LỜI NÓI ĐẦU

Trước đây, Tuyển tập 30 năm Toán học và Tuổi trẻ đã ra mắt bạn đọc và được độc giả cả nước nồng nhiệt đón nhận. Do khuôn khổ của cuốn sách, trong Tuyển tập 30 năm mới chỉ in được các bài từ năm 1964 cho đến giữa năm 1991. Nhiều bạn đọc có nguyện vọng được đọc các bài sau này. Vì vậy, chúng tôi xuất bản tiếp **Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.** Cuốn sách này tập hợp các bài viết và bài toán trên Toán học và Tuổi trẻ từ cuối năm 1991 đến năm 1995.

Sách chia làm hai phần. Phần thứ nhất là các bài viết chọn lọc xếp theo các chủ đề. Phần thứ hai là các bài toán xếp theo các phân môn : Số học, Giải tích và Đại số, Hình học - Lượng giác.

Cuốn sách dùng làm tài liệu tham khảo cho các thầy, cô giáo toán, các bạn học sinh yêu toán, các cán bộ chỉ đạo chuyên môn ở các Sở, Phòng Giáo dục và những ai yêu thích Toán học. Chúng tôi hi vọng rằng đây là một quyển sách tham khảo bổ ích cho các trường trung học. *Toán học và Tuổi trẻ* sẽ còn đáp ứng nhu cầu của bạn đọc với tuyển chọn bài viết và đề toán trong các năm tiếp theo.

Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ra mắt bạn đọc nhân dịp kỉ niệm 40 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Hi vọng Tuyển tập được bạn đọc gần xa đón nhận.

Sách có thể còn những thiếu sót. Mong bạn đọc chỉ cho những sai sót để lần tái bản sau được tốt hơn. Mọi thư từ góp ý xin gửi về địa chỉ :

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

187B Giảng Võ

HÀ NỘI

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phần thứ nhất

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI VIẾT

Chương I

DÀNH CHO

TRUNG HỌC CƠ SỞ

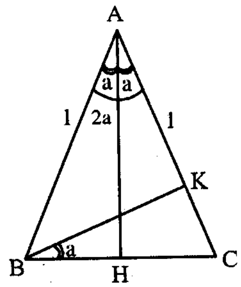
VỚI KIẾN THỨC VỀ TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC Ở LỚP 8, HÃY THỬ TẬP TÌM TÒI SÁNG TẠO

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN

THCS Hồng Bàng - Hải Phòng

Ở lớp 8 đã học về tỉ số lượng giác của một góc nhọn. Những bạn yêu toán chắc không thoả mãn với các kiến thức ít ỏi đó. Chờ lên các lớp trên rồi sẽ học cũng được, những tốt hơn hết là nên thử sức mình một chút, cố gắng dùng bộ óc của các bạn để tìm tòi.

Khi đã biết các tỉ số lượng giác của một góc nhọn a thì dĩ nhiên người ta muốn từ đó suy ra các tỉ số lượng giác của những góc gần gũi với a. Trước hết là góc phụ với a : $90^\circ - a$; điều này bài giảng đã cho biết. Góc bù với a chăng ? Nhưng a nhọn nên $180^\circ - a$ lại tù. Sự gò bó này thúc đẩy ta muốn mở rộng tỉ số lượng giác cho các góc tù. Vấn đề này hãy tạm để đấy và bây giờ xin tận dụng các hiểu biết về tỉ số lượng giác các góc nhọn. Vậy ngoài góc $90^\circ - a$, còn những góc gì đáng chú ý ? Góc $2a$ chẳng hạn (với điều kiện $a < 45^\circ$ để $2a$ nhọn). Ta hãy thử xem : lẽ tự nhiên ta dựng góc a và góc $2a$ ở một vị trí thuận lợi nhất cho việc nghiên cứu đó là dựng góc $2a$ rồi dùng phân giác trong chia nó ra thành hai góc, mỗi góc bằng a (h.1). Để có các tỉ số lượng giác của a, ta dựng đường vuông góc với phân giác và có tam giác cân ABC (h.1). Để có các tỉ số lượng giác của $2a$ ta dựng $BK \perp AC$. Để cho tiện ta sẽ chọn AB (hoặc AC) làm đơn vị dài. Thế thì $\sin a = HC$, $\cos a = AH$, $\sin 2a = BK$, $\cos 2a = AK$. Vấn đề là tìm các mối quan hệ giữa một bên là HC, HA và một bên là BK, AK. Ta chú ý đến hai tam giác vuông đồng dạng AHC và BKC.



Hình 1

$$\frac{AH}{BK} = \frac{HC}{KC} = \frac{AC}{BC} \qquad (*)$$

từ đó :

$$BK.AC = AH.BC$$

hay

$$BK.1 = AH.2HC$$

hay

$$\boxed{\sin 2a = 2\sin a \cos a} \qquad (1)$$

Cũng từ (*) suy ra :

$$HC.BC = KC.AC$$

hay $$HC.2HC = (1 - AK).1$$

hay $$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$$

$$\boxed{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a} \qquad (2)$$

Thay $\sin^2 a$ bằng $1 - \cos^2 a$ (thay cả hai hoặc chỉ thay một) ta còn có thể viết (2) dưới dạng :

$$\boxed{\cos 2a = 2\cos^2 a - 1} \qquad (2')$$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a} \qquad (2'')$$

Có sin2a và cos2a thì tính ngay được tg2a :

$$\mathrm{tg}\, 2a = \frac{2\sin a \cos a}{\cos^2 a - \sin^2 a} \ ;$$

đem chia cả tử số và mẫu số ở vế sau cho $\cos^2 a$, ta được :

$$\boxed{\mathrm{tg}\, 2a = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}} \qquad (3)$$

Các bạn thấy không. Lòng ham muốn tự mình tìm tòi rất quan trọng. Khi đã có lòng ham đó thì quả thật, ở đây, về mặt toán hoặc không có khó khăn gì đáng kể mà được ngay ba chiến quả (1), (2), (3). Dĩ nhiên là phải khuếch trương chiến quả. Tính được các tỉ số lượng giác của $2a$ thì dĩ nhiên sẽ tính được các tỉ số lượng giác của $4a$, *rồi* $8a$... $2^n a$ (miễn là n và a phải làm sao cho $2^n a < 90^o$)(*). Một hướng ngược lại là tính các tỉ số lượng giác của các góc $\frac{a}{2}$ rồi $\frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \ldots, \frac{a}{2^n}$. Ví dụ, công thức (2') cho ta :

$$\cos 30^o = 2\cos^2 15^o - 1$$

hay $$\cos^2 15^o = \frac{1 + \cos 30^o}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

Vậy $$\cos 15^o = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Để khuếch trương chiến quả, tư duy phải rất năng động. Chỉ đường ngay, mực thẳng : gấp 2, gấp 4, gấp 8,..., chia đôi, chia 4, chia 8... thì chưa ăn thua. Chẳng hạn gấp đôi dính với gấp ba, gấp năm vì 3 = 2 + 1 ; 5 = 2.2 +1. Mà hai góc phụ cộng với nhau bằng 90°. Do đó, ta nghĩ đến $2a + a = 90^o$ (trường hợp này không cho gì mới vì ta sẽ có $a = 30^o$), $4a = a = 90^o$ tức $a = 18^o = \frac{36^o}{2}$, $4a = 72^o = 2.36^o$; áp dụng các công thức (1) và (2), ta sẽ đi đến phương trình :

$$8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0 \ \ (x = \cos 36^o) \qquad (4)$$

(*) Sự hạn chế này càng làm cho chúng ta muốn mở rộng các tỉ số lượng giác không những chỉ cho góc tù mà còn rộng hơn nữa. Nhưng đó lại là một đề tài khác.

Đừng thấy phương trình bậc 4 mà hoảng sợ. Hãy bình tĩnh nghiên cứu vế thứ nhất của (4) :

$$8x^2(x^2-1)+x+1=(x+1)[8x^2(x-1)+1].$$

Vậy (4) có một nghiệm $x_1 = -1$.

Ba nghiệm còn lại là nghiệm của phương trình bậc ba :

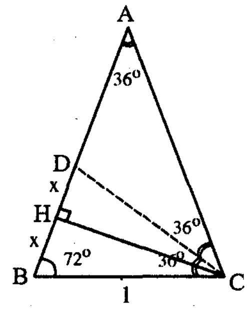
$$8x^2(x^2-1)+1=0 \text{ hay } 8x^3-8x^2+1=0.$$

Cũng đừng thấy bậc ba mà hoảng. Vế đầu có thể viết

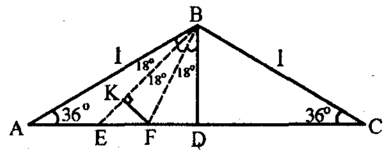
$$(2x)^3-2(2x)^2+1=0$$

Đặt $2x = X$, ta có phương trình $X^3 - 2X + 1 = 0$ có một nghiệm rõ rệt $X = 1$. Vậy phương trình bậc ba có nghiệm $x_2 = \frac{1}{2}$. Biết được hai nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{1}{2}$ của (4), ta tính dễ dàng hai nghiệm còn lại :

$x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Chỉ có x_2 và x_3 là dương ; nhưng $x_2 = \frac{1}{2}$ là $\cos 60^o$. Vậy $\cos 36^o = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Cách giải này hơi dài, nhưng giải được (4) cũng là điều lí thú. Ta nghĩ xem có cách gì tìm $\cos 36^o$ gọn hơn không. Vì góc 36^o đã xuất hiện một cách tự nhiên nên ta nghĩ rằng nó phản ánh một cái gì đó tự nhiên trong một tam giác nào đó. Ta thử dựng một tam giác cân *ABC* có góc ở đỉnh *A* bằng 36^o (h.2) và mỗi góc ở đáy bằng 72^o. Vì $72 = 2.36$ nên ta dựng phân giác *CD* của góc *C*. Để đưa được tỉ số lượng giác vào ta kẻ thêm đường cao *CH*. Bạn sẽ phát hiện ra nhiều quan hệ đặc biệt giữa các góc và các đoạn thẳng giúp bạn tính ra dễ dàng $\cos 36^o = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Như vậy, đây là cách giải phương trình (4) bằng hình học. Ta lại tiếp tục tiến công : 36^o là góc phụ của 54^o mà 54^o gấp đôi 27^o và gấp ba 18^o vv... Những mối quan hệ đặc biệt đó gợi mở ra nhiều suy nghĩ. Chẳng hạn, ta có thể dựng ra một tam giác ABC (h.3) cân, có mỗi góc ở đáy bằng 36^o và góc ở đỉnh bằng $108^o = 2.54^o$. Những mối quan hệ đặc biệt trên hình đó cho ta một cách chứng minh hình học rất đơn giản rằng $\cos 36^o > \text{tg}36^o$, điều mà ta có thể kiểm tra lại bằng tính toán lượng giác. Đến đây chưa phải là hết nhưng xin tạm dừng bằng một kết luận : từ những định nghĩa hết sức đơn giản về tỉ số lượng giác một góc nhọn, chỉ cần có lòng ham tìm tòi bộ óc của bạn cũng lôi ra được nhiều kiến thức mà trước đây có thể bạn chưa biết, giống như nhà ảo thuật lôi ra từ nắm tay không biết bao nhiêu là thứ.



Hình 2



Hình 3

Các bạn hãy tập làm nhà ảo thuật.

THỬ MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

VŨ QUỐC LƯƠNG
THCS Chu Văn An, Hà Nội

Các bạn trẻ thân mến ! Chắc các bạn đã từng gặp bài toán hay sau : *Cho tam giác đều BAC, M là một điểm tuỳ ý trong tam giác. Gọi MH_1, MH_2, MH_3 là các khoảng cách từ M tới 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng $MH_1 + MH_2 + MH_3 = k$ (*) trong đó k là một hằng số không phụ thuộc điểm M.*

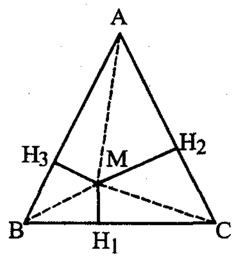
Chứng minh (xem hình 1). Ta có

$$S_{\Delta BMC} + S_{\Delta AMC} + S_{\Delta ABM} = S_{\Delta BAC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2}(MH_1 + MH_2 + MH_3) = \frac{a}{2}.h,$$

trong đó a và h là cạnh và đường cao của tam giác đều BAC

$\Rightarrow MH_1 + MH_2 + MH_3 = h$ (đpcm)

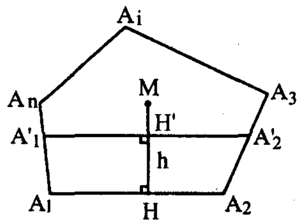


Hình 1

Lời giải bài toán không quá khó khăn, nhưng một "băn khoăn mới" đến với chúng ta một cách tự nhiên sau khi giải xong bài toán là : liệu có còn đa giác nào có tính chất (*) kì lạ như vậy không ? Để có thể nghiên cứu bài toán tổng quát, ta đưa ra định nghĩa sau :

Định nghĩa : Đa giác lồi $A_1, A_2...A_n$ gọi là một *đa giác hằng số* nếu như tổng các khoảng cách từ một điểm M nằm ở miền trong của đa giác tới các cạnh của nó là một hằng số không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Vấn đề đặt ra là : chỉ ra "dấu hiệu" để nhận biết một đa giác cho trước có phải là đa giác hằng số hay không ?



Hình 2

Phân tích lời giải ở trên, ta thấy cách giải đó hoàn toàn áp dụng được cho những đa giác lồi có tất cả các cạnh bằng nhau. Nói cách khác đa giác lồi có tất cả các cạnh bằng nhau (đương nhiên cả đa giác lồi đều) là đa giác hằng số. Đến đây ta có thể đưa ra giả thuyết : phải chăng, các đa giác hằng số là những đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau hoặc tất cả các góc bằng nhau ? Thế nhưng hình bình hành là một tứ giác hằng số (bạn đọc có thể dễ dàng kiểm tra lại) mà không thoả mãn điều kiện nào cả trong 2 điều kiện đó. Vậy vấn đề cơ bản là ở chỗ nào ? Ta có nhận xét quan trọng sau : Nếu đa giác $A_1 A_2...A_n$ là một đa giác hằng số thì khi ta kẻ một đường thẳng song song với một cạnh của đa giác, chẳng hạn $A'_1A'_2$ (xem hình 2), thì đa giác mới thu được : $A'_1A'_2A_3...A_n$, nếu lồi, cũng là một đa giác hằng số.

Thật vậy $\sum_{i=1}^{n} MH_i$ và $\sum_{i=1}^{n} MH'_i$, chỉ sai khác nhau một hằng số h (bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song A_1A_2 *và* $A'_1A'_2$). Do đó nếu $A_1A_2A_3...A_n$ là đa giác hằng số, thì $A'_1A'_2A_3...A_n$ cũng là đa giác hằng số. Từ nhận xét này, ta dễ dàng chứng minh định lí sau :

Định lí 1 : *Nếu hai đa giác lồi có các cạnh tương ứng song song thì chúng cùng là đa giác hằng số hoặc không.*

Từ định lí 1, ta có thể thu được kết quả tổng quát hơn sau đây :

Định lí 2 : *Nếu hai đa giác giác lồi có các góc tương ứng bằng nhau thì chúng cùng là đa giác hằng số hoặc không.*

Đến đây chúng ta có thể khẳng định : Điều kiện tất cả các cạnh bằng nhau hoặc tất cả các góc bằng nhau chỉ là *điều kiện đủ mà không cần để một đa giác lồi là đa giác hằng số.* (Chú ý là : Hình bình hành ở trên chỉ là một phản ví dụ cho trường hợp tứ giác mà chưa thể là phản ví dụ cho trường hợp tổng quát được). Những điều kiện đủ không làm chúng ta thoả mãn ; cần cố gắng tìm được điều kiện cần và đủ để một đa giác lồi là đa giác hằng số.

Mỗi khi lao vào một vấn đề mới, ta phải nhìn lại toàn bộ vấn đề đã biết, xuất phát từ những nhận xét đơn giản, rời rạc để đi những kết luận tổng quát nhất. Ta xuất phát từ những nhận xét đơn giản sau : Nếu M, M' là 2 điểm nằm trong đa giác lồi $A_1A_2 \ldots A_n$, M'' là trung điểm đoạn MM' thì $\sum_{i=1}^{n} M''H_i'' = \frac{\sum_{i=1}^{n} MH_1 + \sum_{i=1}^{n} M'H_i'}{2}$. Vậy nếu tổng $\sum_{i=1}^{n} MH_i = \sum_{i=1}^{n} M'H_i' = k$ thì tổng $\sum_{i=1}^{n} M''H_i'' = k$. Ta hi vọng rằng nếu $\sum_{i=1}^{n} MH_i = \sum_{i=1}^{n} M'H_i' = k$ thì mọi điểm M'' nằm trên đường thẳng MM' đều có tính chất như vậy, nghĩa là: $\sum_{i=1}^{n} M''H_i'' = k$. Điều này đúng và có thể chứng minh được nhờ định lí Talét.

Chú ý rằng : Đối với những điểm $M'' \in MM'$ nhưng nằm ngoài đa giác thì khoảng cách từ M'' tới các cạnh của đa giác cần được "mở rộng" thành độ dài đại số mà dấu được xác định như sau : Mỗi cạnh của đa giác kéo dài chia mặt phẳng thành hai miền. Khoảng cách từ M'' tới cạnh đó là dương hay âm tuỳ theo M'' cùng phía hay khác phía so với miền trong của đa giác. Với sự "mở rộng" này, ta không cần gò bó điểm M phải nằm ở miền trong của đa giác nữa. Từ nhận xét này ta tiến đến kết quả đẹp sau :

Định lí 3 : *Điều kiện cần và đủ để một đa giác là đa giác hằng số là có ba điểm không thẳng hàng, mà tổng các khoảng cách từ mỗi điểm tới các cạnh của đa giác là bằng nhau.*

Điều kiện cần là hiển nhiên. Điều kiện đủ xin dành cho bạn đọc chứng minh dựa vào nhận xét ở trên.

Định lí 3 phản ánh mối liên hệ sâu sắc giữa toàn bộ các điểm của mặt phẳng với 3 điểm không thẳng hàng xác định mặt phẳng chứa đa giác hằng số, đồng thời cũng cho ta một phương pháp kiểm tra xem một đa giác cho trước có phải là đa giác hằng số hay không. Cuối cùng tác giả lưu ý rằng : trong hình 1, ta còn có kết quả : $BH_1 + CH_2 + AH_3$ = hằng số. Điều này có thể tổng quát hoá như thế nào ? Đó là một vấn đề mới mà các bạn có thể bắt tay nghiên cứu. Chúc các bạn thành công trong học tập, nghiên cứu.

TÌM CÁC CHỮ SỐ TẬN CÙNG CỦA MỘT SỐ

NGUYỄN VŨ THANH
Cao đẳng sư phạm Tiền Giang

Tìm một, hai, ba chữ số tận cùng của một số chính là tìm dư trong phép chia số đó cho 10, 100 hoặc 1000. Nhưng khi khảo sát các chữ số tận cùng của một số, có những phương pháp đặc biệt khá lí thú.

1.Tìm một chữ số tận cùng của a^n

– Nếu a tận cùng là 0 ; 1 ; 5 ; 6 thì a^n lần lượt tận cùng là 0 ; 1 ; 5 ; 6.

– Nếu a tận cùng là 2 ; 3 ; 7 thì sao ?

Dùng kí hiệu $a \equiv b \pmod{m}$ để chỉ $a - b$ chia hết cho m, ta có :

$$2^{4k} = 16^K \equiv 6 \pmod{10}$$

$$3^{4k} = 81^k \equiv 1 \pmod{10}$$

$$7^{4k} = 49^{2k} \equiv 1 \pmod{10}$$

Do đó để tìm chữ số tận cùng của a^n (với a tận cùng là 2 ; 3 ; 7) ta lấy số mũ n chia cho 4.

Giả sử $n = 4k + r(r = 0 ; 1 ; 2 ; 3)$

+ Nếu $a \equiv 2 \pmod{10}$ thì $a^n \equiv 2^n = 2^{4k+r} \equiv 6.2^r \pmod{10}$

+ Nếu $a \equiv 3 ; 7 \pmod{10}$ thì $a^n = a^{4k+r} \equiv a^r \pmod{10}$

Thí dụ : Tìm chữ số tận cùng của 1992^{1993}

Giải : Ta có $1992^{1993} \equiv 2^{1993} \pmod{10}$

Mà $1993 = 4.498 + 1$ do đó

$$2^{1993} = (2^4)^{498} . 2 \equiv 2 \pmod{10}$$

Vậy chữ số tận cùng của 1992^{1993} là 2.

2. Tìm hai chữ số tận cùng của a^n

Giả sử a có chữ số tận cùng là $x : 0 \le x \le 9$

Theo nhị thức Niutơn, ta có :

$$a^{20} = (10k + x)^{20} = (10k)^{20} + 20.(10k)^{19}x +$$
$$+ \ldots + 20(10k)x^{19} + x^{20} \equiv x^{20} \pmod{100}$$

Vậy hai chữ số tận cùng của a^{20} cũng chính là hai chữ số tận cùng của x^{20}.

Nhận xét : $2^{20} \equiv 76 \pmod{100}$; $6^5 \equiv 76 \pmod{100}$

$3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$; $7^4 \equiv 1 \pmod{100}$

Dùng quy nạp ta có : $76^m \equiv 76 \pmod{100}$

$5^m \equiv 25 \pmod{100}$ $(m \ge 2)$

Từ đó suy ra với mọi $m \ge 1$:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^{20m} \equiv 0 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10} \\ a^{20m} \equiv 1 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 1 ; 3 ; 7 ; 9 \pmod{10} \\ a^{20m} \equiv 25 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10} \\ a^{20m} \equiv 76 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 2 ; 4 ; 6 ; 8 \pmod{10} \end{array}}$$

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta tìm dư trong phép chia số mũ n cho 20.

Thí dụ : Tìm hai chữ số tận cùng của $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (có 1992 số 2)

Giải : Đặt $a_n = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ (có n số 2). Ta có :

$$a_{1992} = 2^{a_{1991}}$$

Ta tìm dư trong phép chia a_{1991} cho 20

Ta có

$$a_{1991} = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} = 2^{a_{1990}} = 2.2^{a_{1990}-1} = 2.2^{4k+3} = 2(10l+8) = 20l+16$$

$$(l \in Z)$$

Do đó $\quad a_{1992} = 2^{20l+16} \equiv 2^{16} . 76 \equiv 36 \pmod{100}$

3. Tìm ba chữ số tận cùng của a^n

Giả sử $n = 100k + r, 0 \le r \le 100$ khi đó

$$a^n = (a^{100})^k . a^r$$

Giả sử chữ số tận cùng của a là $x : 0 \le x \le 9$

Theo nhị thức Niutơn ta có :

$$a^{100} = (10k + x)^{100} = (10k)^{100} + 100(10k)^{99} x +$$

$$+ \ldots + 100(10k).x^{99} + x^{100} \equiv x^{100} \pmod{1000}$$

Vậy ba chữ số tận cùng của a^{100} cũng chính là ba chữ số tận cùng của x^{100}.

Dùng quy nạp ta có : $625^n \equiv 625 \pmod{1000}$

$$376^n \equiv 376 \pmod{1000}$$

– Nếu $x = 0$ thì $x^{100} \equiv 0 \pmod{1000}$

– Nếu $x = 5$ thì $x^4 = 5^4 = 625$, do đó

$x^{100} = (5^4)^{25} \equiv 625 \pmod{1000}$

– Nếu $x = 1 ; 3 ; 7 ; 9$ ta có tương ứng $x^4 = 1 ; 81 ; 2401 ; 6561 \equiv 1 \pmod{40}$

$$\Rightarrow x^{100} = (40k + 1)^{25} = (40k)^{25} + 25(40k)^{24}$$

$$+ \ldots + 25 . (40k) + 1 \equiv 1 \pmod{1000}$$

– Nếu $x = 2 ; 4 ; 6 ; 8$ lúc đó $x^{100} \,\vdots\, 2^{100} \Rightarrow x^{100} \,\vdots\, 8$

$(x,125) = 1$ mà $\varphi(125) = 100$(*) (theo định lí Ơle) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^{100} \equiv 1 \pmod{125}$

$$\Rightarrow x^{100} = 1000k + \overline{abc} \Rightarrow \begin{cases} \overline{abc} \,\vdots\, 8 \\ \overline{abc} \equiv 1 \pmod{125} \end{cases}$$

(*) $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố với n. Với p là số nguyên tố, α là số nguyên dương thì $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

Nhưng trong các số 1 ; 126 ; 251 ; 376 ; 501 ; 626 ; 751 ; 876 ; (đó là tất cả các số có ba chữ số khi chia cho 125 có dư là 1) chỉ có một số chia hết cho 8 là 376.

Vậy $x^{100} \equiv 376 \pmod{1000}$

Từ đó suy ra với mọi $m \geq 1$:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^{100m} \equiv 0 \pmod{1000} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10} \\ a^{100m} \equiv 1 \pmod{1000} \text{ nếu } a \equiv 1 ; 3 ; 7 ; 9 \pmod{10} \\ a^{100m} \equiv 625 \pmod{1000} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10} \\ a^{100m} \equiv 376 \pmod{1000} \text{ nếu } a \equiv 2 ; 4 ; 6 ; 8 \pmod{10} \end{array}}$$

Vậy để tìm ba chữ số tận cùng của a^n ta phải tìm hai chữ số tận cùng của số mũ n

Thí dụ : Tìm ba chữ số tận cùng của $2^{9^{1993}}$

Giải. Trước hết ta tìm hai chữ số tận cùng của 9^{1993}

Ta có $\quad 9^{1993} = 9^3.9^{1990} = 9^3.(3^{20})^{199} \equiv 29 \pmod{100}$

vì $\quad 3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$

Vậy $\quad 2^{9^{1993}} = 2^{100k+29} \equiv 2^{29}.376$

$\equiv 2^{30}.188 \equiv (2^{10})^3.188$

$\equiv 24^3.188 \equiv 824 \times 188$

$\equiv 912 \pmod{1000}$

Tương tự như trên các bạn hãy đưa ra phương pháp tìm bốn chữ số tận cùng của a^n dựa vào ba chữ số tận cùng của n.

Bài tập ứng dụng

Chứng minh rằng

a) $0{,}3\,(1983^{1983} - 1917^{1917})$ là số nguyên.

b) $9^{9^{9^9}} - 9^{9^9}$ chia hết cho 10

c) $2^{3^{4n+1}} + 3$ chia hết cho 11 với mọi số tự nhiên n.

2. Tìm hai chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$ và $17^{5^{121}}$.

3. Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{2^{1992}}$.

TIÊU CHUẨN CHIA HẾT CỦA TAM THỨC $X^m + X^n + 1$ CHO CÁC TAM THỨC $X^2 \pm X + 1$ VÀ $X^4 + X^2 + 1$

TRẦN VĂN VUÔNG
Viện khoa học Giáo dục

– Trong bài toán này, chúng ta sẽ xác định những mối liên hệ chặt chẽ giữa tính chia hết của các tam thức $x^m + x^n + 1$ và tính chia hết của các số mũ m, n. Nhưng tiêu chuẩn đó được ứng dụng để phân tích tam thức $x^m + x^n + 1$ thành nhân tử, rút gọn các phân thức, vv...

1. Tiêu chuẩn chia hết của tam thức $x^m + x^n + 1$ cho tam thức $x^2 + x + 1$

Định lí 1. Tam thức $x^m + x^n + 1$ chia hết cho tam thức $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $mn - 2$ chia hết cho 3.

Chứng minh :

Biểu diễn m, n dưới dạng :

$$m = 3k + r\ ;\ k, r \in N, 0 \le r \le 2,$$

$$n = 3l + s\ ;\ l, s \in N, 0 \le s \le 2,$$

Khi đó :

$$x^m + x^n + 1 = (x^{3k} - 1)x^r + (x^{3l} - 1)x^s + x^r + x^s + 1$$

Vì $x^{3k} - 1$ và $x^{3l} - 1$ cùng chia hết cho $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

nên $\quad x^m + x^n + 1 \vdots x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi

$$x^m + x^s + 1 \vdots x^2 + x + 1.$$

Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta có $x^r + x^s + 1 \vdots x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $r = 1, s = 2$, hoặc $r = 2, s = 1$.

Mặt khác :

$$mn - 2 = (3k + r)(3l + s) - 2 = 3(3kl + ks + lr) + rs - 2$$

nên $\quad mn - 2 \vdots 3$ khi và chỉ khi $rs - 2 \vdots 3$.

Nhưng $rs - 2 \vdots 3$ khi và chỉ khi $r = 1$; $s = 2$ hoặc $r = 2$; $s = 1$

Vậy $\quad x^m + x^n + 1 \vdots x^2 + x + 1 \Leftrightarrow mn - 2 \vdots 3$.

Hệ quả 1 :

$$x^m + x + 1 \vdots x^2 + x + 1 \Leftrightarrow n + 1 \vdots 3.$$

Hệ quả 2 :

$$x^m + x^2 + 1 \vdots x^2 + x + 1 \Leftrightarrow n - 1 \vdots 3$$

2. Tiêu chuẩn chia hết của tam thức $x^m + x^n + 1$ cho tam thức $x^2 - x + 1$

Định lí 2 : Tam thức $x^m + x^n + 1$ chia hết cho tam thức $x^2 - x + 1$ khi và chỉ khi $mn - 2$ và $m + n$ cùng chia hết cho 6.

Chứng minh. Biểu diễn m, n dưới dạng :

$$m = 6k + r\ ;\ k, r \in N, 0 \le r \le 5,$$

$$n = 6l + s\ ;\ l, s \in N, 0 \le s \le 5,$$

Giải : Theo định lí 1 ta có $x^7 + x^5 + 1 \vdots x^2 + x + 1$. Do đó

$$x^7 + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$$

Ví dụ 2 : Phân tích tam thức $x^8 + x^4 + 1$ thành nhân tử

Giải : Theo định lí 3 ta có $x^8 + x^4 + 1 \vdots x^4 + x^2 + 1$. Do đó

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \times (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

Ví dụ 3 : Rút gọn phân thức $\dfrac{x^8 + x^4 + 1}{x^{10} + x^2 + 1}$

Giải : Theo định lí 3, cả tử thức lẫn mẫu thức đều chia hết cho $x^4 + x^2 + 1$. Do đó

$$\frac{x^8 + x^4 + 1}{x^{10} + x^2 + 1} = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^6 - x^4 + 1}$$

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương *k*, *l*, ta có $2^{3k-1} + 2^{3l+1} + 1$ là hợp số.

Giải : Đặt $m = 3k - 1$, $n = 3l + 1$, ta có

$$mn + 1 = (3k - 1)(3l + 1) + 1 = 9kl + 3k - 3l \vdots 3$$

nên theo định lí 1 thì

$$2^{3k-1} + 2^{3l+1} + 1 \vdots 2^2 + 2 + 1 \text{ (đ.p.c.m).}$$

5. Bài tập

1. Chứng minh rằng

$$x^{3000} + x^{2000} + x^{1000} \vdots x^4 + x^2 + 1.$$

2. Chứng minh rằng nếu

$$x^m + x^n + 1 \vdots x^2 + x + 1 \text{ thì } x^{2m} + x^{2n} + 1 \vdots x^2 - x + 1.$$

3. Phân tích tam thức $x^{16} + x^{14} + 1$ thành nhân tử.

4. Rút gọn phân thức $\dfrac{x^{11} + x + 1}{x^7 + x^2 + 1}$

5. Chứng minh rằng nếu $x^m + x^n + 1 \vdots x^2 - x + 1$ thì phương trình $x^m + x^n + 1 = 0$ không có nghiệm số thực.

6. Cho *m*, *n*, *k* là ba số nguyên dương. Hỏi $k^{3m+1} + k^{3n+2} + 1$ có phải là hợp số hay không ?

SUY NGHĨ MỚI TỪ MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

NGUYỄN MINH HÀ
Đại học Sư phạm Hà Nội

Có một bài toán hình học rất đơn giản và quen thuộc.

Bài toán 1. *Cho đường thẳng d và hai điểm A ; B nằm về một phía của nó. Tìm trên d điểm M sao cho (MA + MB) nhỏ nhất.*

Bài toán 1 là bài toán hay. Nó có ý nghĩa thực tế. Ngoài ra, nhờ kết quả của BT1 cũng như cách giải BT1 người ta có thể giải được những bài toán hay hơn, khó hơn. Đó là những bài toán sau.

Bài toán 2 : *Cho góc nhọn xOy ; M là một điểm trong góc đó. Tìm trên Ox, Oy các điểm A ; B sao cho chu vi Δ MAB nhỏ nhất.*

Bài toán 3 : *Cho tam giác nhọn ABC. Tìm trên BC ; CA ; AB các điểm X ; Y ; Z sao cho chu vi ΔXYZ nhỏ nhất.*

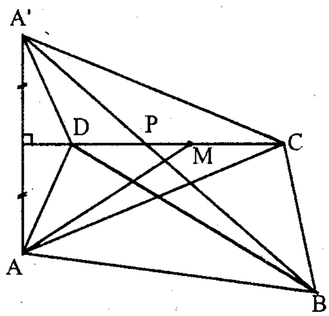
Bài toán 4 : *Cho hình chữ nhật ABCD, M là điểm đã cho trên AB. Tìm trên BC ; CD ; DA các điểm N ; P; Q sao cho chu vi tứ giác MNPQ nhỏ nhất.*

Bài toán 1 cùng với các bài toán 2 ; 3 ; 4 tạo thành nhóm 4 bài toán quen thuộc và "bền vững" trong hình học sơ cấp. Nói đến một trong bốn bài người ta nghĩ ngay đến ba bài còn lại. Chúng thường đặt cạnh nhau trong các bài giảng về hình học sơ cấp cho các học sinh chuyên toán phổ thông cơ sở.

