\rightarrow$ A Với k = AK/AH

B $\rightarrow$ D

C $\rightarrow$ E

Chứng minh J là tâm đường tròn nội tiếp ΔADE

D.PHÉP NGHỊCH ĐẢO

I. Định nghĩa: O cho trước k $\neq$ O.

Mỗi M $\neq$ O dựng 1 điểm M' $\in$ đường thẳng OM sao cho $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$.

Đây là phép nghịch đảo tâm O, hệ số k biến M $\rightarrow$ M' Kí hiệu: I (0, k): M $\rightarrow$ M'

II. Tính chất

Cho phép nghịch đảo I (0, k) k $\neq$ 0

1. Tính chất 1: Phép I (0, k) là phép biến đổi 1-1

2. Tính chất 2: là phép đồng nhất

Tích I (0, k) . I (0, k)

3. Tính chất 3: I (0, k): A $\rightarrow$ A'

B $\rightarrow$ B'

Thì A'B' = λAB với $\lambda = \dfrac{|k|}{OA.OB}$

4. Tính chất 4: ảnh đường thẳng d đi qua tâm nghịch đảo là chính (d).

5. Tính chất 5: ảnh 1 đường thẳng d đi qua tâm nghịch đảo của đường tròn đi qua tâm nghịch đảo.

6. Tính chất 6: ảnh của 1 đường tròn (C) đi qua tâm nghịch đảo O là 1 đường thẳng (d) không đi qua O và đường thẳng đó song song với tiếp tuyến tại O.

7. Tính chất 7: ảnh của 1 đường tròn (C) không đi qua tâm nghịch đảo O là 1 đường tròn (C'). Đường tròn (C') cũng là ảnh của đường tròn phép vị tự tâm O. Tỷ số α = k/p (với p là $P_o/_{(C)}$).

Bài tập áp dụng:

<u>Bài tập 1</u>: Cho 2 đường tròn (O,R); (O', R') có khoảng cách giữa tâm bằng α (a > 0). Gọi (O_1, R_1) là ảnh của (O,R) trong phép nghịch đảo I (O', R'^2), (O_2,R_2) là ảnh của (O', R') trong phép nghịch đảo I(O, R^2). Tính R_1, R_2 theo R và R',a.

Hướng dẫn học sinh:

* Sử dụng tính chất 7

Lời giải:

I (O', R'^2): C (O,R) $\rightarrow$ C (O_1, R_1)

I (O, R^2): C (O', R') $\rightarrow$ C (O_2; R_2)

$\Rightarrow V_{o'}^{\lambda'}$: C (O, R) $\rightarrow$ C (O_1, R_1)

$$\lambda_1 = \frac{R'^2}{|a^2 - R^2|}$$

Vậy $R_1 = |\lambda_1| R$

$$R_1 = \frac{R_1^{\ 2}}{|a^2 - R^2|}.R$$

$$R_2 = \frac{R^2.R'}{|a^2 - R'^2|}$$

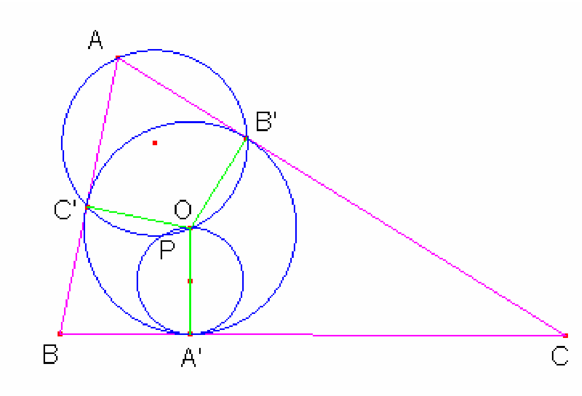
Bài tập 2: Cho Δ ABC không cân và đường tròn tâm O nội tiếp, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A', B', C'. Gọi P là giao điểm thứ hai của 2 đường tròn mà các đường kính là OA và OA'; Q là giao điểm thứ hai của 2 đường tròn mà các đường kính OB và OB', K là giao điểm thứ hai của 2 đường tròn mà các đường kính OC và OC'. CMR: P, Q, K, O cùng nằm trên 1 đường tròn.

Hướng dẫn học sinh:

* Xét phép I (O, R^2)

* Phép nghịch đảo trên biến đường tròn qua tâm nghịch đảo thành 1 đường thẳng.

Lời giải:



Xét I (O, R^2): A' → A vì OA'. OA' = R^2

BC → đường tròn đường kính C [OA'] và ngược lại

I(O,R^2): C → C'

B → B'

đường thẳng B'C' → C [OA'] và ngược lại

⇒ I (O, R^2) O → ∞

P → P'

⇒ P' là giao BC và B'C'

Q' là giao AC và A'C'

K' là giao AB và A'B'

Q → Q'

K → K'

Chứng minh P', Q', K' thẳng hàng theo định lý Mênê nauyt

⇒ O, Q, P, K cùng thuộc đường tròn

Bài tập 3: Cho đường tròn (0, r) nội tiếp trong tứ giác ABCD tiếp xúc với AB, BC, CD, AD tại M, N, P, Q. Biết tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn bán kính R và khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn bằng a. Tính $MP^2 + NQ^2$theo r, R.

