

ĐỀ HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

MÔN : TOÁN 8

NĂM HỌC 2012-2013

Câu 1.

- a) Phân tích các đa thức ra thừa số:

$$x^4 + 4$$

$$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$$

- b) Giải phương trình: $x^4 - 30x^2 + 31x - 30 = 0$

- c) Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

$$A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

Câu 2. Cho biểu thức :

- a) Rút gọn biểu thức A

- b) Tính giá trị của A , biết $|x| = \frac{1}{2}$

- c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

- d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD . Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$.

- a) Chứng minh: $DE = CF$

- b) Chứng minh ba đường thẳng : DE, BF, CM đồng quy

- c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

Câu 4.

- a) Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

- b) Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\begin{aligned}
 x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \\
 &= (x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24 \\
 &= (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\
 &= \left[(x^2 + 7x + 11)^2 - 1 \right] - 24 \\
 &= (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\
 &= (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\
 &= (x + 1)(x + 2)(x^2 + 7x + 16)
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 x^4 - 30x^2 + 31x - 30 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x - 5)(x + 6) &= 0 (*) \\
 x^2 - x + 1 &= \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \\
 \Rightarrow (*) &\Leftrightarrow (x - 5)(x + 6) = 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -6 \end{cases} \\
 \forall i &
 \end{aligned}$$

c) Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$; rút gọn $\Rightarrow dpcm$

Câu 2.

a) Rút gọn được kết quả $A = \frac{-1}{x-2}$

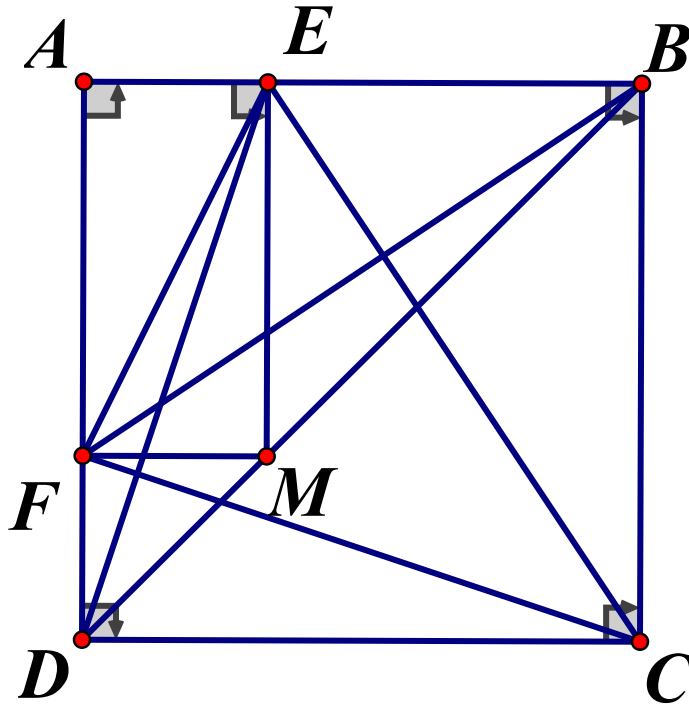
$$|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$$

b)

c) $A < 0 \Leftrightarrow x > 2$

d) $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}$

Câu 3.



- a) Chứng minh: $AE = FM = DF \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow dfcm$
 b) DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow dfcm$
 c) Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi
 $\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi
 $\Rightarrow S_{AEMF} = ME \cdot MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ ($AEMF$ là hình vuông)
 $\Rightarrow M$ là trung điểm của BD .

Câu 4.

$$a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

a) Từ

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Dấu "=" xảy ra

$$(a^{2001} + b^{2001}).(a + b) - (a^{2000} + b^{2000}).ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + b) - ab = 1 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

b)

$$a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(tm) \\ b = 0(ktm) \end{cases}$$

Với

$$b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = 0(ktm) \end{cases}$$

Với

$$\text{Vậy } a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$