Có lẽ vì sự đơn giản của BT1 cũng như sự "bền vững" của nhóm bốn bài 1, 2, 3, 4 nên không mấy ai nghĩ rằng BT1 còn có thể được phát triển theo một hướng khác nhau mà những kết quả nhận được cũng có ý nghĩa và sâu sắc không kém gì các bài 2, 3, 4. Bài viết này xin giới thiệu những kết quả như vậy.

Bài toán 5 : *Cho tứ giác ABCD. M là một điểm thuộc CD (M khác C, D). Chứng minh rằng :* $MA + MB < \max\{CA + CB \,;\, DA + DB\}$ (*)

Giải : Gọi A' là điểm đối xứng của A qua *CD*. *A'B* cắt *CD* ở *P*. Vì *M* thuộc đoạn *CD* nên :



$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} M \text{ thuộc } \Delta A'BC \\ M \text{ thuộc } \Delta A'BD \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} MA' + MB < CA' + CB \\ MA' + MB < DA' + DB \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} MA + MB < CA + CB \\ MA + MB < DA + DB \end{array}\right.$$

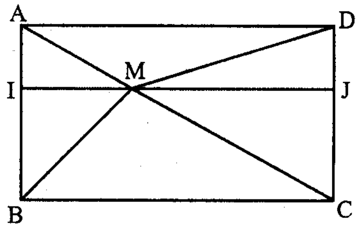
$$\Rightarrow MA + MB < \max\{ CA + CB \,;\, DA + DB \}$$

(*) max {X, Y} chỉ giá trị lớn nhất trong hai số X, Y

Bài toán 6 : *Cho hình chữ nhật ABCD. M là một điểm nằm bên trong hình chữ nhật. Chứng minh rằng :*

$$MA + MB + MC + MD < AB + AC + AD$$

Giải : Qua M kẻ đường thẳng song song với AD. Đường thẳng này theo thứ tự cắt AB ; CD tại I ; J. áp dụng bài toán 5 cho hình chữ nhật $AIJD$ ta có :



$$MA + MD < \max\{IA + ID\ ;\ JA + JD\}$$

$$\Rightarrow \quad MA + MD < IA + ID \text{ (vì } IA + ID = JA + JD)$$

Tương tự như vậy đối với hình chữ nhật $BIJC$ ta có :

$$MB + MC < IB + IC$$

Từ đó suy ra :

$$MA + MB + MC + MD < IA + IB + IC + ID$$

$$\Rightarrow \quad MA + MB + MC + MD < AB + IC + ID$$

Áp dụng bài toán 5 cho hình chữ nhật $ABCD$ ta có :

$$IC + ID < \max\{AC + AD\ ;\ BC + BD\}$$

$$\Rightarrow \quad IC + ID < AC + AD \text{ (vì } AC + AD = BC + BD)$$

Vậy ta có :

$$MA + MB + MC + MD < AB + AC + AD$$

Bài toán 7 : *Cho tứ giác ABCD. M là một điểm trong tứ giác. Đặt :*

$$d_A = AB + AC + AD$$

$$d_B = BC + BD + BA$$

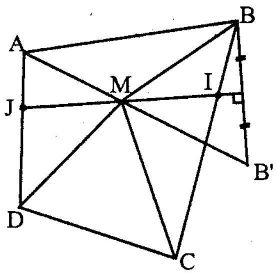
$$d_C = CD + CA + CB$$

$$d_D = DA + DB + DC$$

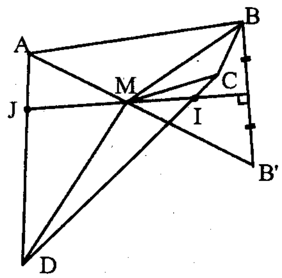
Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC + MD < \max\{d_A\ ;\ d_B\ ;\ d_C\ ;\ d_D\}$$

Giải : Kéo dài AM một đoạn MB' bằng MB. Qua M kẻ đường trung trực của BB'. Đường này theo thứ tự cắt hai cạnh tứ giác tại I ; J. Có thể xảy ra một trong ba trường hợp (h_1) ; (h_2) ; (h_3). Vì trong các hình (h_2) ; (h_3) bài toán 7 được chứng minh tương tự nhưng đơn giản hơn trong trường hợp (h_1) nên ở đây ta chỉ chứng minh trong trường hợp (h_1).



Hình 1



Hình 2

Không mất tính tổng quát giả sử rằng

$$IC + ID = \max\{IC + ID\ ;\ JC + JD\}$$

Áp dụng bài toán (5) cho tứ giác $CIJD$ ta có :

$$MC + MD < IC + ID$$

Lại có :

$$MA + MB = MA + MB' = AB' < IA + IB' = IA + IB$$

Vậy :

$$MA + MB + MC + MD < IA + IB + IC + ID = IA + ID + BC$$

Áp dụng bài toán (5) cho tứ giác $ABCD$ ta có :

$$IA + ID < max\{CA + CD ; BA + BD\}$$

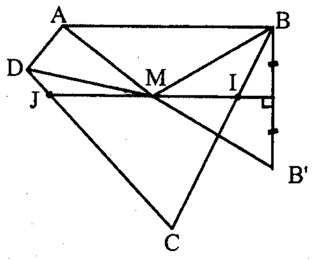
Vậy : $MA + MB + MC + MD <$

$< max\{CA + CB ; BA + BD\} + BC$

$= max\{BC + BD + BA ; CD + CA + CB\} =$

$= \max\{d_B ; d_C\}$

$\leq max\{d_A ; d_B ; d_c ; d_D\}$ (đpcm)



Hình 3

Trên đây là một vài suy nghĩ mới từ bài toán 1. Hãy thử suy nghĩ tiếp đi. Biết đâu chúng ta có thể tìm thêm được những kết quả lí thú từ bài toán 1.

MỘT CHÚT VỀ ĐA THỨC

NGUYỄN ĐỨC TẤN
TP Hồ Chí Minh

Nếu biết vận dụng khéo léo những tính chất của đa thức được học ở THCS chúng ta sẽ tìm lời giải đẹp của một số bài toán và hơn nữa chúng ta còn có thể giải được một số bài toán khó thường gặp trong các kì thi chọn học sinh giỏi toán.

Xin trao đổi cùng bạn đọc "Một chút về đa thức".

Nhắc lại một số tính chất đã học :

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức biến x

1) $f(a) = 0, a \in Q \rightarrow f(x)$ có nghiệm $x = a$

2) Dư khi $f(x)$ chia cho $x - a$ là $f(a)$ (định lí Bezout).

3) $f(x) \vdots g(x)$, bậc $f(x) <$ *bậc* $g(x) \rightarrow f(x) = 0$

4) $f(x) \equiv g(x) \leftrightarrow$ các hệ số tương ứng bằng nhau.

5) Số nghiệm của một đa thức bậc n không quá n ($n \in Z^+$) Một số bài toán áp dụng :

Bài 1 : *Phân tích thành nhân tử* $P = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

Giải : Xem P là một đa thức biến x. Khi $x = -y$ thì $P = 0 \Rightarrow P \vdots x + y$. Trong P vai trò x, y, z như nhau nên cũng có $P \vdots x + z$, $P \vdots y + z$, như vậy $P = (x + y)(x + z)(y + z)Q$. Mà P là đa thức bậc 2 đối với x, y và z nên Q là hằng số. Với $x = 0, y = z = 1$ ta có $Q = 3$.

Vậy $\quad P = 3(x + y)(x + z)(y + z)$

Bài 2 : *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn*

$$xP(x-1) \equiv (x-26)P(x)$$

(Vô địch toán Matxcơva 1963)

Giải : Dễ thấy $P(0) = 0 \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow P(2) = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow P(25) = 0$

Vậy $P(x) = x(x-1)\ ...\ (x-25)Q(x).$

Suy ra $P(x-1) = (x-1)(x-2)...(x-26)Q(x-1)$

$xP(x-1) = (x-26)P(x)$ (giả thiết)

$\Rightarrow$ $Q(x-1) = Q(x) \Rightarrow Q(x) = a$ (hằng số)

Vậy $P(x) = ax(x-1)...(x-25)$

Bài 3 : *Cho hai đa thức với hệ số nguyên $f_1(x), f_2(x)$ thoả mãn*

$$f(x) = f_1(x^3) + xf_2(x^3) \vdots x^2 + x + 1$$

Chứng minh rằng USCLN $(f_1(1984), f_2(1984)) \geq 1983$.

(Toán học và tuổi trẻ bài 2/134)

Giải : $f(x) = [f_1(x^3) - f_1(1)] + x\,[f_2(x^3) - f_2(1)] + xf_2(1) + f_1(1)$

Dễ thấy $f_1(x^3) - f_1(1) \vdots x^2 + x + 1,$

$f_2(x^3) - f_1(1) \vdots x^2 + x + 1$

Suy ra $xf_2(1) + f_1(1) \vdots x^2 + x + 1$ nhờ t/c (3) suy ra $f_1(1) = f_2(1) = 0$

Vậy $f_1(x) \vdots x - 1, f_2(x) \vdots x - 1,$ do đó USCLN $(f_1(1984), f_2(1984)) = k.1983$

$(k \in N), k = 1$ khi $f_1(x) = f_2(x) = x - 1.$

Bài 4 : *Cho $f(x)$ là một đa thức có hệ số nguyên và $f(0)$, $f(1)$ là những số lẻ. Chứng minh rằng $f(x)$ không thể có nghiệm số nguyên.*

Giải : Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm số nguyên a thì $f(x) \vdots x - a$ do đó $f(x) = (x-a)g(x)$ ($g(x)$ là đa thức có hệ số nguyên).

Ta có $f(0) = -ag(0)$ là một số lẻ $\Rightarrow a$ là số lẻ. Tương tự $f(1) = (1-a)g(1) \Rightarrow 1 - a$ là số lẻ $\Rightarrow a$ là số chẵn

Điều này mâu thuẫn suy ra đpcm.

Bài 5 : *Cho đa thức $f(x)$ bậc 5 có hệ số nguyên. Biết rằng $f(x)$ nhận giá trị 1975 với 4 giá trị nguyên khác nhau của x.*

Chứng minh rằng với mọi $x \in Z$ thì $f(x)$ không thể có số trị bằng 1992.

Giải : Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là 4 giá trị nguyên khác nhau của đa thức $f(x) - 1975$ suy ra $f(x) - 1975 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)g(x)$ ($g(x)$ là đa thức có hệ số nguyên).

Giả sử tồn tại $a \in Z$ mà $f(a) = 1992$ ta có

$$(a-x_1)(a-x_2)(a-x_3)(a-x_4)g(a) = 17 \qquad (*)$$

Do $x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z$ khác nhau nên $a - x_1, a - x_2, a - x_3, a - x_4$ là 4 số nguyên khác nhau và $g(a) \in Z$, mà 17 chỉ có thể phân tích thành một tích có nhiều nhất ở thừa số nguyên khác nhau $17 = 1.(-1).(-17)$ nên (*) không xảy ra $\rightarrow$ đpcm.

Bài 6 : *Với a, b, c là ba số khác nhau. Hãy tính*

$$a^k\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^k\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^k\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

với $k = 0\ ;\ 1\ ;\ 2$.

Giải : Đặt $f(x) = a^k\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^k\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^k\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-x^k$

Dễ thấy $f(a) = f(b) = f(c) = 0$

Vậy a, b, c là 3 nghiệm khác nhau của $f(x)$ nhưng bậc $f(x) \leq 2$.

Do đó $f(x) = 0$. Vậy :

$$a^k\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^k\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^k\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^k$$

Bài 7 : *Đa thức $P(x)$ bậc n thoả mãn đẳng thức $P(k)=\frac{k}{k+1}$ với $k = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ ...;\ n$. Tìm $P(n+1)$?*

(Vô địch toán Mỹ 1975)

Giải : Đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện trên là duy nhất. Vì nếu có đa thức khác $Q(x) \neq P(x)$ cũng thoả mãn thì bậc đa thức $P(x) - Q(x) \leq n$ nhưng có số nghiệm $\geq n + 1$.

Xét đa thức $R(x)=x+\frac{(0-x)(1-x)...(n-x)}{(n+1)!}$ vì $R(-1) = 0$ *nên*

$R(x) \vdots x + 1$ do đó $S(x) = \frac{R(x)}{x+1}$ là đa thức bậc n và $S(k)=\frac{k}{k+1}$ với $k = 0\ ;\ 1\ ;\ ...\ ;\ n$ nên $S(x)$ thoả mãn điều kiện bài toán nghĩa là $P(x) \equiv S(x)$ và

$$P(n+1)=\frac{R(n+1)}{n+2}=\frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}$$

Bài 8 : *Chứng tỏ rằng đa thức*

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) - 1$ ($a_1\ ;\ a_2\ ;...;\ a_n \in Z$ khác nhau) không phân tích được thành nhân tử

Giải : Giả sử $f(x) = g(x)h(x)$ với $g(x), h(x)$ có hệ số nguyên.

$f(a_i) = -1\ (i = \overline{1,n})$

nên hoặc $g(a_i) = 1$, $h(a_i) = -1$

hoặc $g(a_i) = -1$; $h(a_i) = 1$.

Do đó $g(a_i) + h(a_i) = 0, (i = \overline{1,n})$

Đa thức $g(x) + h(x)$ có n nghiệm khác nhau nhưng bậc $< n$ do đó

$g(x) + h(x) = 0$. Vì vậy $f(x) = -h^2(x)$ điều này không thể được vì hệ số cao nhất của $f(x)$ là một số dương.

Dưới đây là một số bài toán thêm để các bạn tự luyện.

1) Phân tích thành nhân tử

$$(x + y)^4(x - y) + (y + z)^4(y - z) + (z + x)^4(z - x)$$

2) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện.

$$(x - 1992)P(x) = xP(x - 1) \text{ và } P(1993) = 1993\ !$$

3) Chứng minh rằng đa thức

$$f(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$$

(với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là những số nguyên khác nhau) không phân tích được thành nhân tử.

4) a và b là hai số khác nhau. Phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$ bằng A và phần dư trong phép chia $f(x)$ cho $x - b$ bằng B. Tìm phần dư trong phép chia $f(x)$ cho $(x - a)(x - b)$.

CÁI GÌ ẨN ĐẰNG SAU ĐƯỜNG TRÒN Ơ-LE

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
Đại học Sư phạm Hà Nội

Chắc nhiều bạn đã biết định lí về đường tròn Ơ-le : Trong một tam giác, trung điểm các cạnh, chân các đường cao và trung điểm các đoạn nối trực tâm với các đỉnh là chín điểm cùng thuộc một đường tròn. Đường tròn này có tâm là trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm với tâm đường tròn ngoại tiếp và bán kính bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Người ta gọi nó là đường tròn Ơ-le.

Sau đây, bài báo này đưa ra một cách chứng minh khác định lí trên mà nội dung chứng minh cũng chỉ vận dụng các kiến thức hình học trong sách giáo khoa bậc phổ thông cơ sở, và sau đó thu được định lí "đường tròn sáu điểm", tổng quát hoá định lí về đường tròn Ơ-le đã biết.

Để làm việc này, chúng ta hãy cùng nhau phân tích như sau : Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và P', Q', R' lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C ; P_1 ; Q_1; R_1 lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng nối trực tâm H với các đỉnh A, B, C và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (hình 1). Ta hãy chứng minh rằng 6 điểm P, Q, R, P', Q' và R' cùng nằm trên một đường tròn. Theo định lí về đường trung bình của hình thang thì các đường trung trực của các đoạn thẳng PP', QQ' và RR' đều đi qua trung điểm S của OH và do đó :

$$SP = SP',\ SQ = SQ',\ SR = SR'\ ;$$

bởi vậy ta hãy chứng minh $SP = SQ = SR$.

Từ H ta hãy dựng $HB' = 2SQ$, $HC' = 2SR$ (nghĩa là $HB' \uparrow\uparrow = 2SQ$ và $HC' \uparrow\uparrow = 2SR$) ; thế thì : $SQ = SR \Leftrightarrow HB' = HC'$. Nhưng như vậy thì : B' đối xứng với O qua (CA), C' đối xứng với O qua (AB) và do đó $AB' = AC'\ (= AO)$. Tam giác $AB'C'$ cân ở A đồng thời dễ thấy rằng $B'C' \mathbin{//}= BC$ (vì cùng $\mathbin{//}= 2RQ$) và do đó, đường cao AP' của tam giác ABC trở thành đường trung trực của đoạn thẳng $B'C'$, nghĩa là $HB' = HC'$. Từ đó suy ra : $SQ = SR$; chứng minh tương tự, $SP = SQ = SR$.

Sau nữa, xét tam giác $A'B'C'$ có các đỉnh là các điểm đối xứng với O lần lượt qua các cạnh BC, CA và AB, ta thấy rằng $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$ và H trùng với tâm O' đường tròn $v'(A'B'C')$; do đó $HA' = HB' = HC' = OA = OB = OC$ (= R, bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC). Suy ra bán kính của đường tròn (σ) tâm S bằng $\rho = \dfrac{1}{2}R$.

Cuối cùng xét đến các điểm P_1, Q_1 và R_1. Vì $SP_1 // = \dfrac{1}{2}OA$ nên $SP_1 = \rho = \dfrac{1}{2}R$; chứng minh tương tự, ta được :

$$SP_1 = SQ_1 = SR_1 = \rho = \frac{1}{2}R.$$

Đến đây, định lí đường tròn chín điểm đã được chứng minh xong.

Ở đoạn trên chúng ta đã trình bày một cách chứng minh mới không cổ điển định lí về đường tròn Ơle, đồng thời cũng là một cách chứng minh nữa một định lí hình học quen thuộc về một tính chất của hình tam giác : "Trong một tam giác, ba đường cao đồng quy tại một điểm, gọi là *trực tâm* của tam giác".

Đến đây, chắc nhiều bạn sẽ phải đặt câu hỏi : Chứng minh hai định lí này ở trong SGK, nhất là định lí về ba đường cao đồng quy, đơn giản hơn nhiều so với chứng minh nêu ở trên. Tại sao tác giả bài báo này còn phải đưa ra một cách chứng minh nữa, phức tạp hơn ? Phỏng nó có ích lợi gì hơn không ? Xin trả lời các bạn đúng là rất có lí khi các bạn chất vấn tác giả. Đến đây, chúng ta hãy cùng nhau nghiên cứu để giải đáp câu hỏi mà các bạn đặt ra. Các bạn sẽ tự mình phát hiện ra những điều bổ ích và lí thú. Với cách dựng các điểm A', B' và C' như trong chứng minh vừa nêu ở đoạn 2 trên đây thì các đường cao AP', BQ' và CR' của tam giác ABC trở thành các đường trung trực của tam giác $A'B'C'$, và do đó chúng đồng quy ở một điểm (vì ba điểm A', B' và C' không thẳng hàng).

Bây giờ ta hãy nhìn các đường thẳng AP', BQ' và CR' theo một quan điểm khác. Thật vậy, vì tam giác $AB'C'$ cân ở A nên đường trung trực AP' của $B'C'$ cũng còn là đường phân giác của góc $\widehat{B'AC'}$, và ngược lại, nếu chứng minh được AP' là phân giác của góc $\widehat{B'AC'}$ thì cũng là chứng minh được AP' là trung trực của $B'C'$. Điều này dễ thấy nếu ta để ý đến tính chất sau đây của các đường cao trong hình tam giác : "Đường cao và đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác, xuất phát từ cùng một đỉnh thì đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc có đỉnh ở cùng đỉnh đó".

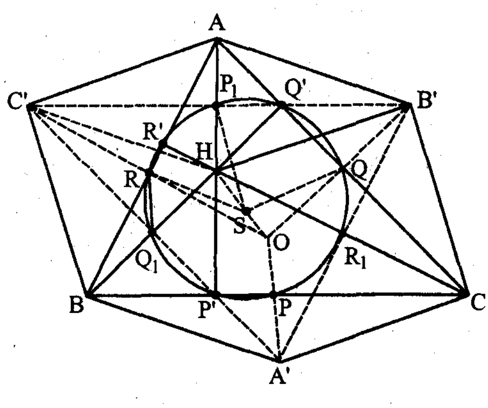
Vì AP' đối xứng với AO qua phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên : $\widehat{BAP'} = \widehat{CAO} = \widehat{CAB'}$ $(=\alpha_1)$; cũng vậy, $\widehat{CAP'} = \widehat{BAO} = \widehat{BAC'}$ $(=\alpha_2)$.

Do đó, ta được (hình 1) :

$$\widehat{B'AP'} = \widehat{B'AC} + \widehat{CAP'} = \alpha_1 + \alpha_2 =$$

$$= \widehat{P'AB} + \widehat{BAC'} = \widehat{P'AC'} \left(= \frac{1}{2}\widehat{B'AC'}\right),$$

nghĩa là AP' là phân giác của góc $\widehat{B'AC'}$, và do đó AP' là trung trực của $B'C'$. Chứng minh tương tự, BQ' là trung trực của $A'C'$ và CR' là trung trực của $A'B'$.



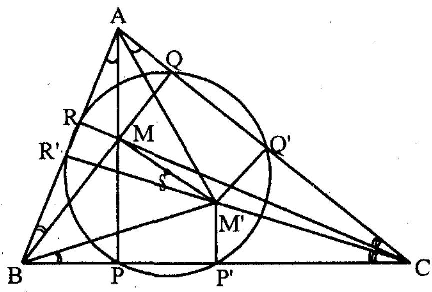
Hình 1

Như vậy, với cách nhìn mới này, các đường cao AP', BQ' và CR' của tam giác ABC lại là các đường thẳng, đối xứng với AO, BO và CO lần lượt qua phân giác các góc A, B và C : chúng trở thành các đường trung trực của tam giác $A'B'C'$ (có các đỉnh đối xứng với 0 qua các cạnh của tam giác ABC), và do đó đồng quy ở một điểm (trực tâm H của Δ ABC). Sự kiện này cho ta một cách nhìn mới về vai trò của các điểm O và H. Thực thế, đọc kĩ lại chứng minh, ta thấy ba đường thẳng AH, BH và CH đối xứng với ba đường thẳng AO, BO, CO lần lượt qua phân giác các góc A, B và C của tam giác ABC là một tính chất của hình tam giác, liên quan đến trực tâm và đường tròn ngoại tiếp tam giác. Nhưng thay cho điểm O, ta lấy một điểm M tuỳ ý của mặt phẳng, thì, theo cách dựng các điểm A', B' và C' nêu trong chứng minh, đoạn 2 trên dây, các đường thẳng Ax, By, và Cz đối xứng với AM, BM và CM lần lượt qua phân giác các góc A, B và C cũng vẫn là trung trực của các đoạn thẳng $B'C'$, $C'A'$ và $A'B'$. Do đó, hoặc chúng *đồng quy* tại một điểm M' nào đó, hoặc chúng *song song với nhau* tuỳ theo ba điểm A', B' và C' không thẳng hàng hoặc thẳng hàng. Sau nữa, nếu xem các điểm P, P' ; Q, Q' và R, R' là hình chiếu vuông góc của các điểm O và H lần lượt trên các đường thẳng BC, CA và AB, thì, khi thay O bằng một điểm M tuỳ ý của mặt phẳng và do đó, thay H bằng điểm tương ứng $M'(M' \neq 0$ *thì* $M' \neq H)$ (nếu các đường thẳng Ax, By và Cz đồng quy ở M' chứ không song song với nhau), phần chứng minh 6 điểm đó cùng nằm trên một đường tròn vẫn đúng (6 điểm P, P', Q, Q' và R, R' là các hình chiếu vuông góc của cặp điểm M, M' trên các đường thẳng BC, CA và AB chứa các cạnh của tam giác ABC (hình 2.)).

Từ những điều phân tích về một cách chứng minh mới của hai định lý hình học đã biết đưa ra ở đoạn 2 trên đây, chúng ta thu được kết quả mới sau đây về một tính chất hình học liên quan đến hình tam giác.

Định lí (về đường tròn sáu điểm) : Nếu M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng của một tam giác ABC nào đó, thì :

1) Các đường thẳng Ax, By và Cz đối xứng với các đường thẳng AM, BM và CM lần lượt qua phân giác của các góc A, B và C của tam giác đã cho, hoặc *đồng quy* ở một điểm, hoặc *song song* với nhau ;



Hình 2

2) Trong trường hợp Ax, By và Cz đồng quy ở một điểm M' thì các hình chiếu vuông góc của cặp điểm M, M' trên các đường thẳng BC, CA và AB chứa các cạnh của tam giác đã cho, là 6 điểm cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm S của đoạn thẳng MM'. Ta gọi đường tròn này là *đường tròn 6 điểm.*

Rõ ràng là : khi M trùng với O thì M' trùng với H ; và ngược lại, khi M trùng với H thì M' trùng với O. Như vậy, định lí về đường tròn 6 điểm là một sự tổng quát hoá cả hai định lí hình học quen thuộc : định lí về ba đường cao đồng quy và định lí về đường tròn 9 điểm (đường tròn Ơle).

4. Đến đây thì thắc mắc của các bạn đã được giải đáp. Tuy nhiên, tinh ý một chút và điều này thường thấy ở những bạn có óc tò mò khoa học, điều giải đáp trên đây của tác giả chưa làm thoả mãn hoàn toàn các bạn. Đúng như vậy, nội dung của định lí mà chúng ta vừa rút ra ở trên chưa đề cập đến trường hợp $Ax \parallel By \parallel Cz$; đó là dụng ý của tác giả bài này. Các bạn hãy tự mình đề xuất câu hỏi và tự giải đáp nhé, các bạn sẽ tìm thấy niềm vui khi hoàn chỉnh nội dung của định lí trên đây.

Cuối cùng, tác giả xin gợi ý một vài đề tài nghiên cứu (bài toán) nho nhỏ, giúp các bạn tìm hiểu sâu hơn nữa : Mối quan hệ giữa cặp điểm tương ứng M, M' đối với các đỉnh và các cạnh của tam giác ABC cũng như mối quan hệ giữa hai tam giác PQR và $P'Q'R'$ đối với tam giác ABC. Còn bạn nào đã có kiến thức về hình học không gian, ngoài vấn đề trên, xin hãy thử đặt và giải quyết bài toán tương tự trong không gian. Tác giả mong các bạn hưởng ứng và hứng thú tìm hiểu sâu hơn những vấn đề nêu trên đây xung quanh bài toán về đường tròn sáu điểm, và hi vọng sẽ còn dịp khác trao đổi thêm với các bạn. Chúc các bạn thành công.

MỘT VÀI PHƯƠNG PHÁP TÍNH TỔNG

PHƯƠNG THẢO
Hà Tây

Học sinh các lớp phổ thông cơ sở kể cả học sinh chuyên toán tỏ ra rất lúng túng khi gặp các bài toán tính tổng. Điều đó cũng dễ hiểu vì trong chương trình phổ thông rất ít tài liệu đề cập vấn đề này. Trong bài báo nhỏ này chúng tôi xin trình bày một số phương pháp cơ bản để tính các tổng hữu hạn.

I. Phương pháp dự đoán và quy nạp

Trong một số trường hợp khi gặp bài toán tính tổng hữu hạn

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \qquad (1)$$

bằng cách nào đó ta biết được kết quả (bằng cách dự đoán hay người ta bắt chứng minh khi đã cho biết kết quả) thì ta nên sử dụng phương pháp này và hầu như thế nào cũng chứng minh được.

Ví dụ 1: Tính tổng

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

Thử trực tiếp ta thấy ngay:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 4 = 2^2$$

$$S_3 = 9 = 3^2$$

...

Ta dự đoán $\qquad S_n = n^2$

Với n = 1, 2, 3 ta thấy kết quả đúng.

Giả sử với $n = k (k \geq 1)$ ta có:

$$S_k = k^2$$

Ta cần phải chứng minh

$$S_{k+1} = (k+1)^2 \qquad (3)$$

Thật vậy, cộng hai vế của (2) với (2k+1) ta có:

$$1+3+..+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$

Vì $k^2+(2k+1)=(k+1)^2$ nên ta có (3).

Theo nguyên lí quy nạp bài toán được chứng minh. Tương tự các bạn có thể chứng minh các kết quả sau đây bằng phương pháp quy nạp toán học:

1) $$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2) $$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3) $$1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4) $$1^5+2^5+...+n^5=\frac{1}{12}\times n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

II. Phương pháp khử liên tiếp

Giả sử ta cần tính tổng (1) mà ta có thể biểu diễn $a_i, i=1,2,...,n$, qua hiệu hai số hạng liên tiếp của một dãy số khác, chính xác hơn giả sử

$$a_1=b_1-b_2$$
$$a_2=b_2-b_3$$
$$...$$
$$a_n=b_n-b_{n+1}$$

Khi đó ta thấy ngay

$$S_n=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+...+(b_n-b_{n+1})=b_1-b_{n+1}$$

Ví dụ 2: Tính tổng:

$$S=\frac{1}{10.11}+\frac{1}{11.12}+\frac{1}{12.13}+...+\frac{1}{99.100}$$

Ta có:

$$\frac{1}{10.11}=\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$$
$$\frac{1}{11.12}=\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$$
$$...$$
$$\frac{1}{99.100}=\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$

Do đó ta có:

$$S=\frac{1}{10.11}+\frac{1}{11.12}+...+\frac{1}{99.100}=\frac{1}{10}-\frac{1}{100}=\frac{9}{100}$$

Ví dụ 3: Tính tổng:

$$S_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Ta có:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Ví dụ 4: Tính tổng:

$$S_n = 1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n! \qquad (\text{ở đó } n! = 1.2.3\ldots n)$$

Ta có:

$$1! = 2! - 1!$$
$$2.2! = 3! - 2!$$
$$3.3! = 4! - 3!$$
$$\ldots$$
$$n.n! = (n+1)! - n!$$

Vậy $\quad S_n = (n+1)! - 1$

Ví dụ 5: Tính tổng:

$$S_n = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \ldots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

Ta có:

$$\frac{2i+1}{[i(i+1)]^2} = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}; i = 1,2,\ldots,n.$$

Do đó

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

III. Phương pháp giải phương trình với ẩn là tổng cần tính

Ta trình bày phương pháp giải qua các ví dụ sau

Ví dụ 6: Tính tổng:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{100} \tag{4}$$

Ta viết lại S như sau

$$S = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99})$$

$$S = 1 + 2(1 + 2 + \ldots + 2^{100} - 2^{100})$$

$$S = 1 + 2(S - 2^{100}) \tag{5}$$

Từ (5) ta suy ra

$$S = 2^{101} - 1$$

Ví dụ 7: Tính tổng:

$$S_n = 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^n, p \neq 1$$

Ta viết lại S_n dưới dạng sau

$$S_n = 1 + p(S_n - p^n).$$

Suy ra

$$S_n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$$

Ví dụ 8: Tính tổng:

$$S_n = 1 + 2p + 3p^2 + ... + (n+1)p^n; p \neq 1$$

Ta có

$$p.S_n = S_n - (1 + p + ... + p^n) + (n+1)p^{n+1}$$

$$p.S_n = S_n - \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} + (n+1)p^{n+1}$$

Từ đây ta có

$$S_n = \frac{(n+1)p^{n+1}}{p-1} - \frac{p^{n+1} - 1}{(p-1)^2}$$

IV. Phương pháp tính qua các tổng đã biết

Trước hết ta làm quen với ký hiệu sau:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Dễ dàng kiểm tra các tính chất sau đây

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} aa_i = a\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Ví dụ 9: Tính tổng: $S_n = 1.2 + 2.3 + ... + n(n+1)$

Ta có $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{n=i}^{n} (i^2 + i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$

Vì

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Cho nên

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1(n+2)}{3}$$

Ví dụ 10: Tính tổng:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i(3i-1)$$

$$S_n = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

Vì

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sau một vài phép tính đơn giản ta có:

$$S_n = n^2(n+1)$$

Ví dụ 11: Tính tổng:

$$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n+1)^3$$

Ta có:

$$S_n = \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + (2n+1)^3\right) - \left(2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + (2n)^3\right)$$

$$= \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + (2n+1)^3\right) - 8\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + (n)^3\right)$$

$$S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$$

MỘT PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM NGUYÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH

NGUYỄN NGỌC ĐẠM
Trường THCS Cần Thơ, Hà Tây

Các phương pháp tìm nghiệm nguyên của một phương trình thật đa dạng và phong phú. Dưới đây ta sẽ làm quen với một trong số các phương pháp đó.

Ví dụ 1: Tìm tất cả các số nguyên x thoả mãn phương trình:

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 330 \quad (1)$$

Để tìm nghiệm nguyên của phương trìmh (1) ta có thể trước hết, tìm ra tất cả các số thực x thoả mãn phương trình, rồi chọn ra trong số các số đó các số nguyên. Tuy nhiên để giải được theo cách này, học sinh phải có kỹ năng nhất định về giải phương trình bậc bốn, bậc hai. Do vậy, nó ít phù hợp với các đối tượng học sinh.

Nếu chú ý suy nghĩ, ta có thể có được những nhận xét sau:

- Nghiệm nguyên của (1) không thể là những số nguyên $x \le -1$ vì nếu ngược lại thì $1-3x \ge 4, 1-4x \ge 5, 1-6x \ge 7, 1-12x \ge 13$

và do đó:

$$(1-3x)(1-4x)(1-6x)(1-12x)=(3x-1)(4x-1)(6x-1)(12x-1)\geq 4\times 5\times 7\times 13>330$$

(Vô lí!)

- Nghiệm nguyên của (1) cũng không thể là những số nguyên $x>1$ vì nếu ngược lại thì $3x-1>2$, $4x-1>3, 6x-1>5, 12x-1>11$ và do đó:

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)>11\times 5\times 3\times 2=330 \qquad \text{(Vô lí!)}$$

-Vậy nghiệm nguyên x của (1) phải thoả mãn $-1<x\leq 1$. Đến đây, bằng phép thử trực tiếp với hai giá trị $x = 0$ và $x = 1$ ta thấy $x = 1$ là nghiệm nguyên duy nhất của phương trình.