Hướng dẫn học sinh:

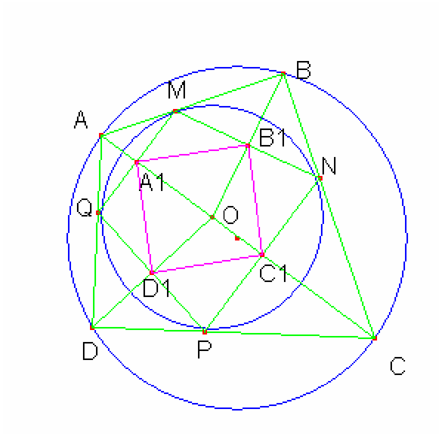
* Xét phép nghịch đảo I(0,r^2)

* Tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình chữ nhật. Gọi x là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ tính x = $\dfrac{r^2.R_1}{R^2-a^2}$

* Chứng minh I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD

* Thiết lập phương trình ẩn a (bậc 2)

Lời giải:



I (0, R^2): $A \to A_1$

$B \to B_1$

$C \to C_1$

$D \to D_1$

A_1, B_1, C_1, D_1 là trung điểm MQ, MN, NP và PQ.

$\Rightarrow$ Tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành

Do A_1B_1 // NQ; B_1C_1 // MP

C_1P_1 // NQ; A_1D_1 // MP

Nếu A, B, C, D cùng thuộc 1 đường tròn thì $A_1B_1C_1D_1$ cũng nằm trên 1 đường tròn $\Rightarrow$ tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình chữ nhật.

Gọi x là tâm đường tròn ngoai tiếp $A_1B_1C_1D_1$

$\Rightarrow NQ^2 + MP^2 = 4b^2 + 4a^2 = 4(b^2 + a^2) = 16x^2$

Gọi đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD là (O_1, R_1)

Gọi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là (O_2, R_2)

$V_o^{\lambda}: O_1 \to O_2$

$\varphi\ (O_1) \to C\ (O_2)$

$R_1 \to R_2 \Rightarrow R_2 = \lambda R_1$

$\lambda = \dfrac{r^2}{P}$; $P_o/(0_1) = R^2 - a^2$ (O trong (O_1))

$\lambda = \dfrac{r^2}{R^2-a^2} \Rightarrow x = \dfrac{r^2R_1}{R^2-a^2}$

Gọi A’, C’ là giao OA, OC và đường tròn ngoại tiếp tứ giác

OA . OA’ = OC . OC’ = $R^2 - a^2$

OA = $\dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$; OC = $\dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}$; $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1$

Do góc A + góc C = 180^0

$$\frac{1}{OA^2} = \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{r^2}\ ;\ \frac{1}{OC^2} = \frac{\sin^2\frac{C}{2}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{r^2}$$

Xét Δ A'OC' gọi I là trung điểm A'C'

* Chứng minh I là tâ, đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD

Vì $S_đ$ góc BA' = $S_đ$Góc DA'; $S_đ$ góc = $S_đ$ C'D

$\Rightarrow$ $S_đ$ góc A'B'C' = $S_đ$ góc A'DC'

Có OA' + OC' = $2OI^2 + 2R^2$

$= 2\,(a^2 + R^2)$

Mặt khác: OA = $\frac{R^2 - a^2}{OA'}$; OC = $\frac{R^2 - a^2}{OC'}$

$\Rightarrow$ Phương trình bậc 2 ẩn a

Bài tập rèn kỹ năng

Bài 1: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp Δ ABC không cân. Giả sử đường tròn này tiếp xúc với BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1…CMR tâm các đường tròn ngoại tiếp Δ AIA_1; BIB_1, CIC_1 thẳng hàng.

Hướng dẫn học sinh:

Xét I (I, r^2): $A_1 \to A_1$

$A \to A_o$

C $IAA_1 \to$ đường thẳng A_1A_0

$CIBB_1 \to$ đường thẳng B_1B_o

C $ICC_1 \to C_1C_o$

Mà A_1A_o, B_1B_o, C_1C_o đồng quy $\Rightarrow$ đpcm

Bài 2: Cho (O,R) và điểm cố định M không trùng với tâm O và không nằm trên đường tròn (O,R). Một đường thẳng d đi qua M cắt đường tròn đã cho tại 2 điểm. Gọi C là giao điểm các tiếp tuyến của đường tròn tại A và B. Tìm tập hợp điểm C khi d biến thiên.

Hướng dẫn học sinh:

I (O, R^2) : H $\to$ C

* ảnh C [OM] là đường thẳng (Δ) qua C qua I (O, R^2)

* Chứng minh: P c/(O) = P c/[OM] $\Rightarrow \Delta \equiv H_1H_2C$

Phần III: KẾT LUẬN

Trên đây là một hệ thống bài tập khi dạy về phép biến hình trong mặt phẳng. Với lượng kiến thức nói trên còn phải bổ sung rất nhiều, nhưng phần nào cũng hình thành được những kĩ năng cơ bản trong việc sử dụng phép biến hình vào việc giải toán trong hình học phẳng. Bài viết còn rất nhiều thiếu sót, rất mong được sự đóng góp của các thày cô giáo.

NHÌN "ĐỆ QUI" QUA LĂNG KÍNH "SONG ÁNH"

Bùi Tuấn Ngọc
THPT Chuyên Trần Phú - Hải Phòng

Xây dựng song ánh để thiết lập công thức truy hồi (đệ qui) từ đó đưa ra kết luận. Đó là phương pháp giải cho một số bài toán tổ hợp sau đây.