Ví dụ 2 : Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}=1$$

Giả sử (x_1, x_2, x_3, x_4) là một nghiệm nguyên dương của phương trình. Với cách nhận xét như ở ví dụ 1 ta đi đến điều khẳng định :

- Các số x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ đều phải lớn hơn 1, vì nếu một trong các số x_i bằng 1 thì vế trái của phương trình lớn hơn 1, trong khi vế phải bằng 1. Hơn nữa, các số x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ lại phải nhỏ hơn 3, vì nếu một trong các số x_1 lớn hơn hoặc bằng 3 thì vế trái của phương trình sẽ nhỏ hơn hoặc bằng

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(=\frac{31}{36}<1\right),$$

trong khi vế phải bằng 1. Vậy $1 < x_i < 3$, i = 1, 2, 3, 4. Mà x_i nguyên dương nên chỉ có thể $x_i = 2$, i = 1, 2, 3, 4. Phép thử trực tiếp cho ta nghiệm nguyên dương duy nhất của phương trình là

$$x_i = x_2 = x_3 = x_4 = 2.$$

Trong các ví dụ trên, bằng những nhận xét và suy luận đơn giản, chúng ta có thể nhanh chóng tìm ra các khoảng chứa nghiệm hoặc chứa các thành phần của nghiệm của phương trình. Song có những phương trình mà việc tìm ra những khoảng như thế của nó đòi hỏi phải có những kiến thức cần thiết và những suy luận phức tạp hơn. Chẳng hạn:

Ví dụ 3: Tìm tất cả các số nguyên *x, y* thoả mãn phương trình:

$$1!+2!+3!+\ldots+x!=y^2$$

Giả sử (x, y) là một cặp số nguyên thoả mãn phương trình. Trước hết ta thấy $x\geq 1$. Ta lại thấy rằng $1! + 2! + 3! + 4 = 33!$ còn tổng $5! + 6! + \ldots + n!$ $(n\geq 5)$ là một số tận cùng bởi 0. Do vậy, nếu $x\geq 4$ thì tổng $1!+2!+3!+\ldots+x!$ là một số tận cùng bởi 3 và vì thế y^2 tận cùng bởi 3, đó là điều vô lí, vì một số chính phương không thể tận cùng bởi 3 (các bạn có thể dễ dàng chứng minh nhận xét này). Từ đó ta thấy phải có $1\leq x<4$. Bằng phép thử trực tiếp với x = 1; 2; 3 ta được tất cả 4 cặp số nguyên (x, y) thoả mãn phương trình là:

$$(1,-1);(1,1);(3,-3);(3,3).$$

Ví dụ 4: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$1!+2!+3!+\ldots+x!=y^3$$

Giả sử (x, y) là một nghiệm nguyên của phương trình. Ta thấy phải có $x\geq 1$. Tiếp theo bằng cách suy luận như ở ví dụ 3, ta thấy rằng

$1!+2!+3!+...+8! = 46233$ chia hết cho 9 nhưng không chia hết cho 27, còn tổng $9!+10!+...+n!(n\geq 9)$ chia hết cho 27, vì mỗi hạng tử đều chia hết cho 27. Do đó, nếu $x\geq 8$ thì tổng $1!+2!+3!+...+x!$ chia hết cho 9 nhưng không chia hết cho 27. Từ đó suy ra nếu $x\geq 8$ thì $y^3 \vdots 9$ do đó $y^3 \vdots 3$, mà 3 là số nguyên tố nên $y \vdots 3$ và vì thế $y^3 \vdots 27$. Đó là điều mâu thuẫn. Vậy phải có $1\leq x<8$. Từ việc thử trực tiếp 7 giá trị của x ta được nghiệm nguyên duy nhất của phương trình là cặp số $(1,1)$.

Ví dụ 5: Có hay không hai số nguyên dương *x, y* thoả mãn phương trình:

$$x^{1991}+y^{1991}=1993^{1991}$$

Giả sử x, y là hai số nguyên dương thoả mãn phương trình. Dễ thấy $x<1993$ và $y<1993$. Do tính đối xứng của phương trình đối với *x, y* nên, không mất tổng quát, có thể giả sử $x\geq y$. Do $1993>x$ nên $1993\geq x+1$ (vì x nguyên dương), suy ra:

$$1993^{1991}\geq (x+1)^{1991}=x^{1991}+1991x^{1990}+...+1991x+1$$

Từ đó $\quad x^{1991}+y^{1991}>x^{1991}+1991x^{1990}$ hay $y^{1991}>1991x^{1990}$.

Nhưng do $x\geq y$ nên $x^{1991}>1991x^{1990}$ và $y^{1991}>1991y^{1990}$, suy ra $x>1991$ và $y>1991$. Như vậy, phải có $1991<x<1993, 1991<y<1993$. Từ đó ta thấy chỉ có thể $x=y=1992$. Tuy nhiên khi đó vế trái của phương trình là số chẵn, trong khi vế phải của phương trình lại là số lẻ. Vậy không tồn tại các số nguyên dương *x, y* thoả mãn phương trình đã cho.

Trên đây ta đã xét việc tìm nghiệm nguyên của một số phương trình, mà cách tìm được quy về việc xét các khoảng chứa nghiệm hoặc các thành phần của nghiệm của phương trình, rồi dùng cách thử trực tiếp để tìm ra nghiệm. Để làm được điều này, ta cần căn cứ vào các phương trình cụ thể, dự đoán rồi sử dụng những suy luận hợp lí để chứng minh nghiệm hoặc các thành phần của nghiệm của phương trình (nếu có) phải lớn hơn một số nguyên *m* nào đó, đồng thời phải nhỏ hơn một số nguyên *n* nào đó. Công việc còn lại thật đơn giản, đó là thử trực tiếp các giá trị nguyên nằm giữa *m* và *n* nếu khoảng cách đó không quá lớn.

Bài tập

1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$y^2+y=x^4+x^3+x^2+x \qquad$ (Gợi ý: $-1\leq x\leq 2$).

2) Chứng minh rằng phương trình $x!+y!=10z+9$ không có nghiệm nguyên.

3) Thay các chữ tương ứng bởi các chữ số để đẳng thức sau là đẳng thức đúng:

$\left(\overline{abc}\right)^a=\overline{bc(a-1)bc} \qquad$ (Gợi ý: $1<a\leq 2$).

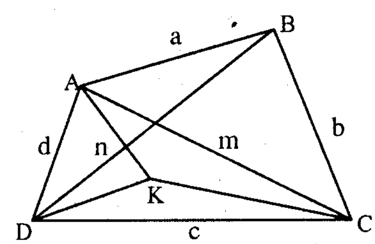
ẨN SAU ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ

LÊ QUỐC HÁN
ĐHSP Vinh, Nghệ An

Hẳn tất cả các bạn không thể quên định lí Ptôlêmê: *"Trong một tứ giác nội tiếp, tích hai đường chéo bằng tổng các tích các cặp cạnh đối diện"* đã được trình bày trong cuốn bài tập hình học lớp 10 phổ thông. Điều nảy sinh đầu tiên ở đây là phải chăng điều kiện $AC.BD = AB.CD + AD.BC$ cũng là điều kiện đủ để tứ giác $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Để giải cả hai bài toán đó, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau (cũng được gọi là bất đẳng thức Ptôlêmê): *Đối với mọi tứ giác lồi $ABCD$ ta có $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$. Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.* Cách chứng minh bất đẳng thức này không khó, xin nhường cho bạn đọc. Tuy nhiên, điều tôi cần lưu ý ở đây là trong trường hợp $ABCD$ không phải là tứ giác nội tiếp, thì: $AB.CD + AD.BC > AC.BD$. Bất đẳng thức này gợi cho ta một bất đẳng thức quen thuộc nào đó. Lục lại trong trí nhớ, ta thấy nó chính là bất đẳng thức tam giác. Điều đó gợi cho tôi suy nghĩ: Phải chăng với mỗi tứ giác lồi không nội tiếp, đều tồn tại một tam giác có ba cạnh (số đo) là tích của hai đường chéo và tích của các cặp cạnh đối diện? Và nếu tồn tại, thì các góc của nó được xác định như thế nào qua các góc của tứ giác đã cho. Sau một thời gian loay hoay tìm tòi, tôi đã phát hiện ra kết quả sau đây: "Cho một tứ giác lồi $ABCD$ tuỳ ý có các cạnh $AB = a$, $BC = b$, $CD = d$, $DA = d$; các đường chéo $AC = m, BD = n, \hat{A} + \hat{C} = \varphi$. Thế thì $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi$ ".

Thật vậy lấy trong tứ giác $ABCD$ một điểm K sao cho:

$$\widehat{KDC} = \widehat{ADB};\ \widehat{KDC} = \widehat{ABD}$$



Thì $\Delta DBA \sim \Delta DCK$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{CK} = \frac{AD}{KD} \Rightarrow BD.CK = AB.CD$$

hay $\qquad m.CK = ac \qquad (1)$

Mặt khác, từ $\dfrac{AD}{DK} = \dfrac{BD}{CD}$ và $\widehat{ADK} = \widehat{BDC}$

$$\Rightarrow \Delta DAK \sim \Delta DBC \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow m.AK = bd \qquad (2)$$

Nhân từng vế (1) và (2) ta có

$$m^2.AK.CK = abcd \qquad (3)$$

Cộng từng vế (1) và (2) ta có $m(AK + CK) = ac + bd$

$$\Rightarrow m^2(AK^2 + CK^2 + 2AK.CK) = a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$m^2(AK^2 + CK^2 - 2AK.BK.\cos\varphi) = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi \qquad (5)$$

Mặt khác,

$$\widehat{AKC} = 360^o - (\widehat{AKD} + \widehat{DKC}) = 360^o - (\widehat{C} + \widehat{D}) = 360^o - \varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \cos\widehat{AKC} \text{ nên từ (5)}$$

$$\Rightarrow m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi \qquad \text{(đpcm)}$$

Chú ý rằng $0 < \varphi < 2\pi$ nên $-1 \le \cos\varphi < 1$, do đó từ kết quả trên ta suy ra:

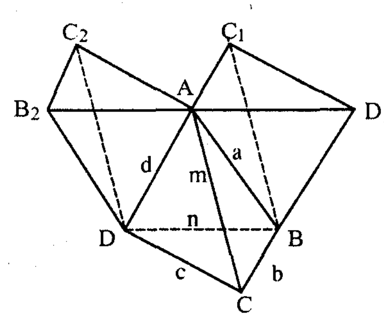
$$|\, ac - bd \,| < mn \le ac + bd.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\cos\varphi = -1 \Leftrightarrow \varphi = \pi \Leftrightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Như vậy ta chứng minh được bất đẳng thức Ptôlêmê và giải đáp được mọi băn khoăn của ta. Trong một thời gian dài, tôi đinh ninh kết quả trên là của mình, nhưng gần đây tôi mới biết nó là một trường hợp đặc biệt của định lí *Breichneider* (định lí *Breichneider* trong trường hợp tổng quát phát biểu cho tứ diện bất kỳ).

Thoạt tiên điều đó khiến tôi hơi buồn, nhưng tôi không nản lòng mà vẫn cố tìm xem ẩn sau định lí *Ptôlêmê,* còn có những điều gì bí mật nữa. Thế là tôi mở rộng sang hình học không gian, và trước hết thu được kết quả: Với mỗi tứ diện $ABCD$ ta đều có

$$AB.CD < AC.BD + AD.BC$$

Để chứng minh kết quả này, ta chỉ cần chiếu tứ diện đó lên mặt phẳng π (chứa CD và $//AB$) rồi dùng bất đẳng thức *Ptôlêmê* trong hình học phẳng. Cũng như trên, bất đẳng thức này gợi cho ta ý nghĩ: "Với mỗi tứ diện $ABCD$, đều tồn tại một tam giác mà số đo các cạnh bằng tích các cặp cạnh đối của tứ diện". Vậy mối liên hệ giữa thể tích V của tứ diện $ABCD$ và diện tích S của tam giác tạo thành như thế nào? Và tôi thu được kết quả sau đây: $S = 6VR$ trong đó R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Thật vậy, qua A dựng π, tiếp diện của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tứ diện ABC_1D_1 được tạo nên bởi π, $[ABC]$, $[ABD]$ và mặt phẳng đi qua D, $//[ABC]$.



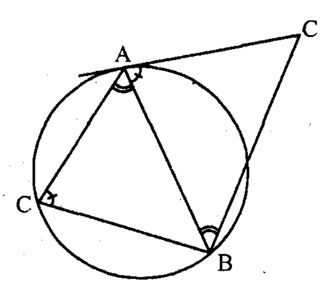
Khi đó $\Delta ABC \sim \Delta BAC_1 \Rightarrow AC_1 = \dfrac{ac}{b}$.

Tương tự $AD_1 = \dfrac{nc}{m}; AC_2 = \dfrac{mp}{b}; AB_2 = \dfrac{mn}{c}$.

Mặt khác

$$\Delta AC_1D_1 \sim \Delta B_2C_2A \Rightarrow \frac{C_1D_1}{AC_2} = \frac{AD_1}{AB_2} \Rightarrow C_1D_1 = \frac{pc^2}{bn}.$$

Tam giác cần tìm có các cạnh là cạnh của ΔAD_1C_1 nhân với $\dfrac{bm}{c} \Rightarrow S_{AD_1C_1} = \dfrac{c^2S}{b^2m^2}$



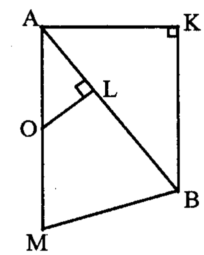
Gọi AM là đường kính mặt cầu ngoại tiếp, BK là đường cao hình chóp BAC_1D_1.

Vì $\Delta ABK \sim \Delta OAL \Rightarrow BK = \dfrac{c^2}{2R}$.

Do đó $V_{AD_1C_1B} = \dfrac{c^4 S}{2Rb^2m^2}$ (6)

và $\dfrac{V_{ABC_1D_1}}{V} = \dfrac{S_{ABC_1}.S_{ABD_1}}{S_{ABC}.S_{ABD}} = \dfrac{c^2}{b^2}.\dfrac{c^2}{m^2}$

$\Rightarrow V_{ABC_1D_1} = \dfrac{c^4 V}{b^2m^2}$ (7)



Từ (6) và (7) suy ra: $S = 6VR$

Kết quả này thú vị đến nỗi tôi không còn ngây thơ nghĩ rằng nó là kết quả của riêng mình nữa. Quả thật, gần đây tôi đã biết nó dưới cái tên: "Công thức *Crelle*" trong cuốn "Những bài toán hình học không gian"của I.F.SHARIGIN.

Điều này không còn làm tôi phiền lòng nữa. Trái lại, nó càng lích thích tôi tìm hiểu thêm những bí mật quanh định lí *Ptôlêmê* đầy hấp dẫn này. Nếu ta lập một hệ trục toạ độ Đề các vuông góc và gắn các toạ độ $A(a_1,a_2,a_3), B(b_1,b_2,b_3), C(c_1,c_2,c_3), D(d_1,d_2,d_3)$ vào thì bất đẳng thức *Ptôlêmê* trong không gian có thể được viết dưới dạng:

$$\left[\sum_{i=1}^{3}(a_i-b_i)^2.\sum_{i=1}^{3}(c_i-d_i)^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{3}(a_i-d_i)^2.\sum_{i=1}^{n}(b_i-c_i)^2\right]^{1/2}$$
$$\geq \left[\sum_{i=1}^{3}(a_i-c_i)^2.\sum_{i=1}^{3}(b_i-d_i)^2\right]^{1/2}$$

Điều này gợi cho chúng ta mở rộng bất đẳng thức trên cho không gian *n* chiều mà tính chân thực của nó đã chứng minh (xem chẳng hạn "Một phương pháp chứng minh bất đẳng thức *Ptôlêmê* trong không gian *n* chiều" của cùng tác giả, báo *Toán học và tuổi trẻ*, số 132); và theo hướng suy nghĩ trên, biết đâu lại chẳng cho chúng ta gặt hái thêm những định lí *Breichneider* hoặc công thức *Crelle* mới.

MỘT LOẠI BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG KỲ THI VÀO PHỔ THÔNG TRUNG HỌC

NGUYỄN THỊ BÍNH

Trường THCS Trưng Vương, Hà Nội

Trong các kỳ thi vào THPT các bạn thường gặp những bài tập về đồ thị các hàm số phụ thuộc tham số. Đây là những bài toán khó ở cấp Trung học cơ sở. Các bạn lại ít có bài tập trong sách giáo khoa để tham khảo. Đồng thời sau này thi vào đại học các bạn sẽ gặp lại chúng ở mức độ khó hơn. Thế mà để giải được các bài này, lại chỉ cần nắm vững định nghĩa đồ thị hàm số. Trong bài báo này tôi sẽ cùng các bạn xét vấn đề đó qua một ít ví dụ mẫu. Do khuôn khổ bài viết nên chỉ đề cập 8 dạng bài hay gặp nhất trong các kỳ thi và mỗi dạng chỉ nêu một vài ví dụ. Nào chúng ta hãy bắt đầu từ dạng đơn giản nhất.

Dạng 1: *Tìm giá trị của tham số để đồ thị đi qua một điểm có toạ độ $(x_0;y_0)$ cho trước.*

Muốn vậy theo định nghĩa đồ thị x_0, y_0 phải thoả mãn phương trình $y=f(x,m)$ của đồ thị, tức $y_0=f(x_0,m)$.Giải phương trình này đối với tham số m ta có các giá trị m cần tìm.

Ví dụ: Xác định m để đường thẳng $y=(m^2-1)x+m$ đi qua điểm $A(2;8)$.

Giải: Đồ thị đi qua $A(2;8) \Leftrightarrow$ toạ độ của A phải thoả mãn phương trình đồ thị. Ta có:

$$8=(m^2-1).2+m \Leftrightarrow 2m^2+m-10=0 \Leftrightarrow m_1=2; m_2=\frac{5}{2}.$$

Dạng 2: *Tìm điểm cố định của một họ đồ thị.*

Điểm cố định của họ đồ thị là điểm mà mọi đồ thị của họ đều đi qua.

Cho họ đồ thị $y=f(x;m).A(x_0,y_0)$ là điểm cố định mà họ đồ thị đi qua, nghĩa là với mọi m đồ thị đều qua $A \Leftrightarrow$ phương trình ẩn m là $y_0=f(x_0,m)$ nghiêm đúng với mọi m. Vì vậy để tìm điểm cố định ta làm như sau:

Đưa phương trình $y_0=f(x_0,m)$ thành phương trình $y_0=f(x_0,m)$ - $y_0 = 0$ có vế trái là đa thức của m. Đa thức đó bằng 0 với mọi $m \Leftrightarrow$ các hệ số của nó phải đồng thời bằng 0. Từ đó dẫn đến một hệ phương trình đối với ẩn (x, y)

Mỗi nghiệm (x_0,y_0) (nếu có)là toạ độ của một điểm cố định.

Ví dụ: Chứng minh rằng các đường thẳng có phương trình $y=(m-1)x+6m-1992$ luôn đi qua một điểm cố định duy nhất mà ta có thể xác định được toạ độ của nó.

Giải: (x_0,y_0) là điểm cố định của họ đường thẳng

$$\Leftrightarrow y_0=(m-1)x_0+6m-1992\ \forall m$$
$$\Leftrightarrow mx_0-x_0+6m-1992-y_0=0\ \forall m$$
$$\Leftrightarrow (x_0+6)m-x_0-y_0-1992=0\ \forall m$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+6=0 \\ -x_0-y_0-1992=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-6 \\ y_0=-1986 \end{cases}$$

Vậy họ đường thẳng đã cho luôn đi qua một điểm cố định duy nhất là $(-6;-1986)$.

Dạng 3: *Điều kiện để hai đường $y=f(x,m)$ và $y=g(x,m)$ cắt nhau*

Cần và đủ là phương trình $f(x,m)=g(x,m)(1)$ có nghiệm. Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của hai đồ thị.

*) Đặc biệt: Đồ thị $y=f(x,m)$ cắt trục hoành $\Leftrightarrow f(x,m)=0$ có nghiệm (vì phương trình của trục hoành là .

Ví dụ:

1. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B?

Giải : Phương trình $\frac{x^2}{2} = x + m$ phải có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0$ (vì a = 1 ≠ 0)

$\Leftrightarrow 1 + 2m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

2. Với giá trị nào của *k* để đồ thị $y = k^2x^2 + 4x + 1$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt?

Giải: Điều kiện là phương trình $k^2x^2 + 4x + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ 4 - k^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ |k| < 2 \end{cases}$$

Đặc biệt nếu hai đồ thị đều là đường thẳng thì việc giải quyết đơn giản, đã làm ở sách giáo khoa (Đại số 9)

- Đường thẳng $y = ax + b$ (2) cắt đường thẳng $y = a'x + b'$ (3) $\Leftrightarrow a \neq a'$

- Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $ax + b = a'x + b'$

Tung độ giao điểm tính được bằng cách thay *x* ở (2) hoặc ở (3) bằng hoành độ vừa tìm được.

Vì vậy việc giải bài toán ba đường thẳng đồng quy bao gồm 2 việc:

-Tìm giao điểm *A* của hai trong ba đường thẳng đó

- Buộc đường thẳng thứ ba đi qua *A* (trở về dạng 1)

Dạng 4: *Biện luận số giao điểm của hai đồ thị* $y = f(x,m)$ *và* $y = g(x,m)$.

Bài toán đưa về: Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x,m) = g(x,m)$.

Ví dụ: Cho parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2mx + m - 6$. Biện luận số giao điểm của hai đồ thị trên theo tham số *m*.

Giải: Xét phương trình

$$x^2 = 2mx + m - 6 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - m + 6 = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta' = m^2 + m - 6 = (m-2)(m+3)$$

+) Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < -3; m > 2$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ 2 đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

+) Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3; m = 2 \Leftrightarrow$ 2 đồ thị tiếp xúc nhau.

+) Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 2 \Leftrightarrow$ 2 đồ thị không cắt nhau.

Dạng 5: *Điều kiện để hai đường thẳng song song, vuông góc.*

Đường thẳng $y = ax + b$ và đường thẳng $\Delta = x^2\left[(1-x^2)^2 - 4\right]$

- Song song $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$

- Vuông góc $\Leftrightarrow a.a' = -1$.

Ví dụ 1: Tìm m để hai đường thẳng $y=(m^2+4)x+m$ và $y=5mx+4$ song song với nhau.

Giải: Hai đường thẳng đã cho song song với nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4=5m & (1) \\ m\neq 4 & (2) \end{cases}$$

$$(1)\Leftrightarrow m^2-5m+4=0\Leftrightarrow m_1=1;m_2=4.$$

Kết hợp với (2) ta được $m = 1$.

Ví dụ 2: Tìm m để đường thẳng $y=(m-1)x+2$ vuông góc với đường thẳng $y=3x-1$.

Giải: Hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau

$$\Leftrightarrow 3.(m-1)=-1\Leftrightarrow m=\frac{2}{3}.$$

Dạng 6: *Điều kiện để đường thẳng $y=mx+n$ tiếp xúc với parabol $y=ax^2+bx+c$.*

Hai đồ thị tiếp xúc $\Leftrightarrow$ phương trình $ax^2+bx+c=mx+n$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow ax^2+(b+m)x+c-n=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases}$

Ví dụ: Tìm phương trình đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-3 (P)$ và song song với đường thẳng $y=2x+4$.

Giải: Đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng $y=2x+4$ nên phương trình của nó có dạng $y=2x+b$. Đường thẳng này tiếp xúc với (P)

$\Leftrightarrow$ phương trình $-x^2+4x-3=2x+b$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow x^2-2x+3+b=0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'=0 (a=1\neq 0$ rồi$)$ $\Leftrightarrow -b-2=0\Leftrightarrow b=-2$

Vậy đường thẳng cần tìm là $y=2x-2$.

*) Chú ý rằng: Khi đường thẳng tiếp xúc với đường cong thì đường thẳng được gọi là tiếp tuyến của đường cong. Vì vậy các bài toán về tiếp tuyến được đưa về dạng này.

Chẳng hạn bài toán: Cho parabol $y=2x^2 (P)$ viết phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm (1; 2).

Giải: Tiếp tuyến là đường thẳng nên phương trình có dạng $y=ax+b$.

Đường thẳng này đi qua $A(1;2)\Leftrightarrow 2=a+b\Leftrightarrow b=2-a$.

Suy ra họ đường thẳng đi qua $A(1;2)$ có phương trình $y=ax+2-a$.

Đồ thị tiếp xúc với $(P)\Leftrightarrow 2x^2=ax+2-a$ có nghiệm kép $x = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2-ax-2+a=0$ có nghiệm kép $x = 1$

$\Leftrightarrow \Delta=0 (a=2\neq 0)$

$\Leftrightarrow a^2-8a+16=0\Leftrightarrow (a-4)^2=0\Leftrightarrow a=4.$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (P) tại (1; 2) là $y=4x-2$.

*) Đặc biệt: Để chứng minh họ đồ thị bậc hai $y = f(,m)$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định thì đường thẳng đó phải là tiếp tuyến của mọi đường cong trong họ; nghĩa là phương trình ẩn x:

$f(x,m) = ax + b$ có nghiệm kép với mọi $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^3 = \left(\dfrac{k^2}{a} - 2\right)\left(\left(\dfrac{k^2}{a} - 2\right)^2 - 3\right) \leq 52$

Ví dụ: Chứng minh rằng $\forall m \neq 1$, họ đồ thị $y = (m-1)x^2 + 2(X)$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Giải: Giả sử đường thẳng cố định có phương trình là $y = ax + b$.

Đường thẳng này tiếp xúc với (X) $\Leftrightarrow (m-1)x^2 + 2 = ax + b$ có nghiệm kép $\forall m \neq 1 \Leftrightarrow (m-1)x^2 - ax + 2 - b = 0$ có nghiệm kép $\forall m \neq 1$

$$\Leftrightarrow \Delta = 0\ \forall m \neq 1 \Leftrightarrow (b-2)m + a^2 + 2 - b = 0\ \forall m \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - 2 = 0 \\ a^2 + 2 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \end{cases}$$

Vậy họ (X) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định có phương trình $y = 2$.

Dạng 7: *Tìm tập hợp điểm.*

Dựa vào định nghĩa đồ thị, muốn tìm tập hợp điểm M ta tiến hành như sau:

- Tìm toạ độ (x, y) của M. Toạ độ ấy phụ thuộc tham số m.

- Khử m ta được hệ thức liên hệ giữa y và x. Hệ thức này là phương trình của đường mà tập hợp điểm M thuộc vào nó.

- Căn cứ vào bài toán cụ thể để giới hạn chính xác tập hợp điểm đó.

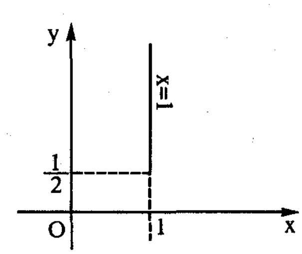
Ví dụ: Tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng AB khi m thay đổi, với A, B là giao điểm của hai đồ thị $y = x + m$ và $y = \dfrac{x^2}{2}$.

Giải: Xét phương trình $\dfrac{x^2}{2} - x - m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2m = 0$ (1)

Đã biết hai đường cắt nhau ở hai điểm A, $B \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{2}$ (Dạng 3 đã làm).

Hoành độ các điểm này là nghiệm của (1) nên

$$x_A = 1 + \sqrt{\Delta'}$$
$$x_B = 1 - \sqrt{\Delta'}$$



I là trung điểm của AB nên

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1$$

$y_I = 1 + m$ (vì I thuộc đường thẳng $y = x + m$).

Khi m thay đổi x_I luôn bằng 1. Vậy I chạy trên đường thẳng $x = 1$.

Giới hạn: Vì $m > -\frac{1}{2}$ mà $m = y_I - 1 \Leftrightarrow y_I - 1 > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_I > \frac{1}{2}$.

Vậy tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng AB là nửa đường thẳng $x = 1$ ứng với phần $y > \frac{1}{2}$.

Dạng 8 : *Bài tập về diện tích một hình do các đồ thị tạo nên trên mặt phẳng toạ độ.*

Ta tính toạ độ các giao điểm của các đồ thị, suy ra độ dài các đoạn thẳng. Áp dụng công thức tính diện tích các hình để giải bài.

Ví dụ: Xác định m để đường thẳng $y = mx + 2$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 8.

Giải: Tìm giao điểm của đường thẳng đã cho với hai trục toạ độ bằng cách lần lượt cho x và y bằng 0.

Thấy ngay $\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_B = -\dfrac{2}{m} \\ y_B = 0 \end{cases}$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{1}{2}|y_A|.|x_B| = \frac{1}{2}.2.\left|-\frac{2}{m}\right| = \left|\frac{-2}{m}\right|$$

Do đó $$S_{\Delta AOB} = 8 \Leftrightarrow \left|-\frac{2}{m}\right| = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{2}{m} = 8 \\ -\dfrac{2}{m} = -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{4} \\ m = \dfrac{1}{4} \end{array}\right..$$

Bây giờ các bạn hãy thử làm bài tập sau đây. Hy vọng các bạn sẽ không gặp phải khó khăn.

Cho parabol $y = \frac{x^2}{2}$

a) Viết phương trình của họ đường thẳng có hệ số góc m và đi qua điểm A trên trục hoành có hoành độ $x = 1$.

b) Xét số giao điểm của hai đồ thị trên khi m biến thiên.

c) Tìm trong họ đường thẳng đó những đường thẳng tiếp xúc với parabol. Xác định toạ độ của tiếp điểm trong trường hợp đó.

d) Trong trường hợp hai đường cắt nhau tại hai điểm phân biệt, tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng nối hai giao điểm đó khi m biến thiên.

e) Tìm trên parabol đã cho những điểm mà họ đường thẳng $y = mx - m$ không đi qua với mọi m.

MỘT CÁCH CHỨNG MINH CÔNG THỨC HÊRÔNG BẰNG KIẾN THỨC THCS

TRẦN LƯƠNG CÔNG KHANH
Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Thuận

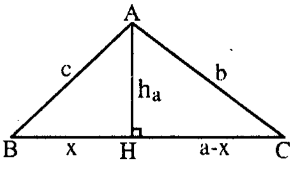
1) Chúng ta biết rằng có thể tính diện tích S của một tam giác với độ dài ba cạnh là a, b, c theo công thức Hêrông:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (1)$$

trong đó $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi.

Trong sách Hình học lớp 10 do GS Trần Văn Hạo chủ biên, NXBGD xuất bản, công thức (1) được chứng minh nhờ một số hệ thức lượng trong tam giác. Phần lớn các hệ thức lượng này lại được chứng minh bằng công cụ véctơ.

Sau đây là một cách chứng minh công thức (1) chỉ bằng kiến thức THCS.



2) Trong tam giác ABC, tồn tại một đỉnh mà chân đường cao hạ từ đỉnh đó thuộc cạnh đối diện. Không mất tổng quát, giả sử đỉnh đó là A. Gọi $AH = h_a$ là đường cao của tam giác ABC. Ta có:

$$BH + HC = BC \qquad (2)$$

Đặt $BH = x (0 \le x \le a)$. Từ (2) ta có $HC = a - x$. Áp dụng định lí Pythagore cho các tam giác vuông AHB và AHC, ta có hệ:

$$\begin{cases} h_a^2 + x^2 = c^2 & (3) \\ h_a^2 + (a-x)^2 = b^2 & (4) \end{cases}$$

Lấy (3) trừ (4) theo vế, ta được:

$$2ax - a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \qquad (5)$$

Thay (5) vào (3) ta được:

$$h_a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2 = c^2$$

$$\Rightarrow h_a^2 = \left(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a}$$

$$= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

Vì p là nửa chu vi của tam giác nên $a+b+c=2p$,

$$a+c-b=2(p-b), b+a-c=2(p-c), b-a+c=2(p-c)$$

D đó:

$$h_a^2=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2} \Rightarrow h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (6)$$

Vậy, diện tích của tam giác ABC là:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Công thưc (1) đã được chứng minh.

3) Công thức (6) thu được nhờ đặt thêm ẩn số x và giải hệ 2 phương trình với 2 ẩn h_a và x.

Từ (6), bằng cách thay đổi vai trò của a, b, c ta được:

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Rất mong được đọc bài của các bạn trong những số báo sau với một cách chứng minh công thức (1) bằng công cụ sơ cấp hơn.

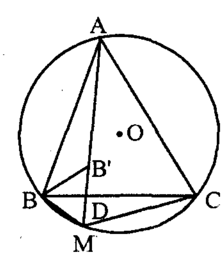
XUNG QUANH MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

HOÀNG NGỌC CẢNH
Trường THPT Chuyên Hà Tĩnh

Ở SGK lớp 9 có bài toán: *Cho ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn tâm O. M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC, ta có:*

$$MA = MB + MC \qquad (1)$$

Mọi người giải bài toán này một cách dễ dàng. Song sau khi giải bài toán này các bạn đã có suy nghĩ để phát triển bài toán. Sau đây tôi nêu ra một số suy nghĩ để khai thác bài toán. Gọi a là cạnh của $\Delta ABC, D$ là giao của AM và BC (h.1).



Hình 1

Áp dụng hệ thức (1) và chứng minh $\Delta MBD \sim \Delta MAC$

Ta có kết quả $\dfrac{1}{MD}=\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{MC} \qquad (2)$

Hệ thức (2) có ở một số sách toán.

Đi xa hơn nữa, chúng ta hãy nhớ đến bài toán: "Cho ΔABC có các góc nhỏ hơn 120^0. Dựng ra phía ngoài trên các cạnh của ΔABC các tam giác đều BCA_1, ACB_1, ABC_1; Thế thì ta có

AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm I nằm trong ΔABC; các tứ giác $AIBC_1, AICB_1, BICA_1$ nội tiếp được trong một đường tròn" (xem h.2). Áp dụng hệ thức (1) và kết quả của bài toán trên ta dễ dàng chứng minh các hệ thức:

$$IA + IB + IC = \frac{1}{2}(IA_1 + IB_1 + IC_1) \quad (3)$$

$$\frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} + \frac{1}{IC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} + \frac{1}{IC_2}\right) \quad (4)$$

(A_2, B_2, C_2 là giao điểm của AA_1, BB_1, CC_1 với BC, AC, AB).

Hơn nữa nghiên cứu bài toán trên ta còn có kết quả $IA + IB + IC$ đạt giá trị nhỏ nhất trong các tổng $I'A + I'B + I'C, I'$ nằm trong ΔABC. Vậy ta có kết quả với điểm I' bất kỳ trong ΔABC thì:

$$I'A + I'B + I'C \geq \frac{1}{3}(AA'_1 + BB_1 + CC_1)$$

Vẫn sử dụng hệ thức (1), ở (h.1) nếu ta đặt B' trên MA sao cho $MB' = MB$; áp dụng hệ thức trong tam giác ABB' ta có

$$a^2 = B'B^2 + B'A^2 + BB' \times B'A,$$

hay: $$2a^2 = 2(MB^2 + MC^2 + MB \times MC) \quad (*)$$

Mặt khác bình phương 2 vế của (1) ta có:

$$MB^2 + MC^2 + 2MB \times MC = MA^2 \quad (**)$$

Cộng hai vế của (*) và (**) ta có hệ thức:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2 \quad (5)$$

Lại bình phương 2 vế của (*), luỹ thừa bậc bốn hai vế của (1), áp dụng như cách trên ta lại có hệ thức:

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = 2a^4 \quad (6)$$

(Các hệ thức (5), (6) áp dụng cho điểm M bất kỳ trên (O), hai hệ thức này cũng có trong một số sách chọn lọc, song cách chứng minh còn dài).

Quay lại bài toán (h.2) ta có các hệ thức sau:

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 + \frac{1}{2}(IA_1^2 + IB_1^2 + IC_1^2) = a^2 + b^2 + c^2 \quad (7)$$

$$IA^4 + IB^4 + IC^4 + \frac{1}{2}(IA_1^4 + IB_1^4 + IC_1^4) = a^4 + b^4 + c^4 \quad (8)$$

(Trong đó a, b, c là cạnh của tam giác ABC).

Các bạn có thể tiếp tục khai thác và phát triển bài toán để có nhiều hệ thức và bài toán khác. Sau đây tôi nêu ra một số bài toán.

Bài 1. Vẫn bài toán trên (h.1).

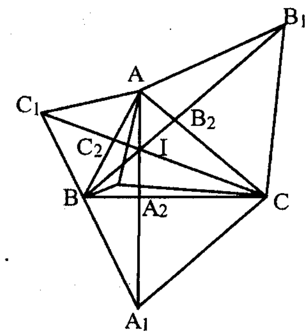
a) Chứng minh hệ thức

$$MA^2.MB^2 + MB^2.MC^2 + MC^2.MA^2 = 2a^4$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của tích $MA \times MB \times MC$, của tổng $MA + MB + MC$

Bài 2. Cho ΔABC đều nội tiếp một đường tròn tâm O. Một đường tròn tâm I thay đổi có bán kính không đổi r luôn luôn tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi x, y, z lần lượt là độ dài các tiếp tuyến kẻ từ A B, C đến đường tròn $(I\,;\,r)$. Tìm giá trị lớn nhất tích xyz, tổng $x + y + z$.

Bài 3. Cho ΔABC có $AB + AC = k$ không đổi. Dựng ΔBCD đều (D khác phía với A đối với cạnh BC) Tìm giá trị lớn nhất của AD.



Hình 2

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NHỜ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

LÊ QUỐC HÁN
Nghệ An

Ý tưởng của phương pháp "Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế" là sử dụng các phép biến đổi tương đương hay phép biến đổi hệ quả để đưa đến một phương trình chỉ còn một ẩn số. Trong bài báo này, tôi xin trao đổi với các bạn con đường ngược lại là làm tăng số ẩn của phương trình.

Thí dụ 1: Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97 - x} = 5$$

Nhận thấy ngay: nếu ta giải phương trình này bằng phương pháp thông thường thì không hy vọng thành công. Để ý rằng: tổng các biểu thức dưới dấu căn là hằng số nên ta hãy đặt

$$\sqrt[4]{x} = u, \sqrt[4]{97 - x} = v$$

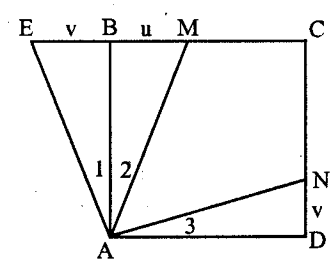
và đưa phương trình đã cho về hệ

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97 \\ u, v \geq 0 \end{cases}$$

Giải hệ này bằng cách đặt $u + v = S, uv = P$ và chú ý $u^4 + v^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$ ta có

$$u_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 16$$

$$u_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 81$$



Ta xét một thí dụ khó hơn.

Thí dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và hai điểm M, N chuyển động trên hai cạnh BC và CD sao cho $\dfrac{AA_2}{CC_2} = \dfrac{AB_1}{B_1C}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Giải: Ta đưa vào các ẩn mới: $BM = u, CN = v (0 \leq u, v \leq a)$ (1)

Khi đó $S_{\Delta AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{CMN}$

$$= a^2 - \frac{1}{2}au - \frac{1}{2}av - \frac{1}{2}(a-u)(a-v) = \frac{1}{2}(a^2 - uv) \qquad (2)$$

Ta cần tìm thêm sự liên hệ giữa u và v. Muốn vậy, kéo dài MB một đoạn $BE = v$. Khi đó $ABE = ADN$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = AN$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$

$$\Rightarrow \widehat{EAM} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A_3} + \widehat{A_2} = 45^o \text{ (vì } \widehat{MAN} = 45^o \text{ theo giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \Delta AME = \Delta AMN(c.g.c) \Rightarrow MN = ME = u + v.$$

Trong $\Delta\, CMN$ ta có $MN^2 = CM^2 + CN^2$

$$\Leftrightarrow (u+v)^2 = (a-u)^2 + (a-v)^2$$
$$\Leftrightarrow a(u+v) = a^2 - uv \qquad (3)$$

Ta đặt $u + v = t$ thì từ (3) suy ra $S_{\Delta AMN} = \frac{at}{2}$(do đó việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $S_{\Delta AMN}$ được chuyển sang việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của t).

Từ $\begin{cases} u + v = t \\ uv = a^2 - at \end{cases}$

Ta suy ra u và v là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - tX + a^2 - at = 0 \qquad (4)$$

Điều kiện cần và đủ để (4) có nghiệm là $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4at - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2a(\sqrt{2} - 1) \text{ vì } t \geq 0.$$

Khi $t = 2a(\sqrt{2} - 1)$ thì (4) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = a(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow u = v = a(\sqrt{2} - 1)$ thoả mãn điều kiện (1), nên $t_{\min} = 2a(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \min S_{\Delta AMN} = a^2(\sqrt{2} - 1)$ đạt được khi và chỉ khi $u = v = a(\sqrt{2} - 1)$

Ta lại có:

$$at = a^2 - uv \leq a^2, \text{ vì } u, v \geq 0 \Rightarrow t \leq a.$$

Khi $t = a$ thì (4) có hai nghiệm $t_1 = a, t_2 = 0$

$$\Rightarrow u_1 = a, v_1 = 0; u_2 = 0, v_2 = a \text{ cũng thoả mãn điều kiện (1).}$$

Vậy $t_{\max} = a \Rightarrow \max S_{\Delta AMN} = \frac{a^2}{2}$ đạt được khi và chỉ khi

$$M \equiv B, N \equiv C \text{ hay } M \equiv C, N \equiv D.$$

Xin mời bạn hãy dùng phương pháp nêu trên để giải các bài tập sau:

Bài tập 1: Đơn giản biểu thức

$$A = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Bài tập 2: Giải phương trình:

$$\sqrt[4]{5x + 71} - \sqrt[4]{5x + 6} = 1$$

Bài tập 3 : Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn O bán kính bằng 1 và một đường thẳng quay quanh O cắt hai cạnh AB và AC tại M và N. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN.

Đáp số : - bài tập 1 : $A= 2$.

- bài tập 2 : $x = 2$.

Hướng dẫn bài tập 3 : Đặt $AM = u, AN = v (0 \le u, v \le \sqrt{3})$, dùng công thức tính đường phân giác trong AO của tam giác AMN để suy ra hệ thức : $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \sqrt{3}$.

DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI ĐỂ TÌM CỰC TRỊ TRONG HÌNH HỌC

VŨ HỮU BÌNH

Trường THCS Trưng Vương, Hà Nội.

Các bài toán cực trị trong hình học thường có dạng như sau :

Trong tất cả các hình có cùng một tính chất, tìm hình sao cho một đại lượng nào đó (độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích...) có GTLN hoặc GTNN.

Một trong các phương pháp giải toán cực trị hình học là sử dụng các bất đẳng thức, trong đó có bất đẳng thức Cô-si.

Học sinh lớp 8 PTCS được làm quen với bất đẳng thức Cô-si dưới dạng $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \ge xy$ hoặc $(x+y)^2 \ge 4xy$. Ở các bài toán cực trị hình học, bất đẳng thức này được sử dụng dưới các dạng sau :

1. Tìm giá trị nhỏ nhất :

- Dạng 1 : $(x+y)^2 \ge 4xy$ hoặc $x^2 + y^2 \ge 2xy$.
- Dạng 2 : $\frac{(x+y)^2}{xy} \ge 4$.
- Dạng 3 : Nếu tích xy là hằng số thì tổng $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

2. Tìm giá trị lớn nhất :

- Dạng 4 : $4xy \le (x+y)^2$ hoặc $2xy \le x^2 + y^2$
- Dạng 5 : $\frac{xy}{(x+y)^2} \le \frac{1}{4}$.
- Dạng 6 : Nếu tổng $x + y$ là hằng số thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Trong các bất đẳng thức trên, điều kiện để xảy ra dấu đẳng thức là $x = y$ và trừ các dạng 1 và 4, các dạng khác đòi hỏi x và y là các số dương.

Dưới đây là một số bài tập tìm cực trị hình học có sử dụng bất đẳng thức Cô-si trong khuôn khổ kiến thức lớp 8.

Bài toán 1. *Cho ΔABC. Qua một điểm M bất kỳ thuộc cạnh AC, kẻ các đường song song với hai cạnh kia, chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành ấy có diện tích lớn nhất.*

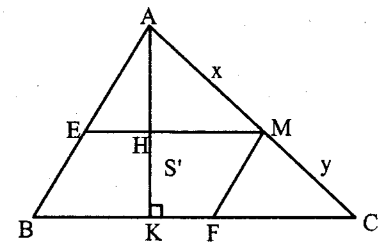
Giải : Gọi hình bình hành tạo thành là *BEMF*, dt(*BEMF*) = *S'*; dt(*ABC*) = *S*(const).

Cần tìm GTLN của *S'*.

Kẻ $AK \perp BC, AK$ cắt *EM* ở *H*. Ta có

$$S' = EM.HK,$$

$$S = \frac{1}{2}BC.AK \text{ nên } \frac{S'}{S} = 2\frac{EM}{BC}.\frac{KH}{AK}.$$



Đặt $MA = x, MC = y$ chú ý rằng

$$\frac{EM}{BC} = \frac{x}{x+y}, \frac{HK}{AK} = \frac{y}{x+y} \text{ (định lí Ta-lét)}$$

nên $$\frac{S'}{S} = \frac{2xy}{(x+y)^2}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si dạng 5 thì $\frac{S}{S'} = \frac{2xy}{(x+y)^2} \le \frac{1}{2}$. Do đó $\max S' = \frac{1}{2}S$. Khi đó *x* = *y*, tức là *M* là trung điểm của *AC*.

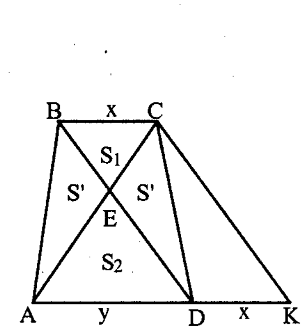
Khai thác bài toán 1, từ $\frac{S'}{S} \le \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{S}{S'} \ge 2$. Do đó nếu *S'* là hằng số còn *S* thay đổi thì $\min \frac{S}{S'} = 2$, ta có bài toán 2.

Bài toán 2. *Cho hình bình hành BEMF. Dựng cát tuyến qua M cắt các cạnh của góc B tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.*

Bài toán này còn có thể diễn đạt dưới dạng khác : Cho góc *B* khác góc bẹt và một điểm *M* thuộc miền trong của góc. Dựng cát tuyến qua *M* cắt hai cạnh của góc *B* tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Giải : Xét $\frac{S}{S'} = \frac{(x+y)^2}{2xy} \ge 2$ (sử dụng bất đẳng thức Cô-si dạng 1).

Cách giải khác : Trước hết dựng cát tuyến qua *M* cắt các cạnh của góc *B* ở *A* và *C* sao cho *M* là trung điểm của *AC*. Xét cát tuyến bất kỳ đi qua *M* tạo với cát tuyến trước hai tam giác nhỏ, chứng minh rằng tam giác nằm trong ΔABC có diện tích nhỏ hơn.



Bài toán 3. *Trong các hình thang ABCD (BC//AD) có diện tích S không đổi. E là giao điểm các đường chéo, ở hình thang nào thì ΔABE có diện tích lớn nhất?*

Giải : Dễ thấy dt(ABE) = dt(CDE), đặt các diện tích đó bằng S'. Đặt

$$dt(CEB) = S_1, dt(AED) = S_2.$$

Trước hết ta chứng minh rằng $S'^2 = S_1.S_2$.

Thật vậy, $$\frac{S_1}{S'} = \frac{EC}{EA}, \frac{S'}{S_2} = \frac{EC}{EA} \Rightarrow \frac{S_1}{S'} = \frac{S'}{S_2} \Rightarrow S'^2 = S_1S_2 \qquad (1)$$

Đặt $BC = x, AD = y$, ta sẽ biểu thị các tỷ số $\frac{S_1}{S}, \frac{S_2}{S}, \frac{S'}{S}$ theo x và y. Qua C kẻ đường thẳng song song với BD, cắt AD ở K. Ta có $DK = BC = x$

$dt(ACK) = dt(ABCD) = S$.

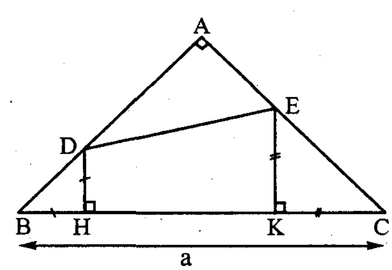
ΔACK đồng dạng với ΔCEB và ΔAED nên

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{BC}{AK}\right)^2 = \frac{x^2}{(x+y)^2}, \frac{S_2}{S} = \left(\frac{AD}{AK}\right)^2 = \frac{y^2}{(x+y)^2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) : $\left(\frac{S'}{S}\right)^2 = \frac{S_1}{S}.\frac{S_2}{S} = \frac{x^2y^2}{(x+y)^4} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{xy}{(x+y)^2}$.

Theo bất đẳng thức Cô-si dạng 5 thì $\frac{S'}{S} = \frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$. Do đó $\max S' = \frac{1}{4}S$. Khi đó $x = y$, tức là hình thang $ABCD$ trở thành hình bình hành.

Bài toán 4. *Cho ΔABC vuông cân có cạnh huyền BC = a. Các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC. Vẽ DH và EK vuông góc với BC ($H, K \in BC$). Tính diện tích lớn nhất của hình thang DEKH khi D và E thay đổi vị trí trên các cạnh AB và AC.*



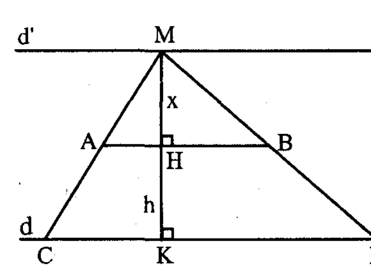
Giải : Gọi dt(*DEKH*) = *S*, ta có :

$2S = (DH + EK).HK = (BH + KC).HK$

Ta thấy tổng $(BH + KC) + HK$ không đổi (bằng a) nên tích $(BH + KC).HK$ lớn nhất khi và chỉ khi $BH + KC = HK = \frac{a}{2}$ (bất đẳng thức Cô-si dạng 6).

Khi đó $\max S = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$, hình thang *DEKH* có đường cao $HK = \frac{a}{2}$, có vô số hình thang như vậy.

Bài toán 5. *Cho đoạn thẳng AB và đường thẳng d song song với nhau. Tìm điểm M (M và d nằm khác phía đối với AB) sao cho các tia MA, MB tạo với đường thẳng d thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.*



Giải : Gọi C và D là các giao điểm của các tia MA và MB với đường thẳng d, dt(MCD) = S, MH và MK là đường cao của ΔMAB và ΔMCD.

Đặt $MH = x, AB = a(const), HK = h(const)$.

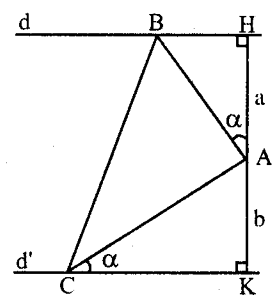
Ta có $AB // CD \Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{MH}{MK} = \dfrac{x}{x+h} \Rightarrow CD = \dfrac{a(x+h)}{x}$.

Do đó $S = \dfrac{1}{2}CD.MK = \dfrac{a}{2}.\dfrac{(x+h)^2}{x} = \dfrac{a}{2}.\dfrac{x^2+2hx+h^2}{x} = \dfrac{a}{2}\left(x + 2h + \dfrac{h^2}{x}\right)$.

Do a và h là hằng số nên S nhỏ nhất nếu $x + \dfrac{h^2}{x}$ nhỏ nhất. Ta lại thấy x và $\dfrac{h^2}{x}$ là hai số dương có tích không đổi (bằng h^2) nên tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{h^2}{x}$, tức là $x = h$ (bất đẳng thức Cô-si dạng 3).

Như vậy, có vô số điểm M thoả mãn bài toán, tập hợp của chúng là đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua trục AB.

Bài toán 6. *Cho điểm A nằm bên trong dải tạo bởi hai đường thẳng song song d và d'. Dựng điểm B thuộc d, điểm C thuộc d' sao cho ΔABC vuông ở A và có diện tích nhỏ nhất.*



Giải : Gọi H và K là các hình chiếu của A trên d và d'.

Đặt dt $(ABC) = S$, $\widehat{HAB} = \widehat{ACK} = \alpha$, $AH = a$ (const), $AK = b$ (const).

Ta có :

$AB = \dfrac{a}{\cos\alpha}, AC = \dfrac{b}{\sin\alpha}$ nên $S = \dfrac{ab}{2\sin\alpha\cos\alpha}$.

Do đó :

S nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha$ lớn nhất (1)

Với kiến thức lớp 11 ta có lời giải khá ngắn gọn :

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sin 2\alpha \leq 1$ ta có

$$\max(\sin 2\alpha) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = 90^0 \Leftrightarrow \alpha = 45^0.$$

Học sinh lớp 8 chưa học công thức $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ (có thể chứng minh được công thức này bằng kiến thức lớp 8), hơn nữa chưa có khái niệm về $\sin 90^0$. Tuy nhiên nếu nhìn biểu thức $2\sin\alpha\cos\alpha$ dưới con mắt vận dụng bất đẳng thức Cô-si, ta tìm được lời giải phù hợp với lớp 8 mà cũng ngắn gọn một cách bất ngờ :

Ta có $2\sin\alpha\cos\alpha \leq \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ (bất đẳng thức Cô-si dạng 4)

mà $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, do đó $\max(2\sin\alpha\cos\alpha) = 1$.

Như vậy : S nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0$.

Bài toán có hai nghiệm hình.

Cách giải khác : Không đặt biến số là góc α mà đặt $HB = x, KC = y$ rồi áp dụng định lí Pitago và bất đẳng thức $0 \leq y < 1$

Các bài toán trên cho thấy khả năng vận dụng bất đẳng thức Côsi để giải toán cực trị hình học khá phong phú. Nên lưu ý các kinh nghiệm sau :

1 - Chú ý đến các đại lượng không đổi : dt(ABC) ở bài toán 1, dt ($BEMF$) ở bài toán 2, dt ($ABCD$) ở bài toán 3, độ dài BC ở bài toán 4, độ dài AB và khoảng cách h ở bài toán 5, các độ dài a và b ở bài toán 6.

2 - Biểu thị các đại lượng thay đổi bởi các biến : các độ dài x và y ở các bài toán 1, 2, 3, độ dài x ở bài toán 5, góc α và $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ở bài toán 6.

3 - Ngoài cách biểu thị trực tiếp đại lượng phải tìm cực trị theo các biến (diện tích S ở các bài toán 4, 5, 6), còn có thể biểu thị gián tiếp thông qua các tỷ số trung gian (tỉ số $\frac{S'}{S}$ ở các bài toán 1 và 3). Sau đó sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm cực trị của biểu thức đang xét.

Các bài tập dưới đây dành để bạn đọc luyện tập :

Bài toán 7. Hãy nêu cách căng một sợi dây có độ dài a thành ba đoạn sao cho chúng tạo thành với bức tường có sẵn thành một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Bài toán 8. Cho ΔABC vuông cân ở A, các điểm E và F theo thứ tự thuộc các cạnh AB và AC sao cho $AE = CF$. Xác định vị trí của E và F để tứ giác $BEFC$ có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn : Đặt $AE = x, AF = y$, chú ý rằng $x + y$ không đổi.

Bài toán 9. Giải bài toán 8 nếu thay "tam giác vuông cân ở A" bởi "tam giác cân ở A".

Bài toán 10. Cho hình vuông $ABCD$. Điểm M thuộc đường chéo BD, E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB và AD. Điểm M ở vị trí nào trên BD thì ΔCEF có diện tích lớn nhất?

HD : Chứng minh dt (CEF) = dt ($BEFD$), đưa về bài toán 8.

Bài toán 11. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M cố định trên cạnh BC. Tìm điểm N trên cạnh AD sao cho tứ giác $MENF$ có diện tích lớn nhất (E là giao của AM và BN, F là giao của DM và CN).

HD : Áp dụng kết quả của bài toán 3.

THAY ĐỔI CÁCH PHÁT BIỂU BÀI TOÁN - MỘT THỦ THUẬT TÌM KIẾM LỜI GIẢI

NGUYỄN VĂN VĨNH
Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh

Một trong các phương pháp thường được sử dụng để tìm kiếm lời giải của một bài toán là thay đổi cách phát biểu bài toán, thay đổi cách biểu thị các mối liên quan giữa các dữ kiện của bài toán. Đó cũng là một cách thay thế bài toán đã cho bằng một bài toán tương đương với nó, nhưng đơn giản hơn hoặc quen thuộc với ta hơn.

Sau đây là một số ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 1. *Chứng minh rằng nếu tử số hoặc mẫu số của phân số*

$$A = \frac{a^2 + 2a + 15}{a^2 - 10a - 3}$$

chia hết cho 6 thì phân số A rút gọn được cho 6.

Có thể phát biểu lại bài toán như sau : *Nếu tử số (hoặc mẫu số) của phân số A chia hết cho 6 thì mẫu số (tử số) cũng chia hết cho 6.*

Sử dụng tính chất : Nếu $a + b \vdots 6$ và $a \vdots 6$ thì $b \vdots 6$.

Nếu $a - b \vdots 6$ và $a \vdots 6$ thì $b \vdots 6$

Ta biểu diễn $(a^2 + 2a + 15) - (a^2 - 10a - 3) = 6(2a + 3)$ thì suy ra được cách chứng minh.

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác O, phân số*

$$B = \frac{5n + 2}{(2n+1)(3n+1)} \text{ là phân số tối giản}$$

Chúng ta phát biểu lại bài toán : Chứng minh rằng *với mọi số tự nhiên n khác O, ước số chung lớn nhất của các số* 5n + 2 *và* $(2n+1)(3n+1)$ *bằng* 1.

Muốn vậy chỉ cần chứng minh

$$(5n + 2, 2n + 1) = 1 \text{ và } (5n + 2, 3n + 1) = 1$$

Thật vậy: giả sử $(5n + 2, 2n + 1) = d$, suy ra

$$\begin{cases} 5n + 2 \vdots d \\ 2n + 2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10n + 4 \vdots d \\ 10n + 5 \vdots d \end{cases} \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

Chứng minh tương tự ta có $(5n + 2, 3n + 1) = 1$

Ví dụ 3. *Tìm tất cả các số x thoả mãn*

$$|x - 5| < |x + 3|$$

Theo ý nghĩa hình học của giá trị tuyệt đối của một số *a*, ta có $|x - 5|$ là khoảng cách giữa điểm *x* và điểm 5 trên trục số. Số $|x + 3| = |x - (-3)|$ là khoảng cách giữa điểm *x* và điểm -3. Vì vậy có thể phát biểu lại bài toán như sau: *Tìm tất cả các điểm của trục số gần điểm 5 hơn điểm -3.*

Nhận thấy trung điểm của các điểm 5 và -3 là điểm 1, vậy x > 1.

Kết luận: Với mọi x>1 ta đều có $|x - 5| < |x + 3|$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$|x - 2| + |x + 7| = 9$$

Lập luận tương tự bài 3, có thể phát biểu lại bài toán như sau : *Tìm tất cả các điểm của trục số mà tổng các khoảng cách từ điểm đó tới các đầu của đoạn thẳng* $[-7,2]$ *bằng* 9.

Nhận thấy độ dài của đoạn thẳng $[-7,2]$ bằng 9 vì vậy mọi điểm của đoạn thẳng $[-7,2]$ đều thoả mãn.

Kết luận mọi x thoả mãn: $-7 \le x \le 2$ đều là nghiệm của phương trình

$$|x-2|+|x+7|=9$$

Ví dụ 5. *Chứng minh rằng phương trình* $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}=1$ *không có nghiệm x, y nguyên dương.*

Bài toán này có thể được phát biểu lại như sau : *Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên dương (x, y), biểu thức*

$$A=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}$$

đều khác 1 (lớn hơn hoặc nhỏ hơn 1).

Khi x = 1 và y =1 ta có $A = 3 > 1$.

Khi x = 1 và y = 2 ta có $A=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}>1$

Khi x = 2 và y = 1 ta có $A=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}>1$

Khi x = 2 và y = 2 ta có $A=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}<1$

Khi x > 2 và y > 2 ta có : $A=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}<\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}<1$

Kết luận : Phương trình $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y^2}=1$ không có nghiệm nguyên dương.

Ví dụ 6. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}(x-y+1)^3+y=10\\(x-y+1)^3+x=11\end{cases}$$

Với nhận xét là nếu (x, y) là nghiệm của hệ phương trình thì giữa x và y ta còn có sự liên hệ mới là $x-y=1$, do đó, việc giải hệ phương trình đã cho tương đương với việc giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(1+1)^3+y=10\\(1+1)^3+x=11\end{cases}$$

Ta nhận được nghiệm $x = 3$ và $y = 2$.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{3}{a+b+c}$$

Nếu quy đồng mẫu số hoặc áp dụng bất đẳng thức Côsi ta đều dẫn tới chỗ bế tắc.

Nếu thay đổi cách xem xét bài toán :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+a}+\frac{1}{c+a+b}$$

ta nhận thấy chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c}; \frac{1}{b+c} > \frac{1}{b+c+a}; \frac{1}{c+a} > \frac{1}{c+a+b}$$

Nhưng các bất đẳng thức cuối cùng thường dễ dàng nhận được vì

$$a+b+c > a+b;\ a+b+c > b+c;\ a+b+c > c+a.$$

Ví dụ 8. *Tìm tập hợp tất cả các điểm P nằm bên trong tam giác ABC sao cho :*

$$S_{APC} + S_{BPC} = S_{APB} \qquad (1)$$

Bài toán này không dễ. Nhưng có thể làm cho dễ hơn bằng cách phát biểu lại, với chú ý là :

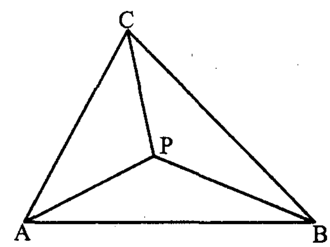
$$S_{APC} + S_{CPB} + S_{BPA} = S_{ABC}$$

do đó (1)

$$\Leftrightarrow S_{APC} + S_{BPC} + S_{APB} = 2S_{APB} \Leftrightarrow S_{ABC} = 2S_{APB}$$

Ta có bài toán : *Tìm tập hợp tất cả các điểm P nằm bên trong tam giác ABC sao cho*

$$S_{APB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$



Lại chú ý rằng các tam giác APB và ABC có chung đáy AB do đó nếu $S_{APB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ thì khoảng cách từ điểm P tới AB bằng một nửa khoảng cách từ điểm C tới AB. Như vậy ta có thể phát biểu lại bài toán một lần nữa.

Tìm tập hợp tất cả các điểm P nằm bên trong tam giác ABC sao cho khoảng cách từ P tới AB bằng một nửa khoảng cách từ C tới AB.

Dễ dàng thấy rằng tập hợp các điểm P là đường trung bình DE với D là trung điểm của AC, E là trung điểm của BC (loại ra các điểm D và E).

Từ đó ta suy ra được kết quả của bài toán 8.

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

NGUYỄN ĐỨC TẤN
Tp. Hồ Chí Minh

Trong các tài liệu sách báo viết về các phương pháp giải bài toán chứng minh bất đẳng thức ở THCS hầu như ít đề cập đến phương pháp sử dụng kiến thức hình học để giải. Với vốn liếng hình học THCS trong một số trường hợp ta có thể giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức một cách ngắn gọn và có thể nói là "đẹp".

Xin được cùng bạn đọc tìm tòi về vấn đề này thông qua các bài toán sau :

Bài toán 1. Chứng minh rằng

$$\left|\sqrt{x^2-6x+34}-\sqrt{x^2-6x+10}\right|\le 4$$

Giải :

Đặt $S=\left|\sqrt{|x-3|^2+5^2}-\sqrt{|x-3|^2+1^2}\right|$

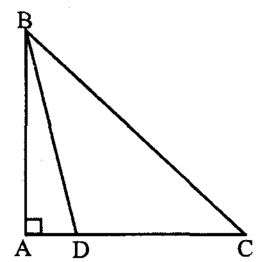
- Với $x=3$ ta có $S=4$.
- Với $x\ne 3$. Dựng $\Delta BAC.\hat{A}=90^0$, $AC=5$ (đơn vị độ dài, $AB=|x-3|$ (đơn vị độ dài)

Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD=1$ (đơn vị độ dài).

Dễ thấy :

$$BC=\sqrt{|x-3|^2+5^2}$$

$$BD=\sqrt{|x-3|^2+1^2}$$



Mà $|BC-BD|<DC=AC-AD$

S < 4 với mọi $x\ne 3$

Tóm lại $S\le 4$.

Bài toán 2. *Chứng minh rằng với x, y, z, t dương thì*

$$\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}+\sqrt{(x^2+t^2)(y^2+t^2)}\ge(x+y)(z+t)$$

Giải : Vì x, y, z, t dương nên luôn luôn tồn tại tứ giác $ABCD$ có $AC\perp BD$ tại O với $OA=x$; $OC=y$, $OB=z$, $OD=t$.

Dễ thấy

$$AB=\sqrt{x^2+z^2}$$

$$BC=\sqrt{y^2+z^2}$$

$$CD=\sqrt{y^2+t^2}$$

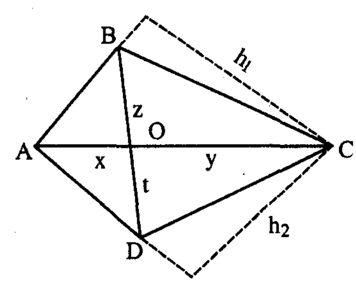
$$AD=\sqrt{x^2+t^2}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}h_1AB\le\frac{1}{2}BC.AC$$

$$S_{ADC}=\frac{1}{2}h_2AD\le\frac{1}{2}DC.AD$$

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}$$

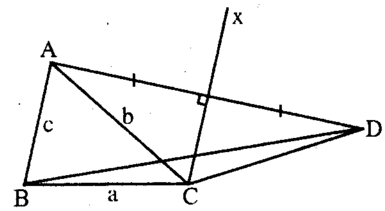
$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(x+y)(z+t)$$



Vậy $\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}+\sqrt{(x^2+t^2)(y^2+t^2)}\ge(x+y)(z+t)$

Bài toán 3. Gọi *a, b, c* là ba cạnh của một tam giác có ba đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c.

Chứng minh rằng : $\dfrac{(a+b+c)^2}{h_a^2+h_b^2+h_c^2} \ge 4$



Giải : Qua C kẻ $Cx // AB$

Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx.