Bài 1: Cho n $\in$ N*. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con khác rỗng của tập hợp gồm n số nguyên dương đầu tiên mà mỗi tập không chứa hai số nguyên liên tiếp nào.

Lời giải :

Đặt $A_n = \{1, 2, ..., n\}$

$S_n = \{M \subset A_n \mid M$ không chứa hai số nguyên liên tiếp nào$\}$

$P_n = \{ (a_1, a_2, ..., a_n) \big| a_i \in \{0;1\} \forall i = 1, 2, ..., n, (a_i, a_{i+1}) \neq (1;1) \forall i = 1, 2, ..., n-1 \}$

+ Xét ánh xạ f: $S_n \to P_n$

$$M \mapsto (a_1, a_2, ..., a_n) \in P_n \text{ sao cho } \begin{cases} a_i = 1 khi i \in M \\ a_i = 0 khi i \notin M \end{cases}$$

Vì f là song ánh nên : $|S_n| = |P_n| \forall n \geq 1$

+ Xét ánh xạ g : $P_n \to P_{n-1} \cup P_{n-2} \quad \forall n \geq 3$

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto \begin{cases} (a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \in P_{n-1} khi a_n = 0 \\ (a_1, a_2, ..., a_{n-2}) \in P_{n-2} khi a_n = 1 \end{cases}$$

Vì g là song ánh nên : $|P_n| = |P_{n-1}| + |P_{n-2}| \forall n \geq 3 \Rightarrow |S_n| = |S_{n-1}| + |S_{n-2}| \forall n \geq 3$

Dễ thấy : $|S_2| = 3; |S_1| = 2$. Do đó : $|S_n| = |F_{n+1}| \forall n \geq 1$, ($\{F_n\}$ là dãy Fibônaxi)

$\Rightarrow |S_n| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$ mà $\varnothing \subset S_n$ nên số tập con thoả mãn giả thiết là:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right) - 1$$

Bài 2: Với mỗi n $\in$ N*, kí hiệu H_n là tập tất cả các hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của n số nguyên dương đầu tiên. Xét các tập hợp:

$S_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in H_n : a_i \geq i - 1 \forall i = 1, 2, ..., n\}$

$T_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in S_n : a_i \leq i + 1 \forall i = 1, 2, ..., n\}$

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho: $\frac{|T_n|}{|S_n|} > \frac{1}{3}$

Lời giải:

Đặt $P_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in S_n | a_1 = 1\}$

$Q_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in S_n | a_1 \neq 1\}$

Dễ có: $P_n \cap Q_n = \varnothing, P_n \cup Q_n = S_n$

+ Xét ánh xạ f: $P_n \to Q_n$

$(a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto (a_2, a_1, ..., a_n)$

Vì f là song ánh nên: $|P_n| = |Q_n| = \frac{1}{2}|S_n|$

+ Xét ánh xạ g: $P_n \to S_{n-1}$

$(a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto (a_2 - 1, a_3 - 1, ..., a_n - 1)$

Vì g là song ánh nên: $|P_n| = |S_{n-1}|$

Vậy: $|S_n| = 2|S_{n-1}| \forall n \geq 2$

Mà $|S_2| = 2; |S_1| = 1 \Rightarrow |S_n| = 2^{n-1}$

+ Xét ánh xạ h: $T_n \to T_{n-1} \cup T_{n-2}$

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto \begin{cases} (a_2 - 1, a_3 - 1, ..., a_n - 1) \in T_{n-1} khi a_1 = 1 \\ (a_3 - 2, a_4 - 2, ..., a_n - 2) \in T_{n-2} khi a_1 = 2 \end{cases}$$

Vì h là song ánh nên $|T_n| = |T_{n-1}| + |T_{n-2}|$

mà $|T_2| = 2; |T_1| = 1 \Rightarrow |T_n| = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$

Vậy: $\frac{|T_n|}{|S_n|} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{2^{n-1}} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow n \leq 6.$

Bài 3: (IMO 1987)

Gọi $P_n(k)$ là số các hoán vị của tập $A = \{1, 2, ..., n\}$ (n $\in$N*) có đúng k điểm cố định ($0 \leq k \leq n$).

Chứng minh rằng: $\sum_{k=0}^{n} k.P_n(k) = n!$

Lời giải:

Đặt: M ={(f, i)| f là hoán vị của A giữ nguyên k phần tử, i $\in$A sao cho f(i) = i}

Ta có: $|M| = k.P_n(k)$

Với mỗi $1 \leq i \leq n$: đặt N_i là tập tất cả các hoán vị giữ nguyên k -1 phần tử của tập hợp B = A\ {i} thì $|N_i| = P_{n-1}(k-1)$

+ Xét ánh xạ g: $M \to \bigcup_{i=1}^{n} N_i$

$$(f,i) \mapsto \overline{f} \quad \left(\overline{f}(m) = f(m) \forall m = 1,..,n; m \neq i\right)$$

Vì g là song ánh nên $|M| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} N_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |N_i| \Rightarrow k.P_n(k) = n.P_{n-1}(k-1)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k.P_n(k) = n.\sum_{k=1}^{n} P_{n-1}(k-1) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k.P_n(k) = n.\sum_{j=0}^{n-1} P_{n-1}(j) = n.(n-1)! = n!$$

Bài 4: (VMO 2002)