Ta có $AB^2 + AD^2 = BD^2 \le (BC+CD)^2$

Vậy $4h_c^2 + c^2 \le (a+b)^2$

hay $4h_c^2 \le (a+b)^2 - c^2$

Tương tự $4h_b^2 \le (a+c)^2 - b^2$

$4h_a^2 \le (b+c)^2 - a^2$

Suy ra $4(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \le (a+b+c)^2 \Leftrightarrow \dfrac{(a+b+c)^2}{h_a^2+h_b^2+h_c^2} \ge 4$

Bài toán 4. Cho *a, b, c, d, e, f* là các số dương

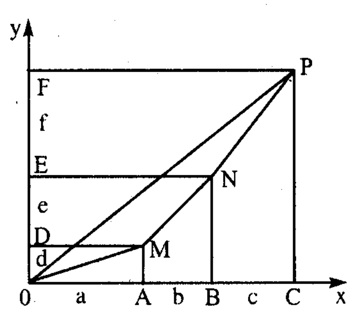
Chứng minh rằng :

$$\sqrt{(a+b+c)^2+(d+e+f)^2} \le \sqrt{a^2+d^2} + \sqrt{b^2+e^2} + \sqrt{c^2+f^2}$$

Giải :

Dựng $xOy = 90^0$. Trên Ox lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = a, AB = b, BC = c$

Trên Oy lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho $OD = d, DE = e, EF = f$. Qua A, B, C kẻ các đường thẳng d_1, d_2, d_3 song song với Oy; qua D, E, F kẻ các đường thẳng a_1, a_2, a_3 song song với Ox; a_1 cắt d_1 tại M, a_2 cắt d_2 tại N, a_3 cắt d_3 tại P. Dễ thấy :



$$OM = \sqrt{a^2+d^2}, MN = \sqrt{b^2+e^2}, NP = \sqrt{c^2+f^2}$$
$$OP = \sqrt{(a+b+c)^2+(d+e+f)^2}$$

Mà $OP \le OM + MN + NP$

Vậy : $\sqrt{(a+b+c)^2+(d+e+f)^2} \le \sqrt{a^2+d^2} + \sqrt{b^2+e^2} + \sqrt{c^2+f^2}$

Bài toán 5. Cho *x, y* là hai số thoả mãn điều kiện sau :

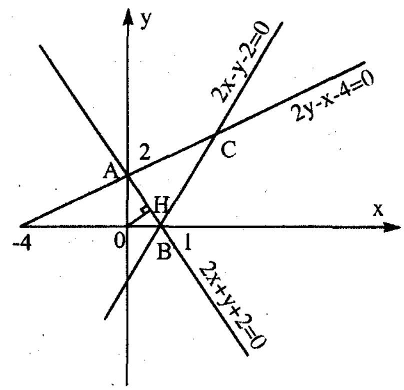
$$\begin{cases} 2x+y-2 \ge 0 \\ 2x-y-2 \le 0 \\ 2y-x-4 \le 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x^2+y^2 \ge \dfrac{4}{5}$

Giải :

Gọi $I(x,y)$ là điểm trên mặt phẳng Oxy trong đó x, y thoả mãn đầu bài.

Tập hợp các điểm $I(x,y)$ là thuộc miền mặt phẳng giới hạn bởi ΔABC.



Cần chứng minh $OI^2 \geq \dfrac{4}{5}$

Mà $\quad OH \perp AB; OI \geq OH$,

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$$

Vậy $\quad OH^2 = \dfrac{4}{5}$

$$x^2 + y^2 \geq \frac{4}{5}$$

Sau đây là các bài toán tự luyện :

1) Cho x, y là các số thoả mãn điều kiện $2x + y \geq 2, 2x - y \leq 2$.

Và $\quad x + 4 \geq 2y$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $x^2 + y^2$.

2) Cho $a, b, c > 0, a \geq c, b \geq c$

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

3) Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là các số dương.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + ... + b_n)^2}$$

4) Cho $a, b, c > 0$

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} \geq (a+b)c$$

5) Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$$

PHẦN NGUYÊN CỦA MỘT SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN CHIA HẾT

NGUYỄN VĂN VĨNH
Tp. Hồ Chí Minh

Ở lớp 7 các bạn đã biết : Cho x là một số hữu tỉ bất kì. kí hiệu $[x]$ (đọc là phần nguyên của x) là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Chẳng hạn $[2,8]=2;[-3,78]=-4;[-3]=-3;[0]=0$

Từ định nghĩa trên đây ta suy ra ngay một số tính chất đơn giản. Nếu $[x]=a$ thì $x=a+d$ với a là số nguyên, và $0\le d<1$.Nếu $[x+y]=x$ thì x là số nguyên và $0\le y<1$. Nếu n là số nguyên thì $[n+x]=n+[x]$.

Để sử dụng khái niệm phần nguyên của một số để giải các bài toán chia hết, trước hết ta chứng minh một số mệnh đề sau đây :

Mệnh đề 1 : Nếu n là một số tự nhiên thì $n.[x]\le[nx]$

Thật vậy : Đặt $[x]=a$ ta có $x=a+d$ với $0\le d<1$.

Vì $[nx]=[n(a+d)]=[na+nd]=na+[nd]$ (vì na nguyên).

Do $nd\ge 0$ nên $[nd]\ge 0$. Suy ra : $na=n[x]\le[nx]$.

Mệnh đề 2 : *Với mọi số tự nhiên n và q (q khác 0) ta có*

$$q.\left[\frac{n}{q}\right]\le n.$$

Thật vậy theo mệnh đề 1 ta có :

$$q.\left[\frac{n}{q}\right]\le\left[q.\frac{n}{q}\right]=[n]=n$$

Mệnh đề 3 : *Với mọi số tự nhiên n và q (q khác 0) ta có* $n<q.\left(1+\left[\frac{n}{q}\right]\right)$

Thật vậy : chia n cho q, ta có :

$$n=m.q+r \text{ với } 0\le r<q$$

Do đó

$$\frac{n}{q}=m+\frac{r}{q} \text{ với } 0\le\frac{r}{q}<1$$

Suy ra $\left[\frac{n}{q}\right]=m$.

Mặt khác, từ $n=mq+r$ suy ra $n=(m+1)q+r-q$ với $r-q$ âm

nên $n<(m+1)q=\left(\left[\frac{n}{q}\right]+1\right).q$

Mệnh đề 4 : *Trong dãy n số tự nhiên : 1, 2, 3, ..., n có đúng* $\left[\frac{n}{q}\right]$ *số tự nhiên chia hết cho số tự nhiên q khác 0.*

Thật vậy, xét ba trường hợp :

- Nếu $n < q$ thì $\frac{n}{q} < 1$ suy ra $\left[\frac{n}{q}\right] = 0$.

Rõ ràng trong dãy 1, 2, 3..., n ($n < q$) không có số nào chia hết cho q.

- Nếu $n = q$ thì $\left[\frac{n}{q}\right] = 1$. Trong dãy số 1, 2, 3,..., $n = q$ có đúng một số chia hết cho 9.

- Nếu $n > q$ thì $\frac{n}{q} > 1$, suy ra $\left[\frac{n}{q}\right] \geq 1$.

Nhận thấy trong dãy số : 1, 2, 3,..., q, $q + 1$,... n chỉ có các số $1.q$, $2.q$, $3.q$,..., $\left[\frac{n}{q}\right].q$ là chia hết cho q.

Thật vậy, theo mệnh đề 2 thì $q.\left[\frac{n}{q}\right] \leq n$ nên số tự nhiên $\left[\frac{n}{q}\right]q$ chia hết cho q là một số hạng của dãy : 1, 2, 3, ..., n.

Mặt khác theo mệnh đề 3 thì $n < q\left(1 + \left[\frac{n}{q}\right]\right)$ nên số tự nhiên $\left(1 + \left[\frac{n}{q}\right]\right).q$ không là số hạng của dãy 1, 2, ..., n.

Như vậy, có đúng $\left[\frac{n}{q}\right]$ số chia hết cho q.

Từ mệnh đề 4 ta suy ra ngay kết quả : Trong dãy số tự nhiên 1, 2, 3,..., n có đúng $\left[\frac{n}{q^2}\right]$ số chia hết cho q^2, có đúng $\left[\frac{n}{q^3}\right]$ số chia hết cho q^3,...

Mệnh đề 5 : *Nếu số nguyên tố p có mặt trong phân tích ra thừa số nguyên tố của n! = 1. 2. 3..., n thì số mũ cao nhất của p bằng*

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] \text{ với } p^k \leq n < p^{k+1}.$$

Thật vậy, theo kết quả trên đây : số các nhân tử của tích 1.2.3. ... n chia hết cho p đúng bằng $\left[\frac{n}{p}\right]$, số các nhân tử chia hết cho p^2 đúng bằng $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, ...

Điều này có nghĩa : số các thừa số nguyên tố p có trong phân tích ra thừa số nguyên tố của tích : 1.2.3. ... n đúng bằng :

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

Chúng ta sử dụng các kết quả nhận được trên đây vào giải toán.

Ví dụ 1. Tích số $100! = 1.2.3...100$ tận cùng là bao nhiêu chữ số 0?

(Đề thi học sinh giỏi Matxcơva vòng 1 - 1940)

Giải : Tích của 5 và một số chẵn là một số có chữ số tận cùng bằng 0.

Trong 100 số của 100! có 50 số chẵn, 50 số lẻ, vì vậy chỉ cần tìm tất cả các bội số của 5 trong tích đã cho.

Theo mệnh đề 5, số mũ cao nhất của 5 có trong phân tích ra thừa số nguyên tố 100 ! bằng :

$$\left[\frac{100}{5}\right]+\left[\frac{100}{25}\right]+\left[\frac{100}{125}\right]=24$$

Vậy tích số 100 ! tận cùng là 24 chữ số 0.

Ví dụ 2: *Chứng minh rằng nếu $(n-1)!$ chia hết cho n thì n phải là số nguyên tố.*

Giải : Giả sử n là số nguyên tố, suy ra n chỉ có hai ước số là 1 và n. Theo mệnh đề 4, trong dãy số $1, 2,..., n-1$ có $\left[\dfrac{n-1}{n}\right]=0$ số chia hết cho n. Từ đó suy ra tích: $1.\ 2.\ 3...(n-1)$ không chia hết cho n, trái với giả thiết $(n-1)$! chia hết cho n. Vậy n không phải là số nguyên tố.

Ví dụ 3: *Chứng minh rằng n!không chia hết cho* 2^n.

Giải : Theo mệnh đề 5: số mũ k cao nhất của số 2 có trong phân tích ra thừa số nguyên tố của n! là

$$k=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+...+\left[\frac{n}{2^m}\right] \text{ với } 2^m \le n \le 2^{m+1}.$$

Do đó chỉ cần chứng minh cho $n > k$ là đủ.

Theo nhận xét mở đầu ta có:

$$\left[\frac{n}{2}\right]\le\frac{n}{2},\left[\frac{n}{2^2}\right]\le\frac{n}{2^2},...,\left[\frac{n}{2^m}\right]\le\frac{n}{2^m}$$

Cộng từng vế m bất đẳng thức trên ta có :

$$k\le\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+...+\frac{n}{2^m}=n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^m}\right)$$

Đặt $$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^m}$$

$$2S=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{m-2}}+\frac{1}{2^{m-1}}.$$

Do đó $$S=2S-S=1-\frac{1}{2^m}<1.$$

Từ đó suy ra k = n. S < n, hay k < n.

Vậy $n!$ không chia hết cho 2^n.

Ví dụ 4.

a) *Chứng minh rằng tổng* $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} (n \geq 2)$ *không phải là số nguyên.*

b) *Chứng minh rằng tổng* $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{16}$ *không phải là số nguyên.*

(Đề thi vào chuyên toán vòng 2 - 1973)

Giải : a) Ta có:

$$S - 1 = \frac{\frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + ... + \frac{n!}{n}}{n!}$$

Từ mệnh đề 5 ta suy ra mẫu số *n!* chia hết cho một luỹ thừa của 2 có bậc cao hơn của tử số. Điều này chứng tỏ S - 1 không phải là số nguyên, do đó S cũng không phải là số nguyên.

b) Có thể làm tương tự như câu a.

Ví dụ 5. *Tìm số mũ a cao nhất của 7 mà 1000! có thể chia hết cho* 7^a.

Giải : Theo mệnh đề 5, số mũ a cao nhất của 7 có trong khai triển thành tích các thừa số nguyên tố của *1000!* bằng :

$$a = \left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{49}\right] + \left[\frac{1000}{343}\right] = 164.$$

Vậy 1000! chia hết cho 7^{164}.

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ VIÉT ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN ĐỄ
Hải Phòng

Định lí Viét là một định lí quen thuộc, nhưng sử dụng định lí trong những bài toán cụ thể lại là việc không đơn giản. Điều quan trọng hơn cả là hãy từ giả thiết của bài toán làm thế nào đó để có được biểu diễn của tổng và tích của hai đại lượng, từ đó dẫn đến một phương trình bậc 2. Cuối cùng là tính biệt số Δ của phương trình này và giải bất phương trình $\Delta \geq 0$.

Thật khó có thể nêu lên cách giải tổng quát, vì vậy thông qua các ví dụ, bạn đọc tự rút ra những nhận xét quan trọng để vận dụng khi làm toán.

Ví dụ 1. *Cho các số thực x, y, z khác không và thoả mãn điều kiện*

$$x + y + z = xyz, x^2 = yx.$$

Chứng minh rằng $x^2 \geq 3$.

Giải :

Dễ thấy $\begin{cases} y+z=x^3-x \\ yz=x^2 \end{cases}$

Vậy các số y, z là nghiệm của phương trình :

$$u^2+(x-x^3)u+x^2=0 \qquad (1)$$

Ta có $\Delta = x^2\left[(1-x^2)^2-4\right]$ (2)

Bởi vì (1) có nghiệm nên $\Delta \geq 0$.

Do $x \neq 0$ nên từ (2) suy ra $(1-x^2)^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow (1-x^2)^2 \geq 4$

$\Rightarrow 1-x^2 \leq -2$ hoặc $1-x^2 \geq 2$ (3)

Dễ thấy (3) vô nghiệm, do đó ta có

$1-x^2 \leq -2 \Leftrightarrow x^2 \geq 3$ (đpcm)

Ví dụ 2. *Các số thực x, y, z thoả mãn điều kiện* $x+y+z=5$ *và* $yz+xz+xy=8$.

Chứng minh rằng

$$1 \leq x \leq \frac{7}{3}, 1 \leq y \leq \frac{7}{3}, 1 \leq z \leq \frac{7}{3}.$$

Giải :

Từ điều kiện bài toán ta có :

$$\begin{cases} y+z=5-x \\ yz=8-x(5-x) \end{cases}$$

Dẫn đến y, z là nghiệm của phương trình

$$u^2+(x-5)u+x^2-5x+8=0 \qquad (1)$$

Ta có $\Delta = (5-x)^2-4(x^2-5x+8)$

Bởi vì (1) có nghiệm nên $\Delta \geq 0$, nghĩa là :

$$(5-x)^2-4(x^2-5x+8) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

Vai trò của x, y, z như nhau, nên ta cũng có $1 \leq y \leq \frac{7}{3}, 1 \leq z \leq \frac{7}{3}$.

Ví dụ 3. *Giả sử* x_1, x_2 *là nghiệm của phương trình* $x^2+kx+a=0 (a \neq 0)$. *Tìm tất cả các giá trị của k để có bất đẳng thức* $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 \leq 52$ *(a, k là các số thực)*

Giải : Ta xét *a* trong hai trường hợp :

* Nếu a < 0 thì $\Delta = k^2-4a > 0$ với mọi *k*. Khi đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm khác nhau và khác dấu. Điều đó dẫn đến bất đẳng thức đã cho đúng với mọi giá trị thực của *k*.

* Nếu a > 0

Ta có $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

Áp dụng công thức trên ta được :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3=\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)^2-3\right)$$

Nhưng $\quad \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{k^2}{a}-2$ (theo định lí Viét)

Do đó $\quad \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3=\left(\frac{k^2}{a}-2\right)\left(\left(\frac{k^2}{a}-2\right)^2-3\right)\le 52 \qquad (1)$

Đặt $\quad \frac{k^2}{a}=t$, ta có $(t-2)((t-2)^2-3)\le 52 \Leftrightarrow (t-6)(t^2+9)\le 0 \qquad (2)$

Ta thấy $t^2+9>0$ với mọi t, do đó (2) chỉ đúng khi $t-6\le 0$ hay $\frac{k^2}{a}-6\le 0$

Do a > 0 nên suy ra $k^2\le 6a$. Bởi vậy có $-\sqrt{6a}\le k\le\sqrt{6a}$.

Vậy $a<0$, k là số thực bất kỳ

hoặc $\begin{cases} a>0 \\ -\sqrt{6a}\le k\le\sqrt{6a} \end{cases}$

Ví dụ 4. *Giả sử x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $x^2+2kx+4=0$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho có bất đẳng thức :* $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\ge 3$

Giải :

Dễ thấy $x_1\ne 0, x_2\ne 0$

Ta có :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\ge 3+2$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)^2\ge 5\Leftrightarrow\left|\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right|\ge\sqrt{5} \qquad (1)$$

Mặt khác

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{4}>0 \qquad (2)$$

(theo định lí Viét)

Từ (1)và (2) ta có

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\ge\sqrt{5}\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}-2\ge\sqrt{5}$$

Một lần nữa áp dụng định lí Viét ta có :

$$\frac{(-2k)^2}{4}-2\geq\sqrt{5}\Leftrightarrow k^2-2\geq\sqrt{5}\Leftrightarrow|k|\geq\sqrt{\sqrt{5}+2}$$

Nhận xét :

Hai ví dụ trên thuộc dạng bài toán tìm kiếm giá trị của tham số. Cách tìm kiếm này dựa trên các phép biến đổi tương đương và phương trình bậc hai cho trước có chứa tham số được khai thác nhờ sử dụng định lí Viét.

SỬ DỤNG DIỆN TÍCH TRONG CHỨNG MINH

THÁI VIẾT THẢO
Nghệ An

Những bài toán xét dưới đây có thể giải được bằng nhiều cách khác. Ở đây chúng ta bàn đến cách sử dụng các công thức diện tích. Vận dụng nó như một công cụ khác, nhằm làm phong phú cách nhìn, suy luận, và do đó làm cho quá trình giải toán hứng thú, không gò bó.

Ta dựa vào các khẳng định đã biết :

1) Một đa giác chia thành các đa giác không giao nhau thì diện tích đa giác ban đầu bằng tổng diện tích các đa giác được chia ra.

2) Hai tam giác đồng dạng thì tỷ số diện tích bằng bình phương tỷ số đồng dạng.

3) Hai tam giác có chung đáy, thì tỷ số diện tích bằng tỷ số hai đường cao

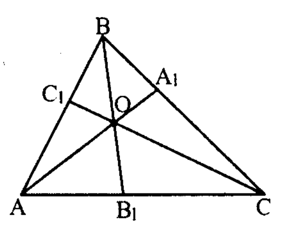
4) Hai tam giác có chung đường cao (đường cao bằng nhau) thì tỉ số diện tích bằng tỉ số hai đáy.

Dưới đây sẽ trình bày một số ứng dụng công thức diện tích vào các vấn đề :

a) T ỉ số độ dài các đoạn thẳng có thể tính theo tỉ số các diện tích :

Bài toán 1. Trên các cạnh AC và AB của ΔABC lấy các điểm B_1, C_1 tương ứng. Gọi O là giao điểm của BB_1 và CC_1. Hãy tính $\frac{OB}{OB_1}$ nếu $\frac{BC_1}{AC_1}=\alpha$ và $\frac{CB_1}{AB_1}=\beta$

Giải : Ta có $\frac{BO}{OB_1}=\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta B_1OC}}$



Xét hai tỉ số : $\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta B_1OC}}$ và $\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOC}}$

Rõ ràng rằng

$$\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta B_1OC}}=\frac{AC}{B_1C}=\frac{AB_1+B_1C}{B_1C}=1+\frac{AB_1}{B_1C}=1+\frac{1}{\beta}.$$

Vì ΔBOC và ΔAOC có OC chung nên tỉ số diện tích bằng tỉ số đường cao hạ tới OC, tỉ số đó bằng $\frac{BC_1}{AC_1}$ vì vậy $\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOC}}=\frac{BC_1}{AC_1}$

$$\Rightarrow \frac{BO}{B_1O} = \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta B_1OC}} = \frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOC}} \cdot \frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta B_1OC}} = \alpha\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

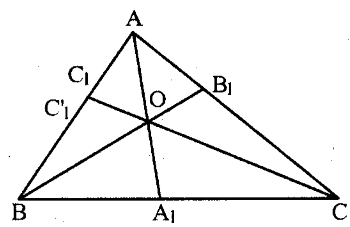
Bài toán 2. (Đ.lí Xêva) Trên các cạnh *AB, BC, CA* của ΔABC lấy các điểm C_1, A_1, B_1 tương ứng. Chứng tỏ rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

Giải **:** Giả sử các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại *O*. Áp dụng các tỉ số diện tích ta nhận được :

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{S_{\Delta ACO}}{S_{\Delta ABO}}; \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{S_{\Delta BCO}}{S_{\Delta ACO}} \text{ và } \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta BCO}}.$$

Nhân 3 đẳng thức lại với nhau ta có :

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$



Ta chứng minh diều kiện đủ :

Nếu $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$

Giả sử *O* là giao của AA_1 và BB_1. Ta kí hiệu C'_1 là giao của *OC* và *AB* thế thì từ điều kiện cần ta có :

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC'_1}{C'_1A} = 1 = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A},$$

do đó $\frac{BC'_1}{C'_1A} = \frac{BC_1}{C_1A}$.

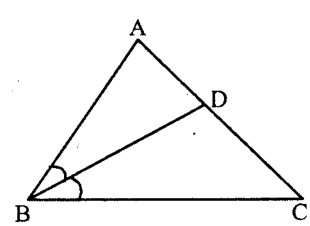
C_1 và C'_1 là hai điểm chia trong *AB* theo cùng một tỉ số vì vậy C_1 và C'_1 trùng nhau. Tức là AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Định lí Xêva vẫn đúng khi A_1, B_1, C_1 nằm ngoài các cạnh của ΔABC

Bài toán 3. Cho $\Delta ABC, BD$ là phân giác trong của góc *B*, hãy chứng minh

$$BD = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos\frac{B}{2}$$

Giải **:** Ta có :

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB.BD.\sin\frac{B}{2}}{\frac{1}{2}AB.BC.\sin B} = \frac{BD}{2BC.\cos\frac{B}{2}}$$



Mặt khác :

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AD}{AC} = \frac{c}{a+c} \rightarrow \frac{BD}{2a.\cos\frac{B}{2}} = \frac{c}{a+c}$$

$$\rightarrow BD = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos\frac{B}{2} \text{ (đpcm)}$$

b) Sử dụng tốt mối liên hệ giữa tỉ số diện tích với tỉ số các đường cao, bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp... của tam giác, đa giác.

Bài toán 4. Cho một đa giác lồi ngoại tiếp đường tròn bán kính r. Ta chia đa giác đó thành các tam giác không giao nhau. Chứng minh rằng tổng các bán kính đường tròn nội tiếp trong các tam giác đó lớn hơn r.

Giải : Kí hiệu các bán kính đường tròn nội tiếp trong các tam giác đó là $r_1, r_2, ..., r_n$. Chu vi của chúng là $p_1, p_2, ..., p_n$ và $S_1, S_2, ..., S_n$ là diện tích của chúng. Gọi chu vi đa giác đầu là p và diện tích là S. Ta luôn có $p_i < p \quad \forall i = \overline{1,n}$

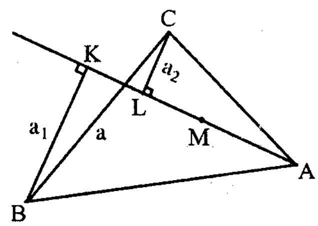
$$\Rightarrow r_1 + r_2 + ... + r_n = \frac{2S_1}{p_1} + \frac{2S_2}{p_2} + ... + \frac{2S_n}{p_n} > \frac{2S_1}{p} + \frac{2S_2}{p} + ... + \frac{2S_n}{p} = \frac{2S}{p} = r \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 5. Trong tam giác ABC ta lấy một điểm M, kí hiệu các khoảng cách từ M tới các đỉnh của tam giác là R_a, R_b, R_c còn khoảng cách tới các cạnh BC, CA và AB là d_a, d_b, d_c.

a) Chứng minh rằng : $a.R_a \geq c.d_c + b.d_b$

b) $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$

(Bất đẳng thức Ec-đô-sơ)



Giải : Hạ từ B và C các đường vuông góc BK và CL trên đường thẳng MA (hình trên).

Kí hiệu $a_1 = BK; a_2 = CL$. Rõ ràng

$$a_1 + a_2 \leq a \rightarrow \frac{1}{2}a.R_a \geq \frac{1}{2}a_2.R_a + \frac{1}{2}a_1.R_a = S_{ACM} + S_{ABM} = \frac{1}{2}b.d_b + \frac{1}{2}c.d_c$$

Bất đẳng thức đúng nếu M thuộc miền *trong góc BAC*, không đúng khi M ở ngoài.

b) Biến đổi bất đẳng thức a, và bằng việc lấy đối xứng của M qua phân giác góc A ta có :

$$R_a \geq \frac{c}{a}.d_b + \frac{b}{a}.d_c$$

Tương tự : $R_b \geq \frac{c}{b}.d_a + \frac{a}{b}.d_c; R_c \geq \frac{a}{c}.d_b + \frac{b}{c}.d_a$.

Từ đó suy ra :

$$R_a + R_b + R_c \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right).d_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right).d_b + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right).d_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

(Sử dụng BĐT $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad \forall x, y > 0$)

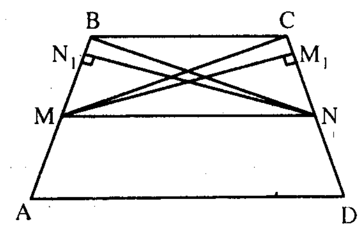
Bài toán 6. Giả sử $ABCD$ là một tứ giác lồi sao cho đường thẳng CD tiếp xúc với đường tròn đường kính AB. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn đường kính CD là các đường thẳng BC và AD song song với nhau.

(Vô địch toán quốc tế lần thứ 25 (1984))

Giải :

Gọi M là trung điểm của AB. Gọi N là trung điểm của CD. M_1 là hình chiếu của M trên CD. N_1 là hình chiếu của N trên AB.

Từ giả thiết ta có :



$$S_{\Delta NAM} = S_{\Delta NBM} = \frac{1}{2}.\frac{AB}{2}.NN_1 = \frac{AB.NN_1}{4}$$

$$S_{\Delta MCN} = S_{\Delta MND} = \frac{1}{2}MM_1.\frac{CD}{2} = \frac{AB.CD}{8}$$

Như vậy $AD \,//\, BC \Leftrightarrow BC \,//\, MN$ và $AD \,//\, MN$

$\Leftrightarrow S_{\Delta BMN} = S_{\Delta CMN}$ và $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta DMN}$

$\Leftrightarrow \dfrac{AB.NN_1}{4} = \dfrac{AB.CD}{8} \Leftrightarrow NN_1 = \dfrac{CD}{2}$

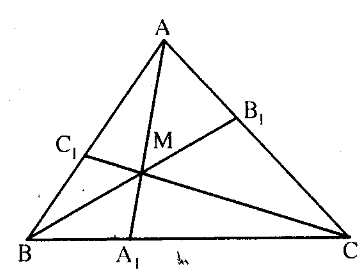
$\Leftrightarrow$ Đường tròn đường kính CD có điểm chung duy nhất với AB tại N_1.

Điều phải chứng minh.

Bài toán 7.

Cho điểm M trong ΔABC. Qua M vẽ các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh tam giác tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1.

Chứng minh rằng :



a) $\dfrac{AM}{A_1M}.\dfrac{BM}{B_1M}.\dfrac{CM}{C_1M} \geq 8$;

b) $\dfrac{AM}{A_1M} + \dfrac{BM}{B_1M} + \dfrac{CM}{C_1M} \geq 6.$

Giải :

Kí hiệu $a = S_{\Delta MBC}$, $b = S_{\Delta MAC}$, $c = S_{\Delta MAB}$.

Ta có :

$$1 + \frac{AM}{A_1M} = \frac{AM + MA_1}{A_1M} = \frac{AA_1}{A_1M} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBC}} = \frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b+c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{A_1M} = \frac{b+c}{a} \quad (1).$$

Tương tự có $$\frac{BM}{B_1M} = \frac{c+a}{b} \quad (2),$$

$$\frac{CM}{C_1M} = \frac{a+b}{c} \quad (3).$$

Với các số dương a, b, c ta luôn có $(a+b)^2 \geq 4ab$; $(b+c)^2 \geq 4bc$; $(c+a)^2 \geq 4ca$ suy ra

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \quad (4).$$

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra

$$\frac{AM}{A_1M} \cdot \frac{BM}{B_1M} \cdot \frac{CM}{C_1M} \geq 8.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si và (4) có

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}} = 6 \quad (5)$$

Từ (1), (2), (3) và (5) suy ra

$$\frac{AM}{A_1M} + \frac{BM}{B_1M} + \frac{CM}{C_1M} \geq 6.$$

NGUYÊN TẮC CỰC HẠN TRONG HÌNH HỌC

NGUYỄN VĂN VĨNH

Tp. Hồ Chí Minh

Trong quá trình tìm kiếm lời giải nhiều bài toán hình học, sẽ rất có lợi nếu chúng ta xem xét phần tử biên, phần tử giới hạn nào đó, tức là phần tử mà tại đó mỗi đại lượng hình học có thể nhận giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất, chẳng hạn như cạnh lớn nhất, cạnh nhỏ nhất của một tam giác; góc lớn nhất hoặc góc nhỏ nhất của một đa giác v.v...

Những tính chất của phần tử biên, phần tử giới hạn nhiều khi giúp chúng ta tìm được lời giải thu gọn của bài toán.

Phương pháp tiếp cận như vậy tới lời giải bài toán được gọi là nguyên tắc cực hạn.

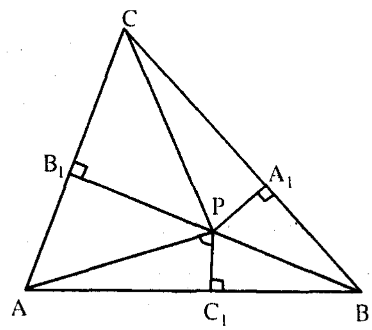
Ví dụ 1.

Một nước có 80 sân bay mà khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau và không có 3 sân bay nào thẳng hàng. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kì sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay bay đến.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 năm học 1992 – 1993. Bảng A).

Giải : Từ giả thiết suy ra nếu các máy bay bay từ các sân bay M và N đến sân bay O thì khoảng cách giữa MN là lớn nhất trong các cạnh của tam giác MON, do đó $\widehat{MON} > 60^0$. Giả sử rằng các máy bay bay từ các sân bay $M_1, M_2, ..., M_n$ tới sân bay O thì một trong các góc M_iOM_j không lớn hơn $\dfrac{360^0}{n}$ $(i, j, n = 1, 2, ..., ... 80)$ vì tổng các góc đã cho bằng 360^0. Vậy $\dfrac{360^0}{n} > 60^0$, hay $n < 6$. Khi xét các sân bay thẳng hàng thì bài toán vẫn đúng.

Ví dụ 2.



Trong tam giác ABC có ba góc nhọn, lấy một điểm P bất kì. Chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 năm học 1992 – 1993. Bảng B).

Giải : Dựng PA_1, PB_1, PC_1 tương ứng vuông góc với cạnh BC, CA và AB. Vì tam giác ABC có ba góc nhọn nên các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng nằm trong đoạn BC, CA và AB. Nối PA, PB, PC ta có : $\widehat{APC_1} + \widehat{C_1PB} + \widehat{BPA_1} + \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_1} + \widehat{B_1PA} = 360^0$.

Suy ra góc lớn nhất trong 6 góc này không thể nhỏ hơn 60^0.

Không làm mất tính chất tổng quát ta có thể giả sử rằng góc APC_1 là lớn nhất, thế thì $\widehat{APC_1} \geq 60^0$.

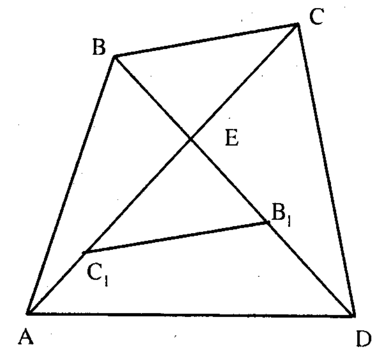
Xét tam giác vuông APC_1, ta có $\dfrac{PC_1}{AP} = \cos\widehat{APC_1} \leq \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$.

(vì nếu góc tăng từ 0^0 đến 90^0 thì cosin góc đó giảm).

Từ đó ta có $AP \geq 2PC_1$.

Nếu thay PA bằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh và thay PC_1 bằng khoảng cách ngắn nhất trong các khoảng cách từ P đến các cạnh thì bất đẳng thức càng được thỏa mãn.

Ví dụ 3.



Tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD cắt nhau ở E. Chứng minh rằng nếu các bán kính của bốn đường tròn nội tiếp các tam giác EAB, EBC, ECD và EDA mà bằng nhau, thì tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 năm học 1986 – 1987)

Giải. Không làm mất tính chất tổng quát, có thể giả sử rằng $AE \geq CE$ và $DE \geq BE$. Gọi B_1 và C_1 tương ứng là các điểm đối xứng của B và C qua tâm E, ta có tam giác C_1EB_1 nằm trong tam giác AED.

Giả sử đoạn AD không trùng với đoạn C_1B_1. Khi đó đường tròn $\mathscr{C}$ nội tiếp tam giác C_1EB_1 đồng dạng phối cảnh với đường tròn nội tiếp tam giác AED, với tâm đồng dạng E, hệ số đồng dạng lớn hơn 1.

Như vậy $r_{AED} > r_{C_1EB_1} = r_{CEB}$ (r_{AED} là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AED). Vô lí vì trái với giả thiết $r_{AED} = r_{CEB}$. Điều vô lí chứng tỏ rằng $A \equiv C_1$ và $D \equiv B_1$ suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, nên $AE = EC$.

Trong hình bình hành $ABCD$ ta có : $p_1.r = S_{AEB} = S_{BEC} = p_2.r$ với p_1, p_2 tương ứng là nửa chu vi các tam giác AEB và BEC.

Suy ra : $p_1 = p_2$, vì $AE = EC$ nên $AB = BC$ hay $ABCD$ là hình thoi.

Ví dụ 4.

Chứng minh rằng bốn hình tròn có đường kính là bốn cạnh của một tứ giác lồi thì phủ kín tứ giác đã cho.

Giải : Giả sử M là một điểm tùy ý nằm bên trong tứ giác lồi $ABCD$. Ta có : $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} + \widehat{CMD} + \widehat{DMA} = 360^o$, do đó góc lớn nhất trong bốn góc này không nhỏ hơn 90^o. Giả sử $AMB \geq 90^o$. Khi đó M nằm bên trong đường tròn đường kính AB.

Ví dụ 5.