Cho tập S gồm tất cả các số nguyên $\in [1;n] (n \in N^*)$. T là tập tất cả các tập con khác rỗng của S. Với mỗi A $\in$ T, kí hiệu m(A) là trung bình cộng của tất cả các phần tử thuộc A. Tính: $m = \dfrac{\sum_{X \in T} m(X)}{|T|}$

Lời giải:

\+ Xét song ánh f: T $\to$ T

$$X \mapsto f(X) = \{n+1-x | x \in X\}$$

Vì f là song ánh nên

$$\begin{cases} m(X) + m(f(X)) = n+1, \forall X \in T \\ \sum_{X \in T} m(X) = \sum_{X \in T} m(f(X)) \end{cases} \Rightarrow \sum_{X \in T} [m(X) + m(f(X))] = |T|(n+1) \Rightarrow 2\sum_{X \in T} m(X) = |T|(n+1)$$

Vậy : $m = \dfrac{\sum_{X \in T} m(X)}{|T|} = \dfrac{n+1}{2}$

Bài 5: (VMO 1996)

Cho n, k, m $\in$N* thoả mãn điều kiện 1< k $\le$ n, m > 1. Hỏi có bao nhiêu chỉnh hợp chập k: $(a_1, a_2, ..., a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên mà mỗi chỉnh hợp đó đều thoả mãn ít nhất một trong hai điều kiện sau:

i. $\exists$ i, j $\in$ {1, 2,...,k} sao cho i < j và $a_i > a_j$

ii. $\exists$ i $\in$ {1, 2,...,k} sao cho $a_i - i$ không chia hết cho m

Lời giải:

Đặt A = {tập các chỉnh hợp chập k của (1,2,...,n)}

A* = {tập các chỉnh hợp thoả mãn giả thiết}

B = { $(a_1, a_2, ..., a_k) \in$ A | $a_1 < a_2 < ... < a_k$ và $a_i - i \ \vdots\ m$ $\forall$i = 1,2,...,k}

Dễ thấy A* = A\B

\+ Xét ánh xạ f: B $\to$ B'

$$(a_1, a_2, ..., a_k) \mapsto (a_1 - 1 + m, a_2 - 2 + 2m, ..., a_k - k + km)$$

Khi đó f là song ánh từ B đến B'

với B' = $\left\{(b_1, b_2, ..., b_k) \middle| b_1 < b_2 < ... < b_k, b_i \in \{1, 2, ..., n - k + km\}, b_i \vdots m \forall i = 1, ..., k\right\}$

Do đó $|B| = |B'| = C^k_{\left[\frac{n-k}{m}\right]+k}$

Vậy $|A^*| = |A| - |B| = A^k_n - C^k_{\left[\frac{n-k}{m}\right]+k}$

Một số bài luyện tập:

Bài 6: Tìm tất cả các bộ số nguyên $(a_1, a_2, ..., a_n)$ (n>1) sao cho

$$\begin{cases} |a_i| \le 1, \forall i = 1,2,...,n \\ |a_i - a_{i+1}| \le 1, \forall i = 1,2,...,n-1 \end{cases}$$

Bài 7: Chứng minh rằng $\forall n \in N^*$ ta có:

a. $C_{2n}^n = \sum_{i=0}^{n} \left(C_n^i\right)^2$

b. $\sum_{k=0}^{n} 2^k . C_n^k . C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} = C_{2n+1}^n$

c. $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k . 2^{m-k} + \sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k . 2^{n-k} = 2^{m+n+1}$

Bài 8: (IMO 1996)

Cho bảng ô vuông nxn (n >1). Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu các ô vuông trong bảng sao cho trong mỗi hình vuông 2x2 có đúng 2 ô vuông được đánh dấu.

Bài 9: (VMO 2003)

Với mỗi n $\in N^*$, n ≥ 2, gọi S_n là số các hoán vị $(a_1, a_2, ..., a_n)$ của n số nguyên dương đầu tiên sao cho $1 \le |a_i - i| \le 2 \forall i = 1,2,...,n$

Chứng minh rằng: $1,75 S_{n-1} < S_n < 2S_{n-1}, \forall n > 6$

Bài 10: Giả sử F_k là tập tất cả các bộ $(A_1, A_2, ..., A_k)$ trong đó A_i , i =1,2,...,k là một tập con của tập hợp {1,2,...,n}. TÍnh: $S_n = \sum_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in F_k} \left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right|$

Bài 11: Trong các xâu nhị phân có độ dài n, gọi a_n là số các xâu không chứa ba số liên tiếp 0,1,0. b_n là số các xâu không chứa 4 số liên tiếp 0,0,1,1 hoặc 1,1,0,0. Chứng minh rằng: $b_{n+1} = 2a_n$.

Bài 12: Cho n $\in$N, n>1 và 2n điểm nằm cách đều trên một đường tròn cho trước. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ n đoạn thẳng mà mỗi bộ đều thoả mãn đồng thời:

a. Mỗi đoạn thẳng thuộc bộ đều có đầu mút là 2 trong 2n điểm đã cho
b. Tất cả các đoạn thẳng thuộc bộ đôi một không có điểm chung.

PHÉP VỊ TỰ – QUAY

Họ và tên giáo viên :..........................

Trường THPT Chuyên :........................

Trong bài viết này, tôi sẽ trình bày các kiến thức cơ bản và cần thiết về phép vị tự – quay và việc áp dụng phép vị tự – quay vào giải toán hình học phẳng.

I. Các kiến thức cơ bản và cần thiết:

1. Định nghĩa:

Phép vị tự – quay là tích giao hoán của một phép vị tự và một phép quay có cùng tâm.

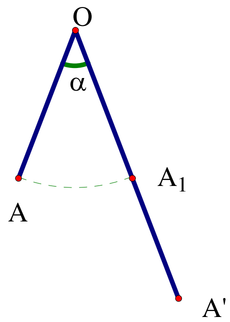
Nhận xét:

+ Thứ tự thực hiện các phép biến hình ở đây không quan trọng, vì $Q_O^\alpha.V_O^k = V_O^k.Q_O^\alpha$

+ Tỉ số của phép vị tự – quay có thể coi là một số dương vì $Q_O^{180^0}.V_O^k = V_O^{-k}$

2. Cách xác định ảnh của một điểm qua phép vị tự – quay:

Cho phép quay Q_O^φ và phép vị tự V_O^k (với k > 0)



Ta có: $Q_O^\alpha : A \mapsto A_1 \Leftrightarrow \begin{cases} OA_1 = OA \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA_1}\right) = \alpha \end{cases}$ (1)

$V_O^k : A_1 \mapsto A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA' = kOA_1 \\ \left(\overrightarrow{OA_1};\overrightarrow{OA'}\right) = 0 \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) cho ta: $\begin{cases} \dfrac{OA'}{OA} = k \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right) = \alpha \end{cases}$ (3)

Như vậy $V_O^k.Q_O^\alpha$ là phép đồng dạng thuận Z(O; α; k) biến A thành A' xác định bởi (3). Khi đó O được gọi là tâm; α gọi là góc quay; k là tỉ số của phép vị tự - quay

3. Tính chất:

Định lí: Z(O; α; k): $A \mapsto A'; B \mapsto B'$ thì $\begin{cases} A'B' = kAB \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha \end{cases}$

Hệ quả:

1) Phép vị tự - quay biến một đường thẳng thành một đường thẳng và góc giữa hai đường thẳng ấy bằng góc đồng dạng

2) Phép vị tự - quay biến một đường tròn thành một đường tròn, trong đó tâm biến thành tâm và tỉ số hai bán kính bằng tỉ số đồng dạng.

4. <u>Cách xác định tâm của phép vị tự – quay:</u>

Cho phép vị tự - quay Z(O; α; k). Hãy xác định tâm O khi biết:

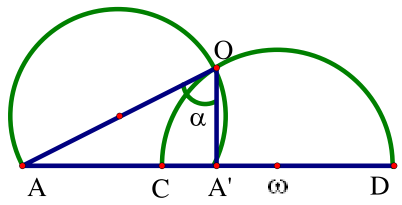
<u>Trường hợp 1</u>: Một cặp điểm tương ứng (A; A'); α và k

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{OA'}{OA} = k & (1) \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right) = \alpha & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow$ O thuộc đường tròn Apôlônius (ω) đường kính CD (C, D chia AA' theo tỉ số k)

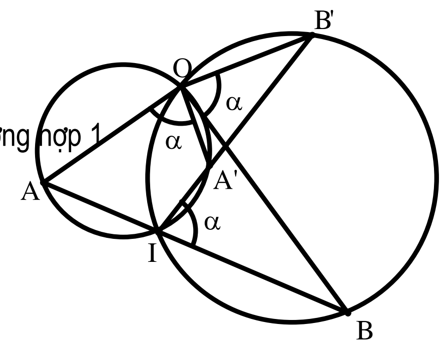
(2) $\Leftrightarrow$ O thuộc cung (C) chứa góc định hướng (mod 2π) nhận AA' làm dây.

Vậy O là giao điểm của (ω) và (C)



Trường hợp 2: Hai cặp điểm tương ứng (A; A') và (B; B')

Ta có: $\begin{cases} A'B' = kAB \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha \end{cases}$. Từ đó ta biết được k và α và quay về trường hợp 1



Cách khác: Gọi I là giao điểm của AB và A'B'

Ta có: $\begin{cases} (OA;OA') = (IA;IA') = \alpha & (1) \\ (OB;OB') = (IB;IB') = \alpha & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow$ O thuộc đường tròn (IAA')

(2) $\Leftrightarrow$ O thuộc đường tròn (IBB')

Vậy O là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp ΔIAA' và ΔIBB'

5. <u>Một kết quả quan trọng:</u>

<u>Định lí:</u> Mọi phép vị tự - quay trong mặt phẳng đều có một điểm bất động duy nhất O và O chính là tâm của phép vị tự - quay đó.

Từ tính chất này, cho phép ta chứng minh các đường tròn ngoại tiếp ΔABC, trong đó A cố định còn B, C di động nhưng luôn là cặp điểm tương ứng của một phép vị tự - quay có góc quay α (không đổi) và tỉ số k (không đổi) luôn đi qua một điểm cố định là tâm O của phép vị tự – quay đó.

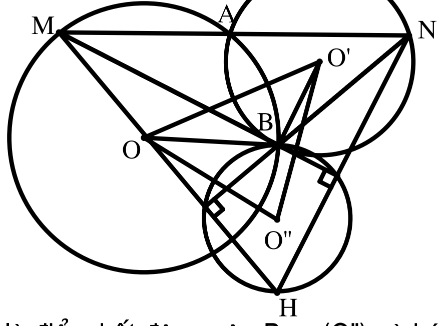
<u>II. ứng dụng của phép vị tự – quay vào việc giải toán hình học.</u>

1. <u>Một số ví dụ:</u>

<u>Ví dụ 1:</u> Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một cát tuyến di động MAN (M $\in$ (O); N $\in$ (O')). Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔBMN?