Trên mặt phẳng cho 1993 điểm, khoảng cách giữa các điểm này đôi một khác nhau. Nối một điểm nào đó trong số các điểm này với điểm gần nhất. Cứ tiếp tục như thế. Hỏi với cách nối đó có thể nhận được một đường gấp khúc khép kín hay không ?

Giải : Giả sử xuất phát từ một điểm A_1 bất kì. Theo giả thiết trong số tất cả các đoạn thẳng có đầu mút A_1 thì tồn tại duy nhất điểm A_2 để A_1A_2 ngắn nhất. Tiếp tục xét như thế với các đoạn thẳng xuất phát từ A_2. Xảy ra 2 trường hợp : hoặc A_1A_2 ngắn nhất thì đường gấp khúc dừng lại tại A_2, hoặc tồn tại duy nhất điểm A_3 để A_2A_3 ngắn nhất, lúc đó $A_2A_3 < A_1A_2$. Giả sử có đường gấp khúc A_1A_2... $A_{n-1}A_n$ thì theo lập luận trên có $A_1A_2 > A_2A_3 > ... > A_{n-1}A_n$. Điểm A_n không thể nối được với điểm A_i nào đó với $1 \leq i \leq n - 2$ vì nếu trái lại ta có $A_nA_i < A_nA_{n-1} < A_iA_{i+1}$, mâu thuẫn với yêu cầu A_iA_{i+1} là đoạn ngắn nhất xuất phát từ A_i. Vậy đường gấp khúc $A_iA_{i+1}...A_n$ không thể khép kín.

Dưới đây là một số bài toán để các bạn tự luyện.

Bài 1. Giả sử E là giao điểm hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng nếu chu vi các tam giác EAB, EBC, ECD và EDA bằng nhau thì $ABCD$ là hình thoi.

Bài 2. Cho 1994 đường thẳng phân biệt, trong đó ba đường bất kì trong số chúng đồng quy. Chứng minh rằng 1994 đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.

Bài 3. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào nằm trên cùng một đường thẳng. Chứng minh rằng có ít nhất là một trong số các tam giác tạo thành bởi ba trong bốn điểm A, B, C, D không phải là tam giác có ba góc đều nhọn.

Bài 4. Trên mặt phẳng cho 1994 điểm sao cho ba điểm bất kì trong số đó là thẳng hàng. Chứng minh rằng 1994 điểm đã cho thẳng hàng.

Bài 5. Trên mặt phẳng cho 1994 điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn qua 3 điểm sao cho nó không chứa bất kì điểm nào trong số 1991 điểm còn lại.

MỘT MẸO NHỎ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH Ở LỚP 8

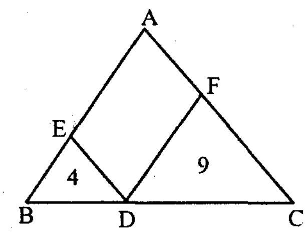
VŨ HỮU BÌNH
Hà Nội

Ta xét bài toán diện tích sau thuộc chương trình lớp 8

Cho tam giác ABC. Qua điểm D thuộc cạnh BC kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác tạo thành hai tam giác nhỏ có diện tích $4cm^2$ và $9cm^2$. Tính diện tích tam giác ABC.

Với học sinh lớp 9, giải bài toán trên không khó khăn lắm :

Ta có : $\dfrac{BD}{BC}+\dfrac{DC}{BC}=1$ (1)



Đặt $dt(ABC)=S$. Các tam giác EBD và FDC đồng dạng với ΔABC nên :

$$\left(\frac{BD}{BC}\right)^2=\frac{4}{S},\left(\frac{DC}{BC}\right)^2=\frac{9}{S} \qquad (2)$$

Suy ra $\dfrac{BD}{BC.}=\dfrac{2}{\sqrt{S}},\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{3}{\sqrt{S}}$ (3)

Từ (1) và (3) : $\dfrac{2}{\sqrt{S}}+\dfrac{3}{\sqrt{S}}=1$. Do đó $\sqrt{S}=5$.

Vậy $S=25(cm^2)$

Học sinh lớp 8 chưa học căn bậc hai nên để giải bài toán trên thường phải biến đổi như sau :

Bình phương hai vế của (1) :

$$\left(\frac{BD}{BC}\right)^2+\left(\frac{DC}{BC}\right)^2+2.\frac{BD.DC}{BC^2}=1$$

$$\frac{4}{S}+\frac{9}{S}+2.\frac{BD.DC}{BC^2}=1 \qquad (4)$$

Từ (2) : $\left(\dfrac{BD}{BC}.\dfrac{DC}{BC}\right)^2=\dfrac{36}{S^2}\Rightarrow\dfrac{BD.DC}{BC^2}=\dfrac{6}{S}$ (5)

Từ (4),(5) : $\dfrac{13}{S}+2.\dfrac{6}{S}=1$. Do đó $S=25(cm^2)$

Sở dĩ phải đi đường vòng như trên vì ở lớp 8 chưa có khái niệm về $\sqrt{S}$. Để tháo gỡ vướng mắc này chỉ cần một mẹo nhỏ : đặt $S=d^2$. Như vậy lời giải đối với lớp 8 cũng rất ngắn gọn :

Ta có : $\left(\dfrac{BD}{BC}\right)^2=\dfrac{4}{d^2},\left(\dfrac{DC}{BC}\right)^2=\dfrac{9}{d^2}$

nên $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{2}{d},\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{3}{d}$.

Ta lại có : $\dfrac{BD}{BC}+\dfrac{DC}{BC}=1\Rightarrow\dfrac{2}{d}+\dfrac{3}{d}=1\Rightarrow d=5$.

Vậy $S=d^2=25(cm^2)$.

Tổng quát của bài toán trên : nếu diện tích các tam giác nhỏ là a^2 và b^2 thì diện tích tam giác ABC bằng $(a+b)^2$.

Bạn hãy dùng phương pháp trên để giải bài toán sau với kiến thức lớp 8 :

Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác. Qua O vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác, chia nó ra ba tam giác nhỏ và ba hình bình hành. Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích ba tam giác nhỏ bằng :

a) $4cm^2, 9cm^2, 16cm^2$ b) a^2, b^2, c^2.

Đáp số : a) $81cm^2$ b) $(a+b+c)^2$.

SỬ DỤNG YẾU TỐ PHỤ TRONG VIỆC GIẢI BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

LÊ QUỐC HÁN
Nghệ An

Trong tác phẩm "Giải bài toán như thế nào", Pô-li-a cho rằng : yếu tố phụ như một *nhịp cầu* để nối *bài toán cần tìm ra cách giải* với *bài toán đã biết cách giải.*

Ta hãy xét ví dụ sau đây :

Thí dụ 1 : Đơn giản biểu thức :

$$(a+b+c)^3 + (a-b-c)^3 + (b-c-a)^3 + (c-a-b)^3.$$

Giải bài toán này bằng cách khai triển và ước lược các số hạng là một phương pháp thủ công và kém hấp dẫn. Tuy nhiên, nếu để ý tổng các biểu thức dưới dấu luỹ thừa bằng 0, ta đưa vào ba biến phụ :

$$a-b-c = x, b-c-a = y, c-a-b = z$$

thì $a+b+c = -(x+y+z)$ và sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc :

$$-(x+y+z)^3 + x^3 + y^3 + z^3 = -3(x+y)(x+z)$$

ta có kết quả biểu thức là $24abc$.

Từ phương pháp trên, bạn hãy giải các bài tập sau :

Bài tập 1 : Chứng minh

$$(a+b+c)^p + (a-b-c)^p + (b-c-a)^p + (c-a-b)^p$$

chia hết cho $8pabc$ với p là số nguyên tố lẻ.

Bài tập 2(a) : Chứng minh

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3((a-b)(b-c)(c-a)$$

Chỉ dẫn : đặt $a-b = x, b-c = y \Rightarrow c-a = -(x+y)$

Bài tập 2(b) : Chứng minh $(a-b)^p + (b-c)^p + (c-a)^p$ chia hết cho

$p(a-b)(b-c)(c-a)$ với p là số nguyên tố lẻ.

* Trong nhiều bài toán đại số, việc đưa yếu tố phụ còn có tác dụng như một chiếc đòn bẩy, giúp ta giải bài toán nhẹ nhàng hơn.

Thí dụ 2 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{x-a_1}{b_1} = \dfrac{x-a_2}{b_2} = \dfrac{x-a_3}{b_3} = \ldots = \dfrac{x-a_n}{b_n} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c \end{cases}$$

với $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các tham số khác không và $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0$.

Giải : Đặt thêm biến phụ :

$$\frac{x-a_1}{b_1} = \frac{x-a_2}{b_2} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{b_n} = t$$

thì $$x_i = tb_i + a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + t\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\Rightarrow c = \sum_{i=1}^{n} a_i + t\sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\Rightarrow t = \frac{\left(c - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

$$\Rightarrow x_i = a_i + \frac{b_i\left(c - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

Bạn hãy sử dụng phương pháp trên để giải các bài tập sau :

Bài tập 3 : Cho a, b, c, d là các số dương và $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. Hãy trục căn khỏi mẫu thức của biểu thức sau :

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$$

Bài tập 4 : Cho $\dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B} = \dfrac{c}{C} = \dfrac{d}{D}$

Chứng minh

$$\sqrt{aA} + \sqrt{bB} + \sqrt{cC} + \sqrt{dD} = \sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}.$$

Đối với những bài toán phức tạp, nhiều khi ta không chỉ phải đưa vào các biến phụ mà còn phải đưa vào *hàm phụ*.

Xét thí dụ phức tạp sau :

Thí dụ 3 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-p}+\dfrac{y}{b-p}+\dfrac{z}{c-p}=1 \\ \dfrac{x}{a-q}+\dfrac{y}{b-q}+\dfrac{z}{c-q}=1 \\ \dfrac{x}{a-r}+\dfrac{y}{b-r}+\dfrac{z}{c-r}=1 \end{cases}$$

trong đó a, b, c, p, q, r đôi một khác nhau.

Chắc chắn các bạn sẽ không thú vị gì khi giải hệ trên bằng các phương pháp thông thường (phương pháp thế, phương pháp cộng đại số...). Ta hãy xét hàm phụ sau :

$$f(X)=\frac{x}{a-X}+\frac{y}{b-X}+\frac{z}{c-X}-1=\frac{g(X)}{(a-X)(b-X)(c-X)}$$

trong đó $g(X)$ là hàm đa thức bậc ba của X với hệ số bằng 1.

Theo giả thiết :

$$f(p)=f(q)=f(r)=0 \text{ nên } g(p)=g(q)=g(r)=0.$$

Suy ra :

$$g(X)=(X-p)(X-q)(X-r)$$

tức là $$f(X)=\frac{(X-p)(X-q)(X-r)}{(a-X)(b-X)(c-X)} \qquad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với $a-X$, ta được :

$$x+(a-X)\left(\frac{y}{b-X}+\frac{z}{c-X}-1\right)=\frac{(X-p)(X-q)(X-r)}{(b-X)(c-X)}$$

rồi cho $X=a$, ta có :

$$x=-\frac{(a-p)(a-q)(a-r)}{(a-b)(a-c)}$$

Tương tự : $$y=-\frac{(b-p)(b-q)(b-r)}{(b-a)(b-c)}$$

$$z=-\frac{(c-p)(c-q)(c-r)}{(c-a)(c-b)}$$

Mời bạn hãy giải tiếp bài tập sau theo phương pháp trên.

Bài tập 5 : Cho a, b, p, q đôi một khác nhau. Giải hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a-p}+\dfrac{y}{b-p}=1 \\ \dfrac{x}{a-q}+\dfrac{y}{b-q}=1 \end{cases}$$

Tổng quát hoá cho trường hợp hệ có n ẩn.

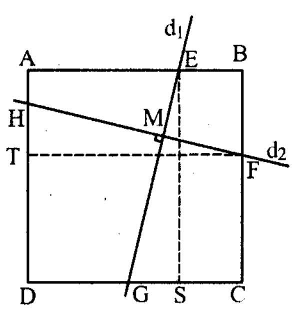
Chương II

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

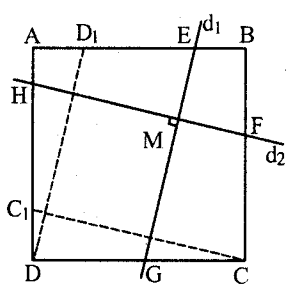
TỪ MỘT BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN VỀ HÌNH VUÔNG

PHẠM THÀNH LUÂN
TP Hồ Chí Minh

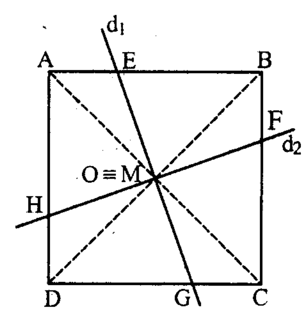
Nếu biết cách suy nghĩ thì từ một bài toán đơn giản, chúng ta có thể đặt ra nhiều bài toán khá phong phú. Xin lấy thí dụ từ bài toán khá đơn giản sau đây.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Bài toán 1. *Cho hình vuông ABCD. Lấy một điểm M bất kì trong hình vuông đó. Đường thẳng d_1 qua M cắt AB tại E, cắt CD tại G, đường thẳng d_2 qua M vuông góc với d_1 cắt BC tại F, cắt AD tại H. Chứng minh rằng EG = FH.*

Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là ý chính của hai cách

Cách 1 - Hạ $ES \perp CD$ và $FT \perp AD. \Delta ESG = \Delta FTH$ (c.g.c)(hình 1)

Cách 2 - Dựng $CC_1 \,//\, HF$(C_1 trên AD) và $DD_1 \,//\, EG$(D_1 trên AB), $\Delta AD_1D = \Delta DC_1C$ (hình 2)

Xét bài toán ở một số *vị trí đặc biệt* của điểm M.

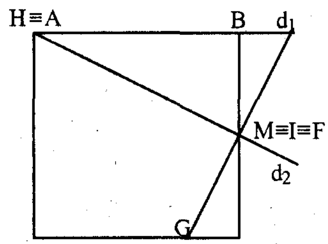
1) Khi $M \equiv O$ (tâm hình vuông), ta có :

Bài toán 2. *Cho hình vuông ABCD. Hai đường thẳng d_1 và d_2 qua tâm O của hình vuông và vuông góc với nhau, cắt các cạnh hình vuông tại các điểm tương ứng E, G, F, H (hình 3). Chứng minh rằng :*

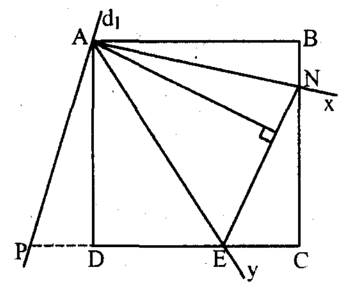
a) $S(AEOH) = S(EBFO) = S(FCGO) = S(OGDH) = \frac{1}{4}S(ABCD)$

b) EFGH là hình vuông.

2) Nếu $M \equiv I$, trung điểm của *BC*, và đường thẳng d_2 qua A thì $F \equiv I$ và $H \equiv A$. Ta đặt được bài toán 3 :



Hình 4



Hình 5

Bài toán 3. *Dựng hình vuông ABCD biết đỉnh A và trung điểm M của BC.*

Gợi ý giải : Qua *M* dựng $d_1 \perp AM$. Trên d_1 dựng $ME = MG = \frac{AM}{2}$. Hạ $MB \perp AE$ (hình 4).

3) Nếu *M* là một điểm bất kì *J* trên cạnh *BC* và đường thẳng d_2 qua *A* thì $F \equiv J$ và $H \equiv A \equiv E$. Ta đặt được các bài toán 4 và 5.

Bài toán 4. *Cho hình vuông ABCD và điểm M bất kì thuộc cạnh BC (khác B và C). Gọi N là giao của hai đường thẳng AM và CD. Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$$

Gợi ý giải - Qua *A* dựng $d_1 \perp AN$, cắt *CD* tại *G*. Áp dụng hệ thức trong tam giác vuông *AGN* (hình 6)

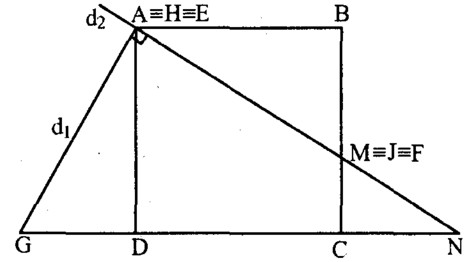
Bài toán 5. *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Qua A dựng hai tia Ax, Ay sao cho* $\widehat{xAy} = 45^0$, *hai tia Ax và Ay cắt BC và AD lần lượt tại N và E.*

a) Chứng minh rằng tam giác ANE có độ dài đường cao xuất phát từ A không đổi.

b) Xác định vị trí của N và E để S(ANE) là cực tiểu.

Gợi ý giải - Coi Ax là d_2, dựng $d_1 \perp Ax$, cắt CD tại P. Suy ra $AP = AN$ và $\Delta APE = \Delta ANE$ (hình 5).

Sau đây là một số bài toán tương tự, được đặt ra từ bài toán 1.



Hình 6

Bài toán 6. *Dựng hình vuông ABCD biết 4 điểm I, J, K, L nằm trên 4 cạnh của hình vuông.*

Gợi ý giải - Qua I dựng $Ix \perp LJ$, trên Ix lấy đoạn $IK' = LJ$. Qua J dựng $JC \perp KK'$ (hình 7).

Bài toán 7. *Dựng hình vuông ABCD biết đỉnh A và hai điểm J, K trên BC và CD (hình 7).*

Bài toán 8. *Cho hình vuông ABCD, trên cạnh BA và CB đặt* $BP = BQ$ *. Hạ* $BH \perp CP$ *. Chứng minh rằng* $DH \perp HQ$.

Gợi ý giải - Kéo dài *BH* cắt *AD* tại *I*, suy ra được *IB* = *CP* từ đó có *AI* = *BQ* và *IQCD* là hình chữ nhật. Năm đỉnh I,H,Q,C,D cùng nằm trên một đường tròn (hình 8).

Bài toán 9. *Cho hình vuông ABCD. Lấy M bất kì trên CD. Đường tròn đường kính AM và đường tròn đường kính CD cắt nhau ở điểm thứ hai N. DN kéo dài cắt BC tại P. Chứng minh rằng* $PM \perp AC$.

Gợi ý giải - Gọi *Q* là giao điểm của *AB* và đường tròn đường kính *AM*. Suy ra được Q,N,C thẳng hàng, từ đó chứng minh được $QB = PC = MC$ (hình 9).

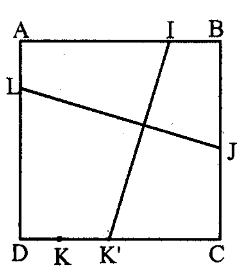
Bài toán 10. *Cho hình vuông ABCD, I là một điểm bất kì thuộc BC. Hạ* $BM \perp AI$ *. BM cắt CD tại G. Dựng* $CC_1 // AI$ *(*C_1 *trên AD),* $DD_1 // BG$ *(*D_1 *trên AB).* CC_1 *cắt BG tại N, cắt* DD_1 *tại P ;* DD_1 *cắt AI tại Q. Xác định vị trí của I để MNPQ là hình vuông.*

Bài toán 11. *Cho ABCD là hình vuông cạnh a, tia Ax bất kì nằm trong góc vuông BAD. Đường phân giác của góc* $\widehat{BAx}$ *cắt BC tại M, đường phân giác của góc* $\widehat{DAx}$ *cắt CD tại N. Gọi E là giao điểm của Ax và MN. Tìm quỹ tích của điểm E.*

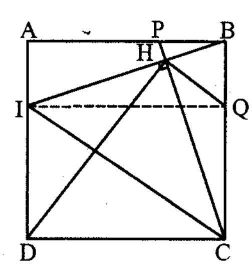
Bài toán 12. *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên AB, AD lấy hai điểm M, N sao cho tam giác AMN có chu vi bằng 2a. Chứng minh rằng góc* $CMN = 45^0$.

Bài toán 13. *Cho M, N là trung điểm của các cạnh AB và BC của hình vuông ABCD. ND và CM cắt nhau ở P. Chứng minh rằng PA = AB.*

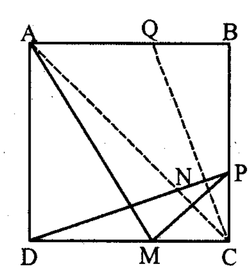
Đề nghị bạn đọc tìm lời giải của các bài toán trên, liên hệ với bài toán 1.



Hình 7



Hình 8



Hình 9

SÁNG TẠO TỪ MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC

NGUYỄN ĐỨC TẤN
TP. Hồ Chí Minh

Trong việc học toán có những điều thật đơn giản, thật quen thuộc nhưng nếu chúng ta tiếp tục suy nghĩ thì chắc chắn chúng sẽ đem đến cho chúng ta nhiều điều không đơn giản.

Xin được cùng bạn đọc đi từ một bài toán rất quen thuộc sau :

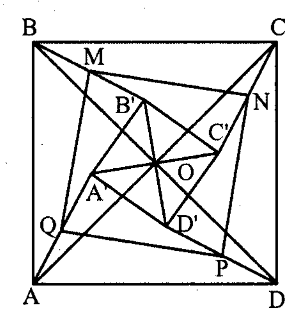
BÀI TOÁN (*)

Cho hình vuông ABCD. Đặt một hình vuông A'B'C'D' bên trong hình vuông ABCD sao cho hai tâm hình vuông đó trùng nhau.

Chứng minh rằng trung điểm của AA', BB', CC', DD' là đỉnh của một hình vuông khác.

Xin được nêu 3 cách giải trong số các cách giải.

Cách 1:



$\Delta BOB' = \Delta AOA'$ (c.g.c) $\Rightarrow$ BB' = AA'

Tương tự ta có $AA' = BB' = CC' = DD'$

Suy ra $OM = ON = OP = OQ$

$BB'DD'$ là hình bình hành do đó $BB' // DD'$.

Suy ra $BMDP$ là hình bình hành O là trung điểm của MP

Tương tự: O là trung điểm của QN

Vậy $MNPQ$ là hình chữ nhật.

$\Delta CON = \Delta DOP$ (c.c.c) $\Rightarrow$

$\widehat{CON} = \widehat{DON} \Rightarrow \widehat{NOP} = 90^0$. Do đó $MNPQ$ là hình vuông.

Cách 2:

Thực hiện phép quay, tâm O góc quay 90^o, cùng chiều kim đồng hồ thì các đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' sẽ lần lượt trùng với nhau.

Từ đó $OM = ON = OP = OQ$

và $\widehat{MON} = \widehat{NOP} = \widehat{POQ} = \widehat{QOM} = 90^0$

Vậy $MNPQ$ là hình vuông.

Cách 3:

Nối $B'C, C'D, D'A, B'A$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng đó (đề nghị các bạn tự vẽ hình).

$\Delta MHQ = \Delta NFP$ (c.g.c) $\Rightarrow MQ = NP$

$\Delta MEN = \Delta NFP(c.g.c) \Rightarrow MN = NP$

$\Delta MHQ = \Delta PGQ(c.g.c) \Rightarrow MQ = PQ$ và $\widehat{MQH} = \widehat{QPG}$

Suy ra $MN = NP = PQ = MQ$. $MNPQ$ là hình thoi.

Mặt khác HQ cắt PG tại S. $\widehat{HSP} = \widehat{ABC}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

$\widehat{ABC} = 90^0$ (giả thiết)

Suy ra $\widehat{MQH} + \widehat{PQS} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MQP} = 90^0$

Vậy $MNPQ$ là hình vuông.

Dễ thấy rằng nếu cho $\dfrac{AA'}{AQ} = \dfrac{BB'}{BM} = \dfrac{CC'}{CN} = \dfrac{DD'}{DP} = m(m > 0)$

và áp dụng định lí Talét, ta có bài toán sau đây, bài toán tổng quát hơn bài toán (*).

Bài toán 1 : Cho hình vuông *ABCD*. Đặt một hình vuông *A'B'C'D'* bên trong hình vuông *ABCD* sao cho hai tâm hình vuông đó trùng nhau. Gọi M, N, P, Q là các điểm trên *BB', CC', DD', AA'* sao cho

$$\frac{BB'}{BM} = \frac{CC'}{CN} = \frac{DD'}{DP} = \frac{AA'}{AQ} = m(m > 0)$$

Chứng minh rằng *MNPQ* là hình vuông.

Với m = 2, ta có bài toán (*)

Mặt khác, khai thác cách giải 2 giúp ta tìm đến bài toán tổng quát sang hướng khác như sau :

Bài toán 2 : Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ đặt bên trong đa giác này một đa giác đều $A'_1A'_2...A'_n$ sao cho hai tâm đa giác đều đó trùng nhau.

Gọi $A''_1;A''_2;...;A''_n$ là các điểm nằm trên các đoạn thẳng $A_1A'_1;A_2A'_2;...;A_nA'_n$ sao cho

$$\frac{A_1A'_1}{A_1A''_1} = \frac{A_2A'_2}{A_2A''_2} = ... = \frac{A_nA'_n}{A_nA''_n} = m(m > 0)$$

Chứng minh rằng : $A''_1A''_2...A''_n$ là đa giác đều.

Với m = 2; n = 4 là bài toán (*)

Chắc rằng với cách giải 1, 2 nếu "đứng ở vị trí này hoặc nọ" ta còn có thể tìm thêm một số bài toán mới nữa.

Nhưng với cách giải 3 có tìm được điều gì lí thú không? Với cách giải 3, khi chứng minh *MNPQ* là hình bình hành ta không cần đến tâm *O* chung mà các cách giải 1, 2 phải sử dụng. Ta tìm được bài toán sau :

Bài toán 3. Cho hình bình hành *ABCD*. Đặt một hình bình hành *A'B'C'D'* sao cho các đỉnh A', B', C', D' nằm trong hình bình hành *ABCD*. Chứng minh rằng trung điểm của AA', BB', CC', DD' là các đỉnh của một hình bình hành.

Cũng khai thác như trên từ bài toán 3 ta lại "xuất hiện" bài toán 4 sau :

Bài toán 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt một hình bình hành $A'B'C'D'$ sao cho các đỉnh A',B',C',D' nằm trong hình bình hành $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là các điểm nằm trên các đoạn thẳng AA',BB',CC',DD' sao cho

$$\frac{AA'}{AM}=\frac{BB'}{BN}=\frac{CC'}{CP}=\frac{DD'}{DQ}=m(m>0)$$

Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Với $m = 2$ là bài toán 4.

Và ... liệu ta có hai bài toán sau không?

Bài toán 5. Trên mặt phẳng cho hai hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi M,N,P,Q là những điểm nằm trên các đoạn thẳng AA',BB',CC',DD' sao cho

$$\frac{AA'}{AM}=\frac{BB'}{BN}=\frac{CC'}{CP}=\frac{DD'}{DQ}=m\,(m>0)$$

Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài toán 6. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Trên (P) cho hình bình hành $ABCD$, trên (Q) cho hình bình hành $A'B'C'D'$. Gọi M,N,P,Q là những điểm nằm trên các đoạn thẳng AA',BB',CC',DD' sao cho

$$\frac{AA'}{AM}=\frac{BB'}{BN}=\frac{CC'}{CP}=\frac{DD'}{DQ}=m\,(m>0)$$

Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Từ bài toán (*) có lẽ còn nhiều bài toán mới độc đáo và thú vị nữa. Mời các bạn tiếp tục!

MỘT TÍNH CHẤT ĐẸP CỦA ĐA GIÁC ĐỀU

VŨ QUỐC LƯƠNG
Hà Nội

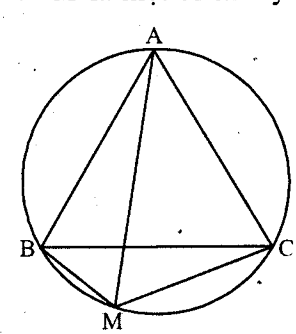
Các bạn trẻ thân mến! Chắc các bạn đã từng gặp bài toán khó sau :

Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm tuỳ ý thuộc đường tròn. Chứng minh rằng : $MA^2+MB^2+MC^2=2a^2$ (*)

Chứng minh : (xem hình 1)

Tứ giác ABMC là một tứ giác nội tiếp. áp dụng định lí Ptôlêmê ta có :

$$MA.BC = MB.AC + MC.AB$$
$$\Rightarrow MA.a = (MB+MC).a \Rightarrow MA = MB + MC$$
$$\Rightarrow MA^2 = MB^2 + 2MB.MC + MC^2.$$



Hình 1

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(MB^2 + MC^2 + MB.MC)$ (1)

ΔBMC là tam giác có $\widehat{BMC} = 120^0$ nên ta có hệ thức :

$$MB^2 + MC^2 + MB.MC = BC^2 = a^2$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$ (đpcm).

Kết quả (*) là một kết quả hay và đẹp, do $a = R\sqrt{3}$, ta còn có thể viết (*) dưới dạng :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2 \quad (**)$$

Liệu kết quả (**) có thể mở rộng cho đa giác đều được không?

Ta thử kiểm tra với hình vuông $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R (xem hình 2).

Do $\widehat{A_1MA_3} = 1v \Rightarrow MA_1^2 + MA_3^2 = A_1A_3^2 = 4R^2$

Tương tự $MA_2^2 + MA_4^2 = A_2A_4^2 = 4R^2$

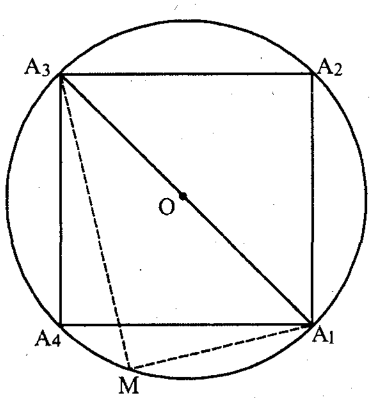
Vậy $MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + MA_4^2 = 8R^2$.

Như vậy tổng $MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + MA_4^2$ cũng là một hằng số không phụ thuộc vị trí điểm M trên $(O\,;R)$.

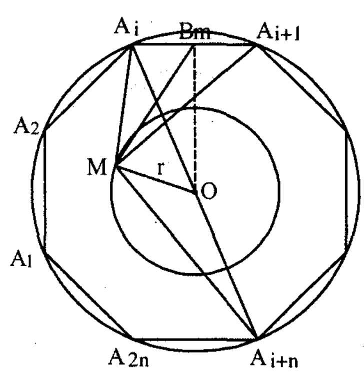
Kết quả này khích lệ ta tin tưởng rằng (**) cũng đúng cho đa giác đều tổng quát. Hơn nữa phép chứng minh cho hình vuông hoàn toàn có thể áp dụng cho đa giác đều có số cạnh chẵn $2n$. Thật vậy : xét đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp $(O; R)$. Do các cặp đỉnh đối diện A_i, A_{i+n} chính là đường kính của đường tròn (O, R) nên $\forall M \in (O;R)$ ta có :

$$MA_i^2 + MA_{i+n}^2 = A_iA_{i+n}^2 = (2R)^2 = 4R^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} MA_i^2 = n.4R^2 = 4nR^2 = k$$



Hình 2



Hình 3

Phân tích kỹ hơn nữa ta thấy, cũng không cần M phải nằm trên (O,R) mà chỉ cần M nằm trên một đường tròn $(O; r)$ thì ta cũng có kết quả $\sum_{i=1}^{2n} MA_i^2$ là một hằng số. Thật vậy : xét đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp $(O; R)$. M là một điểm tuỳ ý thuộc $(O; r)$. Ta có (xem hình 3) :

$$MA_i^2 + MA_{i+n}^2 = 2MO^2 + \frac{A_iA_{i+n}^2}{2} = 2r^2 + \frac{(2R)^2}{2} = 2(r^2 + R^2)$$

Do đó : $$\sum_{i=1}^{2n} MA_i^2 = n.2(r^2+R^2) = 2n(r^2+R^2)$$

Từ kết quả trên, ta có thể chuyển sang chứng minh được cho đa giác đều có số cạnh tuỳ ý nhờ một phép dựng hình khéo léo sau : xét đa giác đều n cạnh $B_1B_2...B_n$ nội tiếp (O; R'). Dựng đa giác đều 2n cạnh $A_1A_2...A_{2n}$, nhận $B_1, B_2,..., B_n$ là các trung điểm của cạnh : $A_1A_2, A_3A_4,..., A_{2n-1}A_{2n}$.

Gọi $OA_i = R$

và $A_1A_2 = A_3A_4 = ... = A_{2n-1}A_{2n} = a$

$\forall M \in (O;r)$ ta có chẳng hạn đối với đỉnh B_m (xem hình 3) :

$$MA_i^2 + MA_{i+1}^2 = 2MB_m^2 + \frac{A_iA_{i+1}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} MA_i^2 = 2.\sum_{m=1}^{n} MB_m^2 + \frac{n.a^2}{2}.$$

$$\Rightarrow 2n(r^2+R^2) = 2.\sum_{m=1}^{n} MB_m^2 + \frac{na^2}{2}$$

Dễ thấy $(B_mA_{i+1})^2 = \dfrac{a^2}{4} = R^2 - R'^2$

$$\Rightarrow 2n(r^2+R^2) = 2.\sum_{m=1}^{n} MB_m^2 + 2n(R^2 - R'^2)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{n} MB_m^2 = n(r^2 + R'^2)$$

(R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp $B_1B_2...B_n$).

Vậy ta có kết quả (**) được tổng quát thành :

Định lí : Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn (O; R). M là một điểm tuỳ ý thuộc đường tròn tâm O bán kính r. Ta luôn có $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2$ là một hằng số không phụ thuộc vị trí của M và hằng số đó là :

$$k = n(R^2 + r^2)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = k = n(R^2 + r^2)}$$

Các bạn thấy đấy. Từ một bài toán hay ban đầu, bằng tinh thần mạnh dạn đào sâu suy nghĩ, ta thu được các kết quả đẹp biết bao.

Các bạn có thể mạnh dạn tổng quát hơn nữa : Tính chất (**) có phải chỉ có ở đa giác đều hay không, hay còn những đa giác không đều mà vẫn có tính chất (**)?

Xin quay trở lại vấn đề đó trong một bài báo khác.

Bây giờ các bạn hãy áp dụng định lí trên để giải quyết hai bài toán sau :

1) Cho tam giác đều ABC nội tiếp (O; R). M là một điểm tuỳ ý thuộc (O : R) Chứng minh rằng : $MA^4 + MB^4 + MC^4$ là một hằng số.

2) Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$. Tìm điểm M sao cho : $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2$ là nhỏ nhất.

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
Hải Phòng

Trong chương trình toán cấp 2 có một bất đẳng thức quen thuộc mà việc ứng dụng của nó trong khi giải các bài tập đại số và hình học rất có hiệu quả. Tôi thường gọi đó là "bất đẳng thức kép". Bất đẳng thức đó như sau : $\forall a, b,$ có

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab \qquad (*)$$

Dễ thấy (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 & (1) \\ (a+b)^2 \geq 4ab & (2) \\ a^2 + b^2 \geq 2ab & (3) \end{cases}$

Cả ba bất đẳng thức trên đều tương đương với $(a-b)^2 \geq 0$ và do đó chúng xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $a = b$.

Ý nghĩa của (*) là nêu nên một quan hệ giữa tổng hai số với tích của chúng hoặc với tổng các bình phương của hai số đó.

Sau đây là các ví dụ minh hoạ cho việc vận dụng bất đẳng thức (*).

Ví dụ 1 : Cho $a + b = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}; a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}; a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}.$$

Giải : Áp dụng bất đẳng thức (1) và giả thiết, ta có :

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)}{2} \geq \frac{(1/2)^2}{2} = \frac{1}{8}$$

$$a^8 + b^8 \geq \frac{(a^4+b^4)^2}{2} \geq \frac{(1/8)^2}{2} = \frac{1}{128}.$$

các bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2 : Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Giải : Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có :

$$\begin{cases} (a+b)^2 \geq 4ab \\ (b+c)^2 \geq 4bc \\ (c+a)^2 \geq 4ca \end{cases}$$

$\Rightarrow \left((a+b)(b+c)(c+a)\right)^2 \geq 64a^2b^2c^2$ (vì $a,b,c > 0$)

$\Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

(vì $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$ và $8abc > 0$).

Có đẳng thức khi $a = b = c$.

Ví dụ 3 : Chứng minh rằng $\forall a,b,c$ ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Giải : Áp dụng bất đẳng thức (3) ta có :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca \end{cases}$$

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Rightarrow$ đpcm.

Có đẳng thức khi $a = b = c$.

Ví dụ 4 : Chứng minh rằng $\forall a,b,c,d$ ta có :

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd.$$

Giải : Áp dụng bất đẳng thức (3) ta có :

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 2a^2b^2 + 2c^2d^2 = 2(a^2b^2 + c^2d^2).$$

Lại theo (3) : $a^2b^2 + c^2d^2 \geq 2abcd$.

Từ hai kết quả trên ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5 : Cho $a + b + c + d = 2$. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1.$$

Giải : Áp dụng bất đẳng thức (3) ta có :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + d^2 \geq 2dc$$

$$a^2 + c^2 \geq 2ac, a^2 + d^2 \geq 2ad, b^2 + d^2 \geq 2bd$$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$\Rightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2 = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$$

(đpcm)

Có đẳng thức khi $a = b = c = d = \dfrac{1}{2}$.

Sau đây ta sẽ áp dụng các bất đẳng thức (1), (2), (3) vào việc giải các bài tập phức tạp hơn.

Ví dụ 6: Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng $b+c\geq 16abc$.

Giải : Từ giả thiết ta có :

$$1=\left(a+(b+c)\right)^2\geq 4a(b+c) \text{ (theo (2))}$$

$$\Rightarrow b+c\geq 4a(b+c)^2 \text{ (do } b+c>0)$$

Lại theo (2) : $(b+c)^2\geq 4bc$. Từ hai kết quả trên suy ra :

$$b+c\geq 4a.4bc=16abc \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} a=b+c \\ b=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=c=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng $\forall a,b,c$ ta có :

$$(a+b)^2(b+c)^2\geq 4abc(a+b+c)$$

Giải:

$$(a+b)^2(b+c)^2=(ab+ac+b^2+bc)^2=\left(ac+(a+b+c)b\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức (2) cho 2 số ac và $(a+b+c)b$ ta có :

$$\left(ac+(a+b+c)b\right)^2\geq 4abc(a+b+c)\Rightarrow \text{ đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi : $ac=b(a+b+c)$

Ví dụ 8 : Cho $a_1,a_2,...,a_n\in[0;1]$. Chứng minh :

$$(1+a_1+a_2+...+a_n)^2\geq 4(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)$$

Giải : Áp dụng bất đẳng thức (2) cho 2 số : 1 và $a_1+a_2+...+a_n$, ta được :

$$(1+a_1+a_2+..+a_n)^2\geq 4(a_1+a_2+...+a_n).$$

do $a_i\in[0;1]$ với $i=1,2,...,n$, nên suy ra : $a_i\geq a_i^2$.

Từ 2 kết quả trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn, khi $a_1=a_2=a_{n-1}=0$ và $a_n=1$.

Ví dụ 9 : Cho $a,b>0$ và $a+b=1$. Chứng minh :

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq 12,5.$$

Giải : Áp dụng bất đẳng thức (1) cho hai số $a+\dfrac{1}{a}$ và $b+\dfrac{1}{b}$, ta có :

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{2}$$

$$=\frac{\left(a+b+\frac{a+b}{ab}\right)^2}{2}=\frac{\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2}{2} (*)$$

Lại áp dụng (2) : $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow 1 \geq 4ab \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4$.

Do đó : $\frac{\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2}{2} \geq \frac{(1+4)^2}{2}=\frac{25}{2}=12{,}5$.

Kết hợp với (*) ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi : $a=b=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 10 : Cho a,b,c là các số thoả mãn :

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ a^2+b^2+c^2=2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng :

$$a,b,c \in \left[0;\frac{4}{3}\right].$$

Giải : Ta sẽ phải chứng minh cho $0 \leq a \leq \frac{4}{3}$, còn đối với b và c thì tương tự. Theo (1) ta có :

$$2(b^2+c^2) \geq (b+c)^2 \Rightarrow 2(2-a^2) \geq (2-a)^2$$
$$\Rightarrow 4-2a^2 \geq 4-4a+a^2$$
$$\Rightarrow 3a^2-4a \leq 0.$$

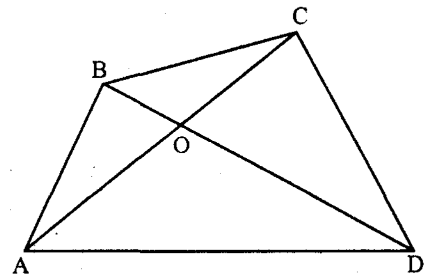
Giải bất phương trình cuối theo a ta được $0 \leq a \leq \frac{4}{3} \Rightarrow$ đpcm.

Trên đây là các ví dụ vận dụng đẳng thức (*) vào việc giải các bài toán đại số. Tiếp theo là các ví dụ minh hoạ cho việc vận dụng (*)để giải một số bài toán hình học.

Ví dụ 11 : Cho tứ giác lồi $ABCD$ có tổng hai đường chéo bằng d. Chứng minh rằng : $S \leq \frac{d^2}{8}$ (S là diện tích của tứ giác).

Giải : Ta có $S \leq \frac{1}{2}AC.BD$. Theo bất đẳng thức (2) thì :

$$AC.BD \le \frac{(AC+BD)^2}{4} = \frac{d^2}{4}.$$



Từ hai kết quả trên suy ra : $S \le \frac{d^2}{8}$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi :

$$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD \end{cases}$$

Ví dụ 12 : Hai đường chéo của tứ giác lồi $ABCD$ cắt nhau tại O. Biết $S(AOB) = 4, S(COD) = 9$.

Chứng minh rằng : $S(ABCD) \ge 25$.

Giải :

Ta có :

$$\frac{S(AOB)}{S(BOC)} = \frac{AO}{OC} = \frac{S(AOD)}{S(COD)}$$

$$\Rightarrow S(BOC).S(AOD) = S(AOB)S(COD) = 4.9 = 36$$

mà theo (2) thì $\left(S(BOC) + S(AOD)\right)^2 \ge 4S(BOC).S(AOD)$

$$= 4.36 = 144 \Rightarrow S(BOC) + S(AOD) \ge 12.$$

Vậy : $S(ABCD) \ge 4 + 9 + 12 = 25$.

Đẳng thức xảy ra khi $S(BOC) = S(AOD)$ hay $AB // CD$

Ví dụ 13 : Trong tứ giác lồi $ABCD$ với diện tích S có điểm O thoả mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2S$. Chứng minh $ABCD$ là hình vuông nhận O làm tâm.

Giải : (xem hình 1)

Ta có : $S(AOB) \le \frac{1}{2}OA.OB, S(BOC) \le \frac{1}{2}OB.OC,$

$$S(COD) \le \frac{1}{2}OC.OD, S(DOA) \le \frac{1}{2}OD.OA.$$

Suy ra : $S(ABCD) \le \frac{1}{2}(OA.OB + OB.OC + OC.OD + OD.OA) \le$

$$\le \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 + OB^2 + OC^2 + OC^2 + OD^2 + OD^2 + OA^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) \overset{(gt)}{=} \frac{1}{2}.2S = S$$

Ta thấy điều này chỉ xảy ra khi các bất đẳng thức đều trở thành đẳng thức, nghĩa là phải có :

$$\begin{cases} OA \perp OB, OB \perp OC, OC \perp OD, OD \perp OA \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình vuông nhận } O \text{ làm tâm.}$$

Ví dụ 14 : Cho tứ giác lồi $ABCD$ có diện tích $S=32$; tổng $AB+BD+DC=16$. Tính BD.

Giải : (xem hình)

Ta có

$$S(ABCD)=S(ABD)+S(BDC)\le\frac{1}{2}AB.BD+\frac{1}{2}BD.DC=\frac{1}{2}BD(AB+CD)$$

Sử dụng bất đẳng thức (2) cho 2 số BD và $AB+CD$ ta có :

$$32\le\frac{1}{2}BD(AB+CD)\le\frac{1}{2}.\frac{1}{4}(BD+AB+CD)^2\overset{(gt)}{=}\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.16^2=32.$$

Điều này chỉ xảy ra khi các bất đẳng thức đều trở thành đẳng thức, nghĩa là phải có :

$BD=AB+CD$, mà $BD+AB+CD=16\Rightarrow BD=8$.

Cuối cùng để kết thúc bài viết này, đề nghị các bạn vận dụng bất đẳng thức (*) giải các bài tập sau :

1) Cho $a+b=2$.

Chứng minh rằng $a^4+b^4\ge 2$

2) Cho $a,b,c\in(0;1)$. Chứng minh rằng :

a) $a(1-a)\le\frac{1}{4}$

b) Các bất đẳng thức

$$a(1-b)>\frac{1}{4}, b(1-c)>\frac{1}{4}, c(1-a)>\frac{1}{4}$$ không đồng thời xảy ra.

3) Cho $a_1,a_2,...,a_n>0$ và $a_1a_2...a_n=\frac{1}{n}$.

Chứng minh : $(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)\ge 2^n$.

4) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2$, với $a,b,c,d>0$

5) $\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\ge 4$, với $a,b,c,d>0$

6) Cho $a>b>0$. Chứng minh rằng : $a+\frac{1}{(a-b)b}\ge 3$.

7) Cho $a,b,c,d\ge 0$. Chứng minh rằng :

a) $a^2+b^2+c^2+d^2\ge(a+b)(c+d)$

b) $(a^2+1)(b^2+2)(c^2+4)(d^2+8)\ge(ac+2)^2(bd+4)^2$

ĐA THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ THỰC

NGUYỄN VĂN VĨNH
(TP Hồ Chí Minh)

Trong các kì thi học sinh giỏi, thi vào các lớp chuyên toán thường có các bài toán chứng minh một số nào đó là số nguyên, hoặc là số vô tỉ. Bài viết này xin giới thiệu với các bạn một ứng dụng của đa thức để giải các bài toán loại này.

Trong chương trình bồi dưỡng học sinh giỏi, các bạn đã biết định lí sau đây và các hệ quả về đa thức.

Định lí : Nếu phân số tối giản $\frac{p}{q}$ (p là số nguyên, q là số tự nhiên khác 0) là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ (a_n khác 0) (1) thì p là ước số của a_0 và q là ước số của a_n.

Hệ quả 1. Mọi nghiệm nguyên của đa thức (1) đều là ước số của hệ số tự do a_0.

Hệ quả 2. Mọi nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ đều là số nguyên.

Dựa vào định lí và các hệ quả này, có thể rút ra quy tắc sau đây để chứng minh một số a cho trước là một số vô tỉ (hay là một số hữu tỉ).

Bước 1 : Lập một đa thức với hệ số nguyên có một nghiệm $x = a$.

Bước 2 : Chứng minh rằng hoặc là đa thức vừa tìm được không có nghiệm nguyên, hoặc là trong số tất cả các nghiệm nguyên có thể có của đa thức, không có nghiệm nào bằng a.

Dưới đây là một số bài toán vận dụng.

Bài 1. Đặt $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$

Chứng minh rằng với mọi $a \geq \frac{1}{8}$ thì x là một số tự nhiên

(Thi vào lớp 10 chuyên toán TP Hồ Chí Minh 1982)

Giải. $x^3 = 2a + (1 - 2a)x$

$x^3 + (2a - 1)x - 2a = 0$, như vậy x chính là nghiệm của đa thức.

$$x^3 + (2a - 1)x - 2a \qquad (1)$$

Ta có : $x^3 + (2a - 1)x - 2a = (x - 1)(x^2 + x + 2a)$. Xét đa thức bậc hai $x^2 + x + 2a$ có $\Delta = 1 - 8a$

- Khi $a = \frac{1}{8}$, Ta có $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1$

- Khi $a > \frac{1}{8}$, Ta có $1 - 8a$ âm nên đa thức (1) có nghiệm thực duy nhất $x = 1$ Vậy với mọi $a \geq \frac{1}{8}$ ta có $x = 1$ là số tự nhiên

Bài 2. Chứng minh rằng số

$$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \text{ là một số hữu tỉ.}$$

(Thi học sinh giỏi TP Hồ Chí Minh vòng 1 – 1985)

Giải.

Xét $x^3 = 6 - 5x$, hay $x^3 + 5x - 6 = 0$

Suy ra x là nghiệm của đa thức $x^3 + 5x - 6$ (2)

Ta có $x^3 + 5x - 6 = (x - 1)(x^2 + x + 6)$ Vì đa thức bậc hai $x^2 + x + 6$ không có nghiệm nên $x = 1$ là nghiệm thực duy nhất của đa thức (2)

Kết luận : $x = 1$ là một số hữu tỉ.

Bài 3. Chứng minh rằng số $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ.

Giải.

Xét $a^3 = 6 + 3\sqrt[3]{8}\,(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$, hay : $a^3 - 6a - 6 = 0$

Suy ra a là nghiệm của đa thức : $x^3 - 6x - 6$ (3)

Số a không phải là số hữu tỉ, vì giả sử ngược lại a là số hữu tỉ thì theo hệ quả 2, a phải là số nguyên. Dễ thấy $2 < \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < 4$, tức là $2 < a < 4$. Suy ra $a = 3$. Nhưng 3 lại không phải là nghiệm của đa thức (3). Vô lí

Điều vô lí chứng tỏ $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ.

Bài 4. Chứng minh rằng số $c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Giải. Giả sử ngược lại c là số hữu tỉ, ta có $c^2 = 5 + 2\sqrt{6}$.

Suy ra $\sqrt{6} = \dfrac{c^2 - 5}{2}$ là một số hữu tỉ. Vô lí.

Điều vô lí đó chứng tỏ $c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là một số vô tỉ.

Bài 5. Chứng minh rằng số $b = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ.

Giải.

Giả sử ngược lại b là một số hữu tỉ.

Xét $b^3 = 5 + 3\sqrt[3]{6}\,(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})$, do đó $b^3 = 5 + 3\sqrt[3]{6}.b$

Suy ra $\sqrt[3]{6} = \dfrac{b^3 - 5}{3b}$ là một số hữu tỉ. Vô lí.

Điều vô lí đó chứng tỏ $b = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ. Qua các bài toán trên đây, ta có thể đi tới mệnh đề tổng quát sau đây.

Nếu a và b là các số tự nhiên thì số $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ hoặc là một số tự nhiên, hoặc là một số vô tỉ. Thật vậy : dễ dàng kiểm tra được rằng số $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ là một nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $(x^3 - a - b)^3 - 27abx^3$.

Theo hệ quả 2 : Nếu đa thức này có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó phải là số nguyên. Do đó nếu nghiệm $c = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ không phải là số nguyên thì c phải là số vô tỉ.

Trong bài học "Số vô tỉ – Số thực" (Đại số 9 – 1984), các bạn đã biết các số $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{3}$ là các số vô tỉ. Dưới đây chúng ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát :

Bài 6. Nếu a là một số tự nhiên và n là số tự nhiên, $n \geq 2$ thì $\sqrt[n]{a}$ hoặc là một số nguyên hoặc là một số vô tỉ.

Giải. Giả sử $\sqrt[n]{a}$ không phải là số nguyên. Dễ thấy $c = \sqrt[n]{a}$ là một nghiệm của đa thức với hệ số nguyên $x^n - a$. Đa thức này nếu có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó phải là số nguyên. Nhưng theo giả sử $\sqrt[n]{a}$ không phải là số nguyên, do đó $\sqrt[n]{a}$ phải là số vô tỉ.

Bài 7. Chứng minh rằng số

$$a = \sqrt[3]{23} + \sqrt[3]{123} \text{ là một số vô tỉ}$$

Giải.

Bạn dễ dàng kiểm tra được

$$\frac{5}{2} < \sqrt[3]{23} < 3$$

$$\frac{9}{2} < \sqrt[3]{123} < 5$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức, ta có :

$$7 < \sqrt[3]{23} + \sqrt[3]{123} < 8$$

Giữa hai số tự nhiên 7 và 8 không có số tự nhiên nào, theo mệnh đề trên ta suy ra a là số vô tỉ.

Bài 8. Trong các đa thức sau đây, xác định xem nghiệm nhỏ nhất của chúng là số hữu tỉ, hay là số vô tỉ ?

a) $P(x) = x^6 + 2x^5 - 2x^4 + x^3 + 5x^2 - 6x - 1$

b) $Q(x) = x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 1$

Giải.

a) Nghiệm hữu tỉ của đa thức P(x) nếu có thì chỉ có thể là 1 hoặc –1. Nhận thấy $P(1) = 0$, do đó có thể phân tích.

$$P(x) = (x - 1)(x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 7x + 1)$$

Đa *thức* $x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 7x + 1$ có bậc lẻ nên phải có ít nhất là một nghiệm thực. Mặt khác : tất cả các hệ số của đa thức bậc lẻ đều dương, do đó nghiệm thực của đa thức phải là số âm, tức là nhỏ hơn 1. Từ đó có thể kết luận nghiệm nhỏ nhất của đa thức $P(x)$ là số vô tỉ.

b) Ta có :

$$Q(x) = (x + 1)(x^6 - 3x^5 + 5x^4 - 6x^3 + x^2 - 7x + 1)$$

Đa thức $x^6 - 3x^5 + 5x^4 - 6x^3 + x^2 - 7x + 1$ không có nghiệm hữu tỉ. Mặt khác, dễ thấy nếu đa thức bậc chẵn này có nghiệm thực thì nghiệm đó phải dương. Vậy có thể đi tới kết luận : nghiệm nhỏ nhất của đa thức là số hữu tỉ.

Bài 9. Hãy lập một đa thức với hệ số nguyên có một nghiệm là

$$a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Giải.

Xét $\qquad a^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, do đó $(a^2 - 5)^2 = 24$

hay : $\qquad a^4 - 10a^2 + 1 = 0$

Như vậy $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là nghiệm của đa thức $x^4 - 10x^2 + 1$

Bài 10. Xác định xem, số $c = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ là số vô tỉ hay là số hữu tỉ.

Giải.

Ta có $c^3 = 14 - 3c$, do đó $c^3 + 3c - 14 = 0$. Suy ra c là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên.

$$P(x) = x^3 + 3x - 14.$$

Nhận thấy $P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 7)$ trong đó đa thức $x^2 + 2x + 7$ không có nghiệm thực. Điều này có nghĩa $x = 2$ là nghiệm thực duy nhất của $P(x)$.

Kết luận : c là số hữu tỉ.

THỬ NHÌN BẰNG CON MẮT ĐỒNG DẠNG

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
Hải Phòng

Sáng tạo toán học-đó là một trong những nhiệm vụ hàng đầu của người làm toán. Nhưng sáng tạo toán học là một việc làm không dễ và có nhiều con đường khác nhau để thực hiện điều đó.

Ở đây tôi muốn trao đổi với các bạn trẻ một cách nhìn để bước đầu tập dượt sáng tạo. Tôi xin bắt đầu bằng một bài toán quen thuộc.

Bài toán 1 : Trên 2 cạnh góc vuông AB và AC của tam giác vuông cân ABC lấy các điểm D và E tương ứng sao cho $AD = AE$. Nối BE, từ A và D vẽ các đường vuông góc với BE cắt cạnh BC theo thứ tự tại H và K. Chứng minh rằng $CH = HK$.

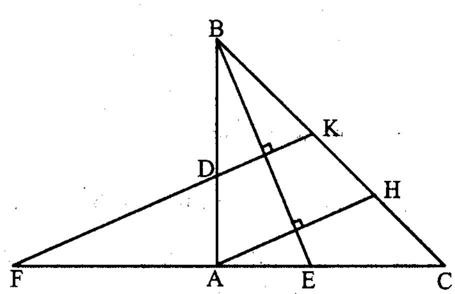
- Một trong những cách giải đơn giản của bài toán là : Kéo dài DK cắt đường thẳng AC tại F, ta chứng minh được (h.1) :

$\Delta ABE = \Delta AFD$ (g.c.g)

$\Rightarrow AF = AB = AC$

mà AH // FK nên CH = HK (đpcm)

- Bây giờ ta hãy để ý đến quan hệ của các đoạn thẳng trong bài toán :



Hình 1

$$\begin{cases} AB = AC \\ AD = AE \end{cases} \Rightarrow HC = HK \text{ hay } \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = 1 \Rightarrow \frac{HC}{HK} = 1$$

Từ đó nảy ra một suy nghĩ :

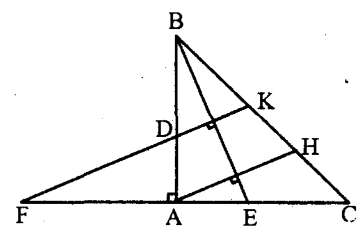
Nếu $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = k$ thì $\frac{HC}{HK}$ bằng bao nhiêu ? (a)

hoặc : Nếu $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = k$ thì $\frac{HC}{HK}$ bằng bao nhiêu ? (b)

Do đó ta có các bài toán sau :

Bài toán 1a : Trên 2 cạnh góc vuông AB và AC của tam giác vuông ABC lấy các điểm D và E tương ứng sao cho $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = k$ $(k > 0)$. Nối BE, từ A và D vẽ các đường vuông góc với BE cắt cạnh BC lần lượt tại H và K.

Tính tỷ số $\frac{HK}{HC}$ (theo k).



Hình 2

- Tương tự cách giải bài toán 1, ta cũng kéo dài DK cắt đường thẳng AC tại F. Dễ thấy : (h.2)

$$\Delta AFD \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AE} = k$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = k^2 \text{ hay } \frac{HK}{HC} = \frac{AF}{AC} = k^2$$

Bài toán 1b : Như bài toán 1a, chỉ thay giả thiết bằng

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = k$$

- Ở bài này (các bạn tự vẽ hình) giải tương tự bài 1a, ta cũng có :

$$\Delta AFD \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AF = AC,$$

mà $AH \parallel FK$ nên $HK = HC$ hay $\frac{HK}{HC} = 1$

Như vậy bằng cách thay đổi một chút suy nghĩ : Coi hai đoạn thẳng bằng nhau là 2 đoạn thẳng có tỉ số bằng 1, chúng ta đã tự tìm được 2 bài toán thú vị mà bài toán 1 chỉ là một trường hợp đặc biệt.

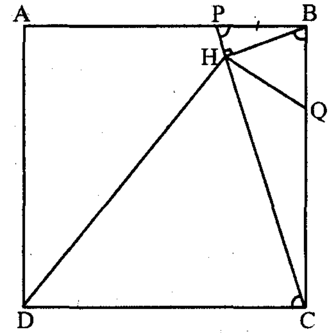
Bây giờ ta tiếp tục theo cách suy nghĩa đó với bài toán sau :

Bài toán 2 : Trên hai cạnh AB và BC của hình vuông $ABCD$ lấy 2 điểm P và Q tương ứng sao cho $BP = BQ$. Nối CP, hạ $BH \perp CP$. Chứng minh rằng $\widehat{DHQ} = 1v$.

- Việc chứng minh bài toán không khó, chỉ cần để ý $\Delta DHC \sim \Delta QHB$

$\Rightarrow \widehat{DHC} = \widehat{QHB}$, do đó

$\widehat{DHQ} = \widehat{CHB} = 1v$ (hình 3).



Hình 3

- Đến đây lập tức các bạn thấy dễ dàng đề xuất bài toán sau :

Bài toán 2a : Trên 2 cạnh AB và BC của hình chữ nhật $ABCD$ tùy ý lấy các điểm P và Q tương ứng sao cho : $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{BC}{BA}$. Nối CP, hạ $BH \perp CP$. Tính góc $\widehat{DHQ}$.

- Tương tự lời giải bài toán 2, các bạn có thể tự vẽ hình và chứng minh được trong trường hợp này ta cũng có $\widehat{DHQ} = 1$v.

- Trường hợp : $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{BA}{BC}$ các bạn thử tự nghĩ xem !

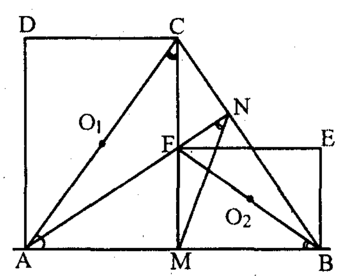
Ở các bài toán trên chủ yếu ta đã chuyển quan hệ bằng nhau của hai đoạn thẳng về việc xét tỷ số độ dài của chúng. Còn đối với các hình khác (tam giác, tứ giác...) thì thế nào ? Ta hãy vận dụng suy nghĩ trên vào bài toán sau (đã ra trong kỳ thi vô địch toán quốc tế lần thứ nhất – 1959) :

Bài toán 3 : Trên đoạn AB cho trước lấy điểm M bất kỳ. Về một phía của AB vẽ các hình vuông $AMCD$ và $MBEF$. Vẽ các đường tròn ngoại tiếp của hai hình vuông, cắt nhau tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng :

a) Các đường thẳng AF và BC cùng đi qua N.

b) Khi M chuyển động trên cạnh AB thì đường thẳng MN đi qua một điểm cố định S.

- Vì bài toán rất quen thuộc, nên phần lời giải tôi không trình bày riêng, mà chỉ đi vào trọng tâm của vấn đề : Coi hai hình vuông là hai hình chữ nhật đồng dạng có tỉ lệ 2 kích thước là một hằng số (các tình huống khác các bạn có thể tự nghĩ lấy), ta có bài toán sau :



Hình 4

Bài toán 3a : Trên đoạn AB cho trước lấy điểm M bất kỳ. Về một phía của AB ta vẽ các hình chữ nhật $AMCD$ và $MBEF$ sao cho $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{MF}{MB} = k$ (với k là số dương cho trước). Vẽ các đường tròn ngoại tiếp của hai hình chữ nhật cắt nhau tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng :

a) Các đường thẳng AF và BC cùng đi qua N.

b) Khi M chuyển động trên đoạn AB thì đường thẳng MN đi qua một điểm cố định S.

- Hướng giải quyết của bài toán này (cũng là của bài toán 3) như sau (hình 4):

a) – Trước hết ta thấy $AN \perp BN$ vì :

$\widehat{ANM} = \widehat{ACM}$, $\widehat{MNB} = \widehat{MFB}$, mà $\Delta AMC \sim \Delta FMB$

nên $\widehat{ACM} + \widehat{MFB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{ANM} + \widehat{MNB} = 90^0$, hay $\widehat{ANB} = 90^0$

- Mặt khác $\widehat{ANC} = 90^0 \Rightarrow$ 3 điểm C, N, B thẳng hàng.

- Lại có $\widehat{ANC} = \widehat{FNB} = 90^0 \Rightarrow$ 2 tia NA và NF trùng nhau, hay 3 điểm A, F, N thẳng hàng.

b) Dễ thấy khi M chuyển động trên đoạn AB thì N chuyển động trên nửa đường tròn cố định đường kính AB. Mà góc $\widehat{ANM} = \widehat{ACM}$ không đổi (tg$\widehat{ACM} = \dfrac{AM}{MC} = k$), nên đường thẳng MN đi qua điểm cố định S trên nửa đường tròn đường kính AB còn lại.

Cuối cùng chúc các bạn thu được nhiều kết quả thú vị trong học toán bằng những cách nhìn khác nhau.

SỰ CHÍNH XÁC TRONG GIẢI TOÁN

VŨ HỮU BÌNH
Hà Nội

1. Một sai lầm dễ mắc

Chúng ta đã quá quen thuộc khi viết 2 thành $\sqrt{2}.\sqrt{2}$, viết 3 thành $\sqrt{3}.\sqrt{3}$. Nhưng hãy cẩn thận : không phải lúc nào cũng viết được a thành $\sqrt{a}.\sqrt{a}$. Chỉ có điều đó với $a \geq 0$, nhưng với $a < 0$ thì $a = -\sqrt{-a}.\sqrt{-a}$.

Trong chương trình Đại số lớp 9, đã có hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ nhưng nhiều học sinh lớp 9 vẫn mắc sai lầm khi giải bài toán sau :

Rút gọn biểu thức $M = \dfrac{x + 3 + 2\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6 + \sqrt{x^2 - 9}}$ (1)

Đa số các bạn biến đổi như dưới đây :

$$M = \frac{\sqrt{x+3}.\sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x+3)(x-3)}}{2\sqrt{x-3}.\sqrt{x-3} + \sqrt{(x+3)(x-3)}} = \frac{\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}\,(2\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3})} = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \quad (2)$$

Cách giải trên hiển nhiên không đúng. Thật vậy với $x = -5$ chẳng hạn thì biểu thức M có nghĩa :

$M = \dfrac{-5 + 3 + 2.4}{2(-5) - 6 + 4} = \dfrac{6}{-12} = -\dfrac{1}{2}$ nhưng $\sqrt{x+3}$ lại không có nghĩa.

Biểu thức rút gọn $M = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$ cũng không đúng với $x = -5$ khi đó

$M = -\dfrac{1}{2}$ nhưng $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}} = \sqrt{\dfrac{-5+3}{-5-3}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ (!)

Vì sao có sai lầm trên ? Ta biết rằng tập xác định của biểu thức M là :

$$\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq -3 \end{array}\right.$$

Lời giải trên chỉ đúng với $x > 3$. Còn phải xét trường hợp $x \leq -3$.

2. Lời giải đúng

Trường hợp $x > 3$: Giải như trên.

Trường hợp $x \leq -3$:

Ta có $3 - x > -3 - x \geq 0$, do đó :

$$M = \frac{-\sqrt{-x-3}.\sqrt{-x-3} + 2\sqrt{-x-3}.\sqrt{3-x}}{2\sqrt{3-x}.\sqrt{3-x} + \sqrt{-x-3}.\sqrt{3-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{-x-3}(-\sqrt{-x-3} + 2\sqrt{3-x})}{\sqrt{3-x}\,(2\sqrt{3-x} - \sqrt{-x-3})}$$

$$= -\frac{\sqrt{-x-3}}{\sqrt{3-x}} = -\sqrt{\frac{-x-3}{3-x}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \qquad (3)$$

Cả hai kết quả (2) và (3) có thể viết chung được dưới dạng $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$.

3. Một lời giải khác

Nhân cả tử và mẫu của M với biểu thức liên hợp của mẫu :

$$M = \frac{(x + 3 + 2\sqrt{x^2-9})\left[2(x-3) - \sqrt{x^2-9}\right]}{\left[2(x-3) + \sqrt{x^2-9}\right]\left[2(x-3) - \sqrt{x^2-9}\right]}$$

$$= \frac{2(x^2-9) - (x+3)\sqrt{x^2-9} + 4(x-3)\sqrt{x^2-9} - 2(x^2-9)}{4(x-3)^2 - (x^2-9)}$$

$$= \frac{(4x - 12 - x - 3)\sqrt{x^2-9}}{(x-3)(4x-12-x-3)} = \frac{3(x-5)\sqrt{x^2-9}}{3(x-5)(x-3)} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$$

Lời giải này khá gọn, tuy nhiên phải nêu điều kiện rút gọn là $x \neq 5$.

Số 5 ở đâu ra ? Đó chính là giá trị của x làm cho biểu thức liên hợp đem nhân vào bằng 0. Như thế, sau khi đặt điều kiện $x \neq 5$, ta phải xét trường hợp $x = 5$. Với $x = 5$ thì $M = 2$. Do biểu thức kết quả $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ cũng có giá trị bằng 2 khi x = 5 nên đáp số $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$ là đáp số chung cho cả hai trường hợp $x \neq 5$ và $x = 5$.

4. Đôi lời kết luận

Một bài toán đơn giản, nhưng trình bày lời giải cho chặt chẽ, chính xác lại không đơn giản chút nào !

Sự chính xác trong giải toán, đó là một trong những vẻ đẹp muôn thuở của toán học.