Hướng dẫn giải:

+ Dễ chứng minh được ΔBMN đồng dạng với ΔBOO’ (1) và cùng hướng hay ΔBMN tự đồng dạng và giữ nguyên hướng. Kẻ trực tâm H của ΔBMN và đặt $k = \dfrac{BH}{BM}$ và $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BH}\right) = \alpha$



+ Do ΔBMN tự đồng dạng nên k, α không đổi và phép vị tự – quay: Z (B, α, k) = $V_B^k.Q_B^\alpha$: M $\mapsto$ H (2)

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm H là đường tròn (O’’) là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự - quay Z (B, α, k) nói trên.

+ Từ (1) ta có O” là trực tâm ΔBOO’ và từ (2) ta có B $\in$ (O) và B là điểm bất động nên B $\in$ (O”) và bán kính của đường tròn ảnh bằng O”B.

Vậy tập hợp điểm H là đường tròn (O”; O”B)

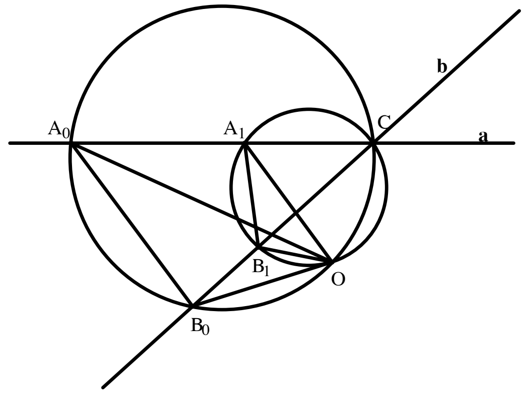
Ví dụ 2: (Đề thi chọn đội tuyển HSG tỉnh Hưng Yên năm 2007 – 2008)

Trên hai đường thẳng a và b cắt nhau tại một điểm C có hai động tử chuyển động thẳng đều với vận tốc khác nhau: A trên a với vận tốc v_1, B trên b với vận tốc v_2, $v_1 \neq v_2$, chúng không gặp nhau ở C.

a) Chứng minh rằng ở bất kì thời điểm nào, đường tròn ngoại tiếp ΔABC cũng luôn đi qua một điểm cố định O nào đó khác C

b) Tìm quỹ đạo chuyển động của động tử M luôn ở vị trí trung điểm của đoạn AB.

Hướng dẫn giải:



a) Giả sử A_0, B_0 là 2 vị trí xuất phát ứng với thời điểm t_0

A_1, B_1 là 2 vị trí của 2 động tử ở thời điểm $t_1 > t_0$

Khi đó $\dfrac{B_0B_1}{A_0A_1} = \dfrac{v_2(t_1 - t_0)}{v_1(t_1 - t_0)} = \dfrac{v_1}{v_0} = k$ (0 < k không đổi)

Gọi O là giao điểm thứ 2 của hai đường tròn (A_0B_0C) và (A_1B_1C)

Dễ dàng chứng minh được: ΔOA_0A_1 đồng dạng với ΔOB_0B_1. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \widehat{A_1OB_1} = \widehat{A_0OB_0} = \alpha \\ \dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{OB_0}{OA_0} = \dfrac{B_0B_1}{A_0A_1} = \dfrac{v_2}{v_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{OA_1};\overrightarrow{OB_1}\right) = \left(\overrightarrow{CA_1};\overrightarrow{CB_1}\right) = \alpha \quad (1) \\ \dfrac{OB_1}{OA_1} = \dfrac{v_2}{v_1} \qquad\qquad (2) \end{cases}$$

(1) chứng tỏ O thuộc cung chứa góc định hướng α (mod 2π) dựng trên A_1B_1 cố định (3)

(2) chứng tỏ O thuộc đường tròn Apôlônius đường kính CD cố định (C, D chia đoạn A_1B_1 theo tỉ số không đổi $\dfrac{v_2}{v_1}$) (4)

Từ (3) và (4) suy ra O là điểm cố định.

b) Kí hiệu A_0 = A (khi t = 0); B_0 = B (khi t = 0); M_0 là trung điểm của đoạn A_0B_0. $\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}$ là hai véc tơ vận tốc của A và B.

Quỹ tích của M là đường thẳng M_0m đi qua M_0 và có véc tơ chỉ phương là $\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right)$ (suy ra từ $2\overrightarrow{M_0M} = \left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right)t$)

Nhận xét:

1) Nếu không dùng góc định hướng thì phải xét hai trường hợp.

2) O chính là tâm của phép vị tự - quay tỉ số k = $\frac{v_2}{v_1}$; góc quay $\left(\overrightarrow{CA_1}; \overrightarrow{CB_1}\right) = \alpha$ biến a thành b, trong đó A_1 biến thành B_1. Vì a, b cố định, k, α không đổi nên O cố định

3) Để chứng minh đường tròn (ABC) luôn đi qua một điểm cố định, trong đó A, B là hai động tử chuyển động, ta cố định hoá hai vị trí nào đó của A, B và xét hai vị trí bất kì A_1; B_1 của hai động tử đó. Sau đó chứng minh giao điểm của (ABC) và (A_1B_1C) là hai giao điểm cố định bằng cách chỉ ra các tính chất đặc trưng (1) và (2) của nó mà ta có thể dựng được.

Ví dụ 3: (Đề dự tuyển IMO năm 1999)

Các điểm A, B, C chia đường tròn Ω ngoại tiếp ΔABC thành ba cung. Gọi X là một điểm thay đổi trên cung tròn AB và O_1; O_2 tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác CAX và CBX. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔXO_1O_2 cắt Ω tại một điểm cố định.

Hướng dẫn giải:

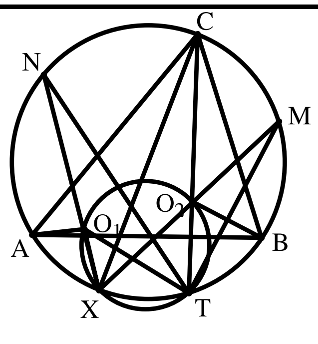
+ Gọi T = $(XO_1O_2) \cap (ABC)$

M = $XO_1 \cap (ABC)$; N = $XO_2 \cap (ABC)$

+ Trên (ABO) ta có: $\widehat{XNT} = \widehat{XMT}$

Trên (XO_1O_2) ta có: $\widehat{XO_1T} = \widehat{XO_2T}$

$\Rightarrow \widehat{TO_1N} = \widehat{TO_2N} \Rightarrow \Delta TO_1N$ đồng dạng với ΔTO_2M



$\Rightarrow \frac{TN}{TM} = \frac{O_1N}{O_2M} = \frac{AN}{BM} = k$ (không đổi) (1)

(dễ chứng minh được ΔNAO_1 và ΔMO_2B cân tại N, M)

+ Dễ thấy $\left(\overrightarrow{TN}; \overrightarrow{TM}\right) = \left(\overrightarrow{TO_1}; \overrightarrow{TO_2}\right) = \left(\overrightarrow{XN}; \overrightarrow{XM}\right) = \alpha (\mathrm{mod}\, 2\pi)$

(không đổi) (2)

Từ (1) suy ra T thuộc đường tròn Apôlônius đường kính

E, F (E, F chia MN theo tỉ số k) (3)

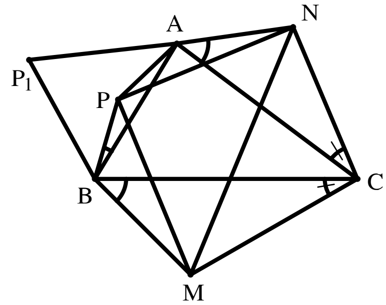
Từ (2) suy ra T thuộc cung chứa góc α (mod 2π) dựng trên đoạn MN cố định (4)

Từ (3) và (4) và do cung (α) đi qua 1 điểm nằm trong và 1 điểm nằm ngoài đường tròn Apôlônius nên chúng cắt nhau tại một điểm cố định T (khác C)

$\Rightarrow$ đpcm

Nhận xét: T chính là tâm của phép vị tự - quay góc α, tỉ số k biến M thành N

Ví dụ 4: Dựng ra phía ngoài một ΔABC ba tam giác bất kì BCM; CAN; và ABP sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{CAN} = 45^0$; $\widehat{BCM} = \widehat{NCA} = 30^0$; $\widehat{ABP} = \widehat{PAB} = 15^0$. Chứng minh rằng ΔMNP vuông cân đỉnh P.



Hướng dẫn giải:

+ Xét tích của hai phép vị tự - quay $Z_2 \circ Z_1$

trong đó $Z_1 = Z(B, \frac{\pi}{4}, k_1)$ và $Z_2 = Z(A, \frac{\pi}{4}, k_2)$

với $k_1 = \frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AN} = \frac{1}{k_2}$ (vì ΔCAN đồng dạng với ΔCBM)

+ Ta có ΔBMC cố định, $\widehat{MBC} = \frac{\pi}{4}$ nên $\begin{cases} \frac{BC}{BM} = k_1 \\ \left(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

do đó $Z_1 = Z(B, \frac{\pi}{4}, k_1)$: $M \mapsto C$ và $P \mapsto P_1$ (ΔBPP_1 đồng dạng với ΔBMC)

+ Lại có ΔCAN cố định, $\widehat{CAN} = \frac{\pi}{4}$ nên $\begin{cases} \frac{AN}{AC} = k_2 \\ \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AN}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

do đó $Z_2 = Z(A, \frac{\pi}{4}, k_2)$: $C \mapsto N$ và $P_1 \mapsto P$

suy ra $Z = Z_2 \circ Z_1$: $M \mapsto N$.

Tích hai phép đồng dạng trên có tỉ số đồng dạng $k = k_2.k_1 = 1$ và $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ nên Z là phép dời hình có một điểm cố định duy nhất P.

Cụ thể là $Q_P^{\frac{\pi}{2}} : M \mapsto N$ nên ta có $\begin{cases} PM = PN \\ \left(\overrightarrow{PM}; \overrightarrow{PN}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Vậy ΔPMN là tam giác vuông cân đỉnh P.

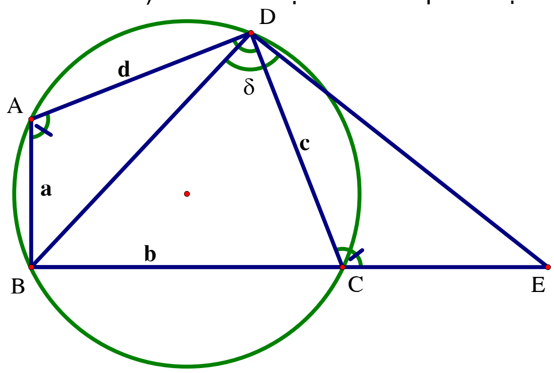
Ví dụ 5: Dựng một tứ giác (lồi) nội tiếp ABCD biết độ dài các cạnh: AB = a; BC = b; CD = c; DA = d, trong đó a, b, c, d là những độ dài cho trước.

Hướng dẫn giải

Phân tích: Giả sử tứ giác ABCD đã dựng được.

ABCD nội tiếp khi và chỉ khi $\widehat{A}+\widehat{C}=180^0$ (hoặc $\widehat{B}+\widehat{D}=180^0$). Kéo dài cạnh BC về phía Cực để xuất hiện $\widehat{DCx}=\widehat{BAD}$ và

kề bù với $\widehat{DCB}$.



Trên tia Cx (tia đối của tia CB) lấy điểm E sao cho ΔDCE đồng dạng với ΔDAB.

Bài toán dựng tứ giác ABCD quay về dựng ΔDCE.

Giả sử ΔDCE đồng dạng với ΔDAB, hai tam giác này chung đỉnh D. Bởi vậy ΔDCE

được suy ra từ ΔDAB bởi phép vị tự - quay Z(D, $\varphi=(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})$, k = $\frac{c}{d}$)

Bởi vậy, đặt k = $\frac{c}{d}$; $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC})=\widehat{ADC}=\delta$.

Xét phép vị tự - quay Z(D; δ; k)

Ta có Z: D $\mapsto$ D; A $\mapsto$ C và B $\mapsto$ E sao cho E $\in$ [BE]. Khi đó ΔDCE đồng dạng với ΔDAB và do đó $\widehat{DCE}=\widehat{DAB}$ và B, C, E thẳng hàng theo thứ tự đó, đồng thời ta được $\widehat{BDE}=\widehat{ADC}=\delta$.

Bài toán trở thành dựng ΔDBE có các yếu tố đã biết: BC = b; CE = $\frac{ca}{d}$, do đó $BE=\frac{ac+bd}{d}$; CD = c; $\frac{DE}{DB}=\frac{c}{d}$

Ta cần dựng điểm D là một điểm trong các giao điểm của đường trong γ_1(C; c) và đường tròn Apôlônius (γ_2) có đường kính IJ mà I, J chia trong và chia ngoài đoạn BE theo tỉ số k = $\frac{c}{d}$. Đỉnh A được dựng sau cùng.

<u>Biện luận:</u> Bài toán có thể có 1 nghiệm hình hoặc không có nghiệm hình nào tuỳ vào (γ_1) và (γ_2) có cắt nhau hay không.

<u>2. Một số bài tập tự luyện.</u>

<u>Bài 1:</u> (Đề thi HSG QG năm 1999 – 2000)

Trên mặt phẳng cho trước hai đường tròn $(O_1; r_1)$ và $(O_2; r_2)$. Trên đường tròn $(O_1; r_1)$ lấy một điểm M_1 và trên đường tròn $(O_2; r_2)$ lấy điểm M_2 sao cho đường thẳng O_1M_1 cắt O_2M_2 tại một điểm Q. Cho M_1 chuyển động trên $(O_1; r_1)$, M_2 chuyển động trên $(O_2; r_2)$ cùng theo chiều kim đồng hồ và cùng với vận tốc góc như nhau.

1) Tìm quỹ tích trung điểm đoạn thẳng M_1M_2

2) Chứng minh rằng giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp ΔM_1QM_2 và ΔO_1QO_2 là một điểm cố định.

<u>Bài 2:</u> (Đề thi chọn đội tuyển HSG tỉnh Hưng Yên năm 2004 – 2005)

Cho đường tròn (O), dựng đường tròn (ω) mà O nằm trong đường tròn (ω). Một tam giác ABC cân tại A di động nhưng luôn giữ nguyên dạng và hướng A di động trên (ω); B, C di động trên (O). Các đường thẳng AB; AC cắt (ω) tại I, J.

1) Chứng minh rằng I và J là các điểm cố định

2) Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc M, N của I, J trên BC. Có nhận xét gì về quỹ tích đó.

Bài 3:

Dựng một tứ giác lồi ABCD biết tổng độ lớn hai góc đối diện $\widehat{A}+\widehat{C}=\theta$ và độ dài các cạnh AB = a; BC = b; CD = c; DA = d

Bài 4:

Cho đường tròn (O_1; R_1) và (O_2; R_2) cắt nhau ở A và B. Hai động tử M_1 và M_2 xuất phát từ A lần lượt chuyển động tròn đều trên (O_1) và (O_2) theo cùng 1 hướng, sau một vòng trở lại A cùng một lúc.

1) Chứng minh rằng trong mặt phẳng có một điểm P duy nhất luôn cách đều M_1 và M_2 ở mọi thời điểm. (đề thi IPQ, London 1979)

2) Tìm quỹ tích trọng tâm G, trực tâm H của ΔAM_1M_2

Bài 5: (Bài toán Napoléon)

Lấy các cạnh của ΔABC bất kì làm đáy, dựng ra phía ngoài ΔABC ba tam giác đều BCA'; CAB' và ABC'. Chứng minh rằng các tâm A_0; B_0; C_0 của ba tam giác đều vừa dựng là các đỉnh của một tam giá đều.