Để luyện tập, các bạn hãy rút gọn các biểu thức sau :

$$A = \frac{x^2 + 5x + 6 + x\sqrt{9 - x^2}}{3x - x^2 + (x + 2)\sqrt{9 - x^2}};$$

$$B = \frac{(x^2 + x - 2) + (x + 1)\sqrt{x^2 - 4}}{(x^2 - x - 2) + (x - 1)\sqrt{x^2 - 4}}$$

HỌ ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM

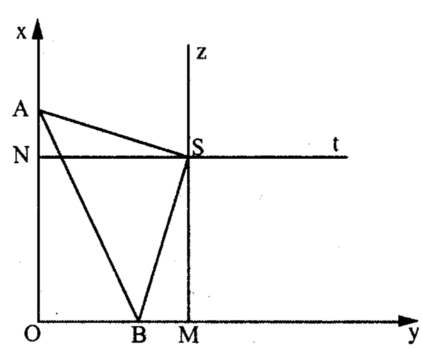
LÊ QUỐC HÁN
Nghệ An

Bài toán chứng minh họ đường thẳng đi qua một điểm cố định là bài toán thú vị và thường gặp trong các kì thi dành cho học sinh phổ thông Trung học cơ sở. Có hai phương hướng chính để giải lớp bài toán này : sử dụng công cụ hình học và công cụ đại số. Trong bài báo này, tôi xin trao đổi với các bạn vài hướng suy nghĩ để tiếp cận với vấn đề trên.

1. Phán đoán điểm cố định :

Để xác định điểm cố định, ta lấy hai đường thẳng của họ (thường chọn vị trí đặc biệt) và tìm giao S của chúng. Khi đó S là điểm cố định cần tìm. Sau đó, chứng minh một đường thẳng bất kì của họ đi qua S.

Thí dụ 1 : Cho góc vuông xOy và hai điểm A và B chuyển động trên Ox và Oy sao cho $OA + OB = a$ (a là độ dài cho trước). Chứng minh đường trung trực của đoạn AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.



Để chứng minh, ta xét hai vị trí đặc biệt của A và B. Khi $A \equiv O$ thì $B \equiv B_0$

($B_0 \in Oy$ và $OB_0 = a$) $\Rightarrow$ đường trung trực của AB trở thành Mz, trung trực của đoạn OB_0.

Khi $B \equiv O$ thì $A \equiv A_0$ ($A_0 \in Ox$ và $OA_0 = a$) $\Rightarrow$ đường trung trực của AB trở thành Nt, trung trực đoạn OA_0.

Gọi S là giao của Mz và Nt thì :

$\Delta SAN = \Delta SBM$ (c.g.c) $\Rightarrow SA = SB$

$\Rightarrow$ trung trực đoạn AB đi qua S.

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, việc xác định điểm cố định dựa vào hai trường hợp đặc biệt không dễ dàng. Chúng ta, thậm chí chỉ cần xét một trường hợp đặc biệt, nhưng thêm vào đó là cả kho tàng kinh nghiệm giải toán của mình.

Thí dụ 2 : Cho tam giác ABC và hai điểm M, N chuyển động trên AB và AC sao cho $BM = CN$. Chứng minh đường trung trực (Δ) của MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Ở đây, có một trường hợp đặc biệt của (Δ) là khi $M \equiv B$, $N \equiv C$ thì (Δ) chính là trung trực của đoạn BC. Có thể, khi $AB \neq AC$, lấy thêm một vị trí nữa của (Δ) (khi $AB = AC$ thì bài toán là tầm thường).

Giả sử $AB < AC$. Trên AC lấy điểm N_0 sao cho $CN_0 = BA$. Khi đó điểm cố định S là giao điểm của đường trung trực đoạn BC và đường trung trực đoạn AN_0. Tuy nhiên, việc chứng minh đường trung trực của đoạn MN bất kì đi qua S gặp khó khăn.

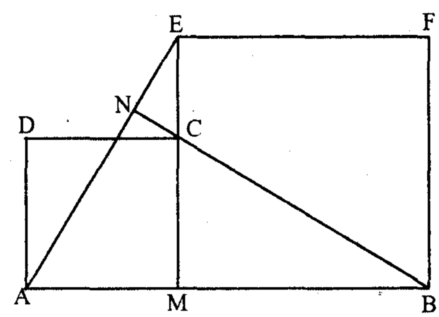
Ta chỉ giữ một trường hợp đặc biệt, khi (Δ) là trung trực đoạn BC và một trường hợp tổng quát. Khi đó, S giao điểm của chúng sẽ là trung điểm của cung $\overset{\frown}{BAC}$. Để tránh khó khăn, ta chứng minh gián tiếp : lấy điểm giữa S của cung BAC rồi chứng minh trung trực của MN đi qua S. Điều này cực dễ : $\Delta SMB = \Delta SNC$ (c.g.c) $\Rightarrow SM = SN \Rightarrow$ trung trực đoạn MN đi qua S (các bạn tự vẽ lấy hình).

2. Sử dụng bài toán phụ :

Có nhiều bài toán phụ giúp cho việc giải lớp bài toán này. Tôi xin nêu một trong các bài toán đó (đề nghị các bạn bổ sung thêm danh sách của chúng).

Cho dây AB cố định của một đường tròn (O) và một điểm C chuyển động trên cung AB nào đó đã xác định. Khi đó, phân giác $\widehat{ACB}$ luôn luôn đi qua điểm giữa của cung AB còn lại.

Thí dụ 3 : Cho đoạn thẳng AB cố định và một điểm M chuyển động trên đoạn AB. Dựng các hình vuông $AMCD$ và $BMEF$ sao cho chúng ở cùng một nửa mặt phẳng với bờ AB. Gọi N là giao điểm của AE và BC. Chứng minh đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.



Trước hết, ta thấy Δ vuông $MAE = \Delta$ vuông MCB.

$\Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{MBC} \Rightarrow AE \perp BC \Rightarrow N$ nằm trên đường tròn đường kính AB.

Mặt khác, $ANCM$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ANM} = \widehat{ACM} = 45^0 \Rightarrow MN$ là phân giác $\widehat{ANB}$. Áp dụng bài toán phụ, ta có điều phải chứng minh.

3. Sử dụng công cụ đại số :

Ta lập phương trình của họ đường thẳng (Δ), chúng thường phụ thuộc vào 1 tham số m nào đó. Viết phương trình (Δ) dưới dạng :

$$mf(x, y) + g(x, y) = 0$$

Khi đó họ đường thẳng (Δ) luôn luôn đi qua điểm cố định có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Các thí dụ trên đều có thể giải bằng phương pháp đại số. Ta xét lại thí dụ 1. Lập hệ tọa độ vuông góc có trục hoành chứa Ox và trục tung chứa Oy. Không mất tổng quát, giả sử $a = 1$. Nếu tọa độ $A(m, 0)$ thì tọa độ $B(0, 1- m)$. Phương trình trung trực (Δ_M) của AB có dạng :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$

hay $$(x - m)^2 + y^2 = x^2 + [y - (1 - m)]^2$$

$$\Leftrightarrow 2m(x + y - 1) + (1 - 2y) = 0$$

Vậy họ đường thẳng (Δ_M) luôn luôn đi qua điểm cố định S có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 1 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ x = y = \frac{1}{2} \right.$$

Vì khuôn khổ của một bài báo, tôi xin dừng lại tại đây và mong các bạn tiếp tục hành trình với các bài toán sau :

Bài toán 1 : Cho góc vuông xOy. Trên Ox và Oy có hai điểm A, B chuyển động sao cho $OA + OB = a$ (a là độ dài cho trước). Gọi G là trọng tâm ΔOAB và (α) là đường thẳng đi qua G và $(d) \perp AB$. Chứng minh (d) luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 2 : Cho góc vuông xOy. Trên Ox lấy điểm A cố định. Trên Oy có một điểm B chuyển động. Đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác OAB tiếp xúc với AB tại M và BO tại N. Chứng minh đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 3 : Cho đường tròn (O, R) và dây AB cố định. C là một điểm chuyển động trên đường tròn, M là trung điểm AC. Kẻ $MH \perp BC$ chứng minh đường thẳng MH luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán 4 : Cho đường tròn (O, R) và dây AB cố định. C là một điểm chuyển động trên cung AB xác định trước. Gọi CD và CM là phân giác trong và trung tuyến của ΔCDM. Đường tròn ngoại tiếp ΔCDM cắt AC và CB tại M và N. Chứng minh đường trung trực của đoạn MN luôn luôn đi qua 1 điểm cố định.

Bài toán 5 : Cho nửa đường tròn (O, R) đường kính AB và một điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Dựng (về phía ngoài đường tròn (O, R)) hình vuông $BCDE$.

1) Chứng minh EC luôn luôn đi qua một điểm cố định.

2) Tìm tập hợp I, tâm hình vuông đó.

CÁCH GIẢI HAY, ĐỘC ĐÁO

NGÔ HÂN
Bắc Ninh

Sau khi đã biết cách giải một bài toán, các bạn hãy cố gắng tìm thêm những cách giải khác (nếu có) để chọn ra cách giải hay nhất, đôi khi độc đáo.

Xin nêu một số bài toán dưới đây cùng với cách giải hay hoặc độc đáo để chúng ta cùng học tập.

Bài toán 1 : *Vừa gà vừa chó 36 con. Trói lại cho tròn đếm đủ 100 chân. Hỏi mấy gà, mấy chó ?*

Đây là một bài toán cổ ở nước ta mà các học sinh phổ thông đều biết cách giải bằng các phương pháp : giả thiết tạm, phương trình, hệ phương trình, v.v...

Sau đây là cách giải rất hay và độc đáo của G.Pôlya, một nhà toán học và tâm lý học nổi tiếng của Pháp :

Giả sử những con gà và chó giống như những con vật ở rạp xiếc biết thực hiện theo lệnh của người điều khiển là phải đứng ở một tư thế rất đặc biệt : Mỗi con gà chỉ được đứng bằng một chân, mỗi con chó chỉ được đứng bằng 2 chân sau (tức là mỗi con phải co một nửa số chân của mình lên khỏi mặt đất).

Như vậy theo đề toán, ta suy ra tổng số chân chạm đất của 36 con vừa gà, vừa chó là 50 chân (vì có tất cả là 100 chân).

Nếu 36 con toàn là gà thì chỉ có 36 chân chạm đất. Do đó số chân thừa ra là :

50 – 36 = 14 (chân)

Số chân này ứng với số chó vì mỗi con chó so với mỗi con gà được tính thêm một chân chạm đất.

Vậy có 14 chó và còn lại là 22 gà.

Cách giải này thật đơn giản, dễ hiểu và như "xiếc" vậy !

Bài toán 2 : *Cho 3 số bất kỳ x, y, z. Chứng minh đẳng thức :*

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

Cách giải thông thường của bài toán này là thực hiện các phép toán ở vế trái bằng cách dùng các hằng đẳng thức, rồi nhóm các hạng tử để có nhân tử chung và cuối cùng được kết quả là vế phải của đẳng thức cần chứng minh.

Có một cách giải hơi "lạ" đối với các bạn học sinh phổ thông cơ sở là dựa vào mối liên quan giữa nghiệm của một đa thức với phép chia đa thức cho nhị thức:

Đa thức $P(x)$ có nghiệm $x = a$ khi và chỉ khi đa thức $P(x)$ chia hết cho nhị thức $x - a$.

Vì vậy, đối với bài toán đã nêu, ta đặt :

$$P = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 \qquad (1)$$

và nếu coi P là một đa thức với biến số x thì $x = -y$ là một nghiệm, vì khi $x = -y$ ta có :

$$P = (-y + y + z)^3 - (-y)^3 - y^3 - z^3 = 0$$

Do đó P chia hết cho $(x + y)$

Mặt khác P là một đa thức đối xứng giữa các biến x, y, z nên P cũng chia hết cho $(y + z)$ và $(z + x)$, tức là P được phân tích thành nhân tử, có dạng :

$$P = (x + y)(y + z)(z + x)Q \qquad (2)$$

Vì P viết ở dạng (1) là đẳng cấp bậc 3 và P viết ở dạng (2) muốn là đẳng cấp bậc 3 thì Q phải là một hằng số.

Do đó nếu cho $x = y = z = 1$ thì giá trị của P viết ở dạng (1) sẽ là :

$$P = (1 + 1 + 1)^3 - 1^3 - 1^3 - 1^3 = 24 \qquad (3)$$

và giá trị của P viết ở dạng 2 sẽ bằng :

$$P = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)Q = 8Q$$

So sánh (3) và (4) suy ra $Q = 3$.

Vậy : $P = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$

Bài toán 3 : *Cho các số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh bất đẳng thức :*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Nó trở thành đẳng thức khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ở thế kỉ III trước công nguyên, Oclit, nhà toán học cổ ở Ai Cập, bằng phương pháp hình học đã tìm ra bất đẳng thức nêu trên trong trường hợp $n = 2$ và gọi là bất đẳng thức Oclit.

Năm 1821, Côsi, nhà toán học lỗi lạc Pháp đã chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp tổng quát, nên ta gọi bất đẳng thức trong bài toán 3 là bất đẳng thức Côsi.

Nhiều nhà toán học khác đã chứng minh bất đẳng thức Côsi theo các cách khác nhau, tuy rằng cũng dùng phương pháp chứng minh quy nạp và đều phải chứng minh dài. Ngay chứng minh của Côsi cũng khá dài nên không nêu ra ở đây.

Cách đây không lâu, Kong-Ming-Chong ở Malaysia đã đưa ra một cách giải khác, tương đối ngắn gọn như sau :

Trước hết, đặt : $T = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Khi đó bất đẳng thức ở trên tương đương với bất đẳng thức :

$$T^n \geq a_1 a_2 \ldots a_n \qquad (1)$$

Nếu $a_1 = a_2 \ldots = a_n$ thì (1) trở thành đẳng thức, vì :

$$T^n = T.T \ldots T = a_1 a_2 \ldots a_n$$

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ không bằng nhau tất cả thì phải có bất đẳng thức thực sự :

$$T^n > a_1 a_2 \ldots a_n \qquad (2)$$

Thật vậy ta chứng minh (2) bằng quy nạp.

Dễ thấy (2) đúng với $n = 2$, tức là :

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow T^2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 > a_1 a_2$$

Giả sử (2) đúng với $n - 1$ số không bằng nhau tất cả có trung bình cộng bằng T. Ta phải chứng minh (2) đúng với n.

Thật vật, trong các số $a_1, a_2 \ldots, a_n$ không bằng nhau tất cả phải có một số bé hơn T và một số lớn hơn T, giả sử là a_1 và a_2 :

$$a_1 < T < a_2$$

Do đó ta có :

$$(T - a_1)(a_2 - T) > 0$$

hay là :

$$a_1 + a_2 - T > \frac{a_1 a_2}{T} \geq 0$$

Ta xét $n - 1$ số không âm sau đây :

$$a_3, a_4, \ldots, a_n, (a_1 + a_2 - T)$$

Dễ thấy $n - 1$ số nói trên không bằng nhau tất cả nên theo giả thiết quy nạp ta có :

$$T^{n-1} > a_3a_4 \dots a_n(a_1 + a_2 - T) > a_3a_4 \dots a_n \frac{a_1a_2}{T}$$

Vậy : $T^n > a_1a_2 \dots a_n$

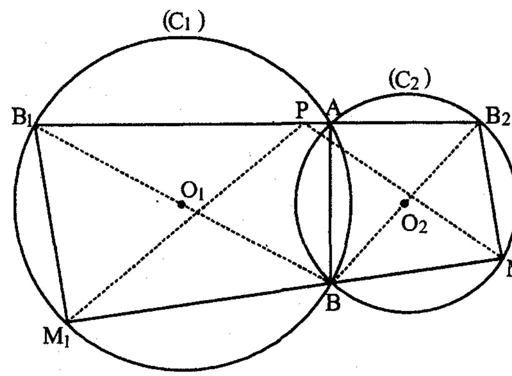
Bài toán 4 *: Cho 2 đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau và gọi A là một trong các giao điểm của chúng. Hai chất điểm M_1 và M_2 chuyển động trên (C_1) và (C_2) tương ứng, xuất phát từ A cùng một lúc, theo cùng một chiều và có vận tốc không đổi. Sau một vòng M_1 và M_2 trở về A cùng một lúc.*

Chứng minh rằng có một điểm P trong mặt phẳng sao cho ở bất kì thời điểm nào trong quá trình chuyển động thì hai chất điểm M_1 và M_2 luôn cách đều P.

Bài toán này là bài toán số 3, do Liên Xô (cũ) đề xuất trong kì thi Toán quốc tế lần thứ 21, tổ chức tại Luân Đôn (Anh) năm 1979.

Cách giải do Ban giám khảo nêu ra là dựa vào các phương trình chuyển động theo vận tốc góc và dùng các công thức lượng giác để biến đổi thành hệ phương trình, nhưng giải không đơn giản.

Lê Bá Khánh Trình trong đoàn dự thi Việt Nam đã có cách giải "rất đẹp, rất độc đáo" như lời ca ngợi của ông Chủ tịch Hội đồng giám khảo quốc tế trong kì thi thứ nhất. Cách giải đó như sau :



Vì sau một vòng M_1 và M_2 trở về A cùng một lúc nên ở một thời điểm bất kì thì độ lớn của cung mà M_1 đã đi qua bằng độ lớn của cung mà M_2 đã đi qua (xem hình vẽ).

Do đó nếu gọi B là giao điểm thứ hai của hai đường tròn và ta nối AB, M_1B, M_2B thì có :

$\widehat{M_1BA} + \widehat{M_2BA} = 180^0$, tức là 3 điểm M_1, M_2 và B thẳng hàng.

Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua tâm O_1, B_2 là điểm đối xứng với B qua tâm O_2.

Ta có hình thang $M_1M_2B_2B_1$ vuông tại M_1 và M_2. Do đó nên P là trung điểm của cạnh bên B_1B_2 thì P sẽ cách đều M_1 và M_2 vì P nằm trên đường trung bình của hình thang vuông (tức là P nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng M_1M_2). Vì B_1 và B_2 cố định (do (B cố định) nên trung điểm P cũng cố định).

Các bạn hãy tìm các cách giải khác đối với 4 bài toán đã nêu xem có cách giải nào hay hơn không và khi gặp các bài toán khác, các bạn cũng nên làm như vậy !

NGUYÊN TẮC DIRICH LET VỚI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

HÀ ĐỨC VƯỢNG
Hà Nam

Nguyên tắc mang tên nhà toán học người Đức : Dirichlet (1805 – 1859), được phát biểu như sau : Không thể nhốt 7 con thỏ vào 3 cái lồng mà mỗi lồng có không quá 2 con thỏ.

Ở đây ta chỉ thấy có hai đối tượng là "lồng" và "thỏ". Những người làm toán đã khéo léo từ những đối tượng khác nhau dựng thành những "chiếc lồng" và những "chú thỏ" để vận dụng nguyên tắc Dirichet, tìm ra lời giải của bài toán khá nhanh và khá lí thú. Ở các bài toán số học ta đã gặp khá nhiều bài toán giải bằng cách vận dụng nguyên tắc này. Do đó trong khuôn khổ của bài viết này chúng ta đề cập đến việc vận dụng nguyên tắc Dirichlet để giải các bài toán hình học.

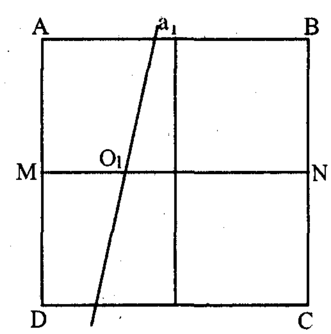
Để dễ hiểu và dễ vận dụng nguyên tắc này, ta phát biểu nó dưới dạng sau đây: *k, m, n là các số nguyên dương thỏa mãn km < n. Nếu nhốt n thỏ vào m lồng thì tồn tại ít nhất một lồng được nhốt không ít hơn k + 1 thỏ.*

Bài toán 1. Trong hình vuông cạnh 1, ta lấy 51 điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tìm được ít nhất 3 điểm nằm trong một hình tròn bán kính $R = \frac{1}{7}$.

Giải : Ta chia hình vuông thành 25 hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{1}{5}$. Ta coi 51 điểm là 51 thỏ và 25 hình vuông cạnh $\frac{1}{5}$ là 25 lồng. Ta có 2.25 < 51. Vậy theo nguyên tắc Dirichlet ít nhất có 3 điểm thuộc một hình vuông cạnh $\frac{1}{5}$. Hình tròn ngoại tiếp hình vuông này có bán kính $R = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{50}} < \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}$ ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 2 : Trong mặt phẳng cho hình vuông. Người ta vẽ 9 đường thẳng sao cho mỗi đường thẳng chia hình vuông thành 2 tứ giác có tỉ số diện tích $\frac{2}{3}$.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 3 đường thẳng đồng quy.



Giải : Vì đường thẳng a_i ($i = 1, ..., 9$) chia hình vuông *ABCD* thành 2 tứ giác nên a_i không thể đi qua đỉnh hình vuông và khi đó mỗi tứ giác là một hình thang vuông. Gọi *M*, *N* thứ tự là trung điểm *AD* và *BC* (hình vẽ). a_i cắt *MN* tại O_i. Từ công thức tính diện tích và tính chất của đường trung bình hình thang ta có $\frac{O_iM}{O_iN} = \frac{2}{3}$. Do tính chất đối xứng của hình vuông nên có 4 điểm O_i (như hình vẽ).

Ta coi 9 đường thẳng là 9 thỏ và 4 điểm O_i ($i = 1, ..., 4$) là 4 lồng. 2.4 < 9. Vậy theo nguyên tắc Dirichlet tồn tại ít nhất một lồng được nhốt 3 thỏ. Hay ít nhất 3 trong các đường thẳng đó đồng quy.

Bài toán 3. Cho đa giác lồi n – cạnh ($n \geq 5$) được đặt trong hệ tọa độ vuông góc. Biết 5 đỉnh của đa giác có tọa độ là những số nguyên, hãy chứng minh rằng ít nhất có một điểm thuộc miền trong hoặc bên cạnh của đa giác có tọa độ là các số nguyên.

Giải : Chia tập hợp T gồm tất cả các điểm có tọa độ là những số nguyên thành 4 tập sau :

Tập T_1 gồm tất cả các điểm có tọa độ (x, y) mà x chẵn và y chẵn. Tập T_2 gồm tất cả các điểm có toạ độ (x, y) mà x chẵn và y lẻ. Tập T_3 gồm tất cả các điểm có tọa độ (x, y) mà x lẻ và y lẻ. Tập T_4 gồm tất cả các điểm có tọa độ (x, y) mà x lẻ và y chẵn.

Ta coi các tập T_1, T_2, T_3, T_4 là các lồng và 5 đỉnh có tọa độ nguyên của đa giác là những chú thỏ. Do 1.4 < 5 nên theo nguyên tắc Dirichlet phải có ít nhất 1 lồng được nhốt ít nhất 2 thỏ. Hay, ít nhất có 2 đỉnh $A_i(x_i, y_i)$ và $A_j(x_j, y_j)$ mà x_i, x_j có cùng tính chẵn lẻ ; y_i, y_j có cùng tính chẵn lẻ. Suy ra trung điểm M của đoạn A_iA_j có tọa độ $\left(\dfrac{x_i + x_j}{2}, \dfrac{y_i + y_j}{2}\right)$ là những số nguyên.

Vì đa giác là lồi nên M hoặc là điểm thuộc miền trong hoặc là điểm nằm trên cạnh của đa giác.

Tuy nhiên khi vận dụng nguyên tắc Dirichlet bạn cũng cần chú ý : Nguyên tắc này không cho phép ta chỉ ra "lồng nào" nhốt mấy con thỏ.

Sau đây là một số bài toán dành cho bạn đọc tự giải :

1. Trên mặt phẳng cho 6 điểm tùy ý, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta nối 2 trong các điểm đã cho với nhau bằng một đoạn thẳng có màu đỏ hoặc màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác có 3 cạnh là 3 đoạn thẳng cùng màu.

2. Chứng minh rằng một mặt phẳng cắt một khối tứ diện tạo thành 2 phần thì mặt phẳng đó cắt nhiều nhất 4 cạnh tứ diện và ít nhất là cắt 3 cạnh của tứ diện.

3. Một rừng thông mọc trên lô đất hình vuông cạnh 1km. Biết rằng tất cả rừng có 4500 cây thông, mỗi cây chu vi 50cm. Chứng minh rằng có thể chọn trong khu rừng đó 60 mảnh đất hình chữ nhật có kích thước 10m x 20m, mà trong đó không có một cây thông nào mọc.

CÁI HAY CỦA MỘT BÀI TOÁN NHỎ

TRẦN BÁ SĨ
(Thiệu Yên – Thanh Hóa)

Trong tập sách Toán (của Liên Xô) có bài toán sau :

"Trong tam giác ABC ($AB > AC$) có góc $A = \alpha$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Lấy điểm E là trung điểm AD, F trung điểm BC. Tính góc $\widehat{BEF}$?". Nghiên cứu kĩ bài toán này bạn sẽ thấy có hai điều đáng chú ý sau :

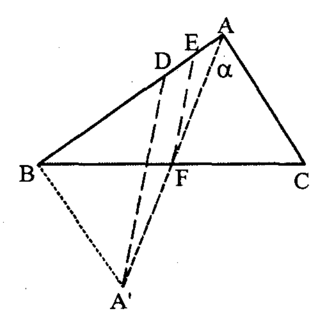
Thứ nhất bài toán rất phong phú về lời giải. Sau đây xin trình bày các lời giải đó.

Cách 1

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua tâm F. Thế thì $ACA'B$ là hình bình hành $\Rightarrow AC \parallel BA' \Rightarrow AC = DB = BA'$.
$\Rightarrow \Delta DBA'$ cân.

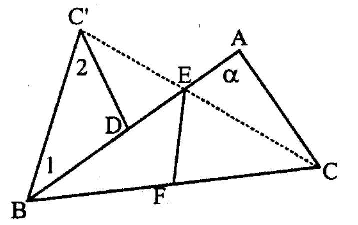
Từ đó chú ý rằng $EF \parallel DA$ và $\hat{A}$ bù góc $\widehat{ABA'}$

$$\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{BDA'} = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\alpha}{2}$$



Cách 2

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua tâm E. Thế thì $ACDC'$ là hình bình hành



$\Rightarrow AC = DC'$ & $AC \parallel DC'$ và $DB = DC' = AC$

$\Rightarrow \Delta DBC'$ cân

$\Rightarrow \quad \widehat{B}_1 = \widehat{C'}_2$ và $\widehat{B}_1 + \widehat{C'}_2 = \widehat{C'DA}$ nhưng $\widehat{C'DA} = \widehat{A}$ $(C'D \parallel AC)$

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \frac{1}{2}\widehat{C'DA} = \frac{1}{2}\widehat{A} = \frac{1}{2}\alpha$

Chú ý trong $\Delta CBC'$ thì EF là đường trung bình nên $EF \parallel BC' \Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{B}_1 = \frac{\alpha}{2}$

Cách 3

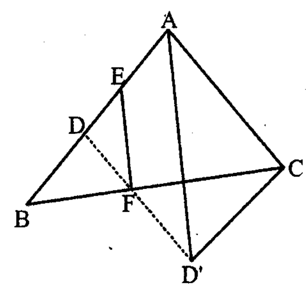
Gọi D' đối xứng với D qua tâm F.

Tứ giác $DBD'C$ là hình bình hành.

$\Rightarrow DB = AC = CD'$

$\Rightarrow \Delta ACD'$ cân.

Xét tương tự như cách 1 ta cũng có $\widehat{BEF} = \frac{\alpha}{2}$



Cách 4

Nối DC, gọi I trung điểm DC.

Dễ thấy $EI \parallel= \frac{1}{2}AC$, $FI \parallel= DB$

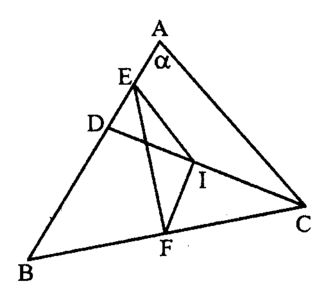
mà $AC = DB \Rightarrow EI = FI$.

Do đó ΔEIF cân $\Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{IFE}$

Dễ thấy $\widehat{A}$ bù với $\widehat{EIF}$

$\Rightarrow \widehat{EFI} = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{\alpha}{2}$

Chú ý $IF \parallel AB \Rightarrow \widehat{BEF} = \frac{\alpha}{2}$



Cách 5

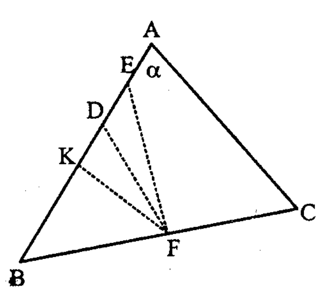
Đặt $AC = b$; $AB = c$

Kẻ $FK \parallel AC \Rightarrow FK = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}$

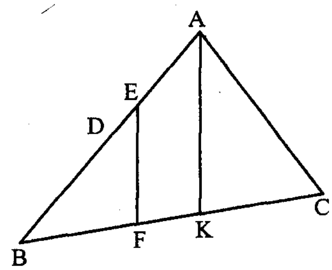
$KE = BE - BK = \frac{c+b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow KE = KF \Rightarrow \Delta FKE$ cân

$\widehat{BEF} = \frac{\alpha}{2}$



Cách 6



Kẻ phân giác AK.

Đặt $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$

Ta có : $\dfrac{KB}{KC} = \dfrac{c}{b}$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{KB + KC} = \dfrac{c}{c + b}$

$\Rightarrow \dfrac{KB}{a} = \dfrac{c}{c + b}$

Vậy $$\frac{KB}{AB} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{c} = \frac{a}{b+c} \qquad (1)$$

Mặt khác $BE = b + \dfrac{c - b}{2} = \dfrac{b + c}{2}$; $BF = \dfrac{a}{2}$

Vậy $$\frac{BF}{BE} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b+c}{2}} = \frac{a}{b+c} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{KB}{AB} = \dfrac{BF}{BE} \Rightarrow \Delta EBF \sim \Delta ABK$

$\Rightarrow \widehat{BEF} = \dfrac{\alpha}{2}$

Thứ hai, bài toán ta vừa giải ở trên là trường hợp đặc biệt của bài toán sau đây, mà có lẽ bạn học sinh nào cũng đã một lần gặp :

"Tứ giác ABCD có AD = BC gọi E, F lần lượt là trung điểm của DC và AB. EF cắt AD, BC kéo dài tại K và I. Chứng minh rằng $\widehat{AKF} = \widehat{BIF}$ *". Bài toán ta vừa giải là trường hợp của bài toán này khi A, D, C thẳng hàng. Cách giải của bài toán ta vừa nêu có phong phú như bài toán suy biến của nó không ? Điều này xin dành cho các bạn suy nghĩ.*

THỨ TỰ SẮP ĐƯỢC CỦA DÃY BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN VĂN MẬU
ĐH Quốc gia Hà Nội

Có lẽ nhiều bạn đã biết rằng tập hợp tất cả các tam giác là không thể sắp xếp theo thứ tự được. Tuy nhiên, nếu để ý, các bạn sẽ thấy rằng có thể trích được những tập hợp con (theo một tiêu chuẩn đã định) mà mỗi tam giác trong tập hợp đó được đánh số theo một trật tự nhất định.

Chẳng hạn, đối với dãy các tam giác vuông $A_nB_nC_n$ $(n = 1, 2,\dots)$ có các góc $A_n = \pi/2$, $B_n \geq C_n$, $C_n \leq C_{n+1}$, ta có thể nói dãy đó đã được xếp theo thứ tự tăng dần đến tam giác vuông cân.

Một cách tổng quát, đứng về phương diện góc của tam giác chúng ta cũng có thể sắp xếp theo thứ tự của một dãy các tam giác thường. Ta nói rằng tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$\max(A_1, B_1, C_1) \leq \max(A_2, B_2, C_2)$$

$$\min(A_1, B_1, C_1) \geq \min(A_2, B_2, C_2)$$

Tại sao chúng ta cần đến một sự sắp xếp thứ tự như vậy? Đó là những vấn đề quan trọng của toán học hiện đại khi cần phải tiếp xúc và giải quyết các bài toán trên những mô hình trừu tượng mà các đối tượng nghiên cứu không cụ thể và không đơn giản.

Trong bài này chỉ xin nêu một ý nghĩa nhỏ của việc áp dụng dãy các tam giác sắp được vào việc chính xác và làm giàu một số kết quả quen biết mà mỗi chúng ta đều đã từng chứng minh đối với tam giác.

Ta hãy quan sát bài toán đơn giản sau đây.

Bài toán 1. Chứng minh rằng trong mỗi tam giác ABC ta đều có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Có nhiều cách giải đơn giản đối với bài toán 1 và các dạng tương tự (xin các bạn tự kiểm chứng).

Hãy viết lại bài toán 1 dưới dạng

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Nhận xét ngay được rằng biểu thức ở vế phải ứng với trường hợp tam giác đều. Phải chăng, nếu cho hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ sao cho tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$ thì sẽ có một bất đẳng thức tương tự ? Ta phát biểu câu hỏi trên dưới dạng một mệnh đề toán học.

Bài toán 2. Cho hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\max(A_1, B_1, C_1) \ge \max(A_2, B_2, C_2)$$

$$\min(A_1, B_1, C_1) \le \min(A_2, B_2, C_2)$$

Chứng minh rằng:

$$\sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1 \le \sin A_2 + \sin B_2 + \sin C_2 \qquad (1)$$

Rõ ràng bài toán 2 phức tạp hơn nhiều so với bài toán 1. Ở đây xin nêu một phương pháp chung để các bạn tham khảo. Hy vọng các bạn sẽ tìm ra lời giải tối ưu đối với bài toán 2.

Không mất tính tổng quát, có thể giả thiết: $A_1 \ge B_1 \ge C_1$. $A_2 \ge B_2 \ge C_2$. Suy ra:

$$A_1 \ge A_2,\ A_1 + B_1 \ge A_2 + B_2,\ C_1 \le A_2 \text{ và } C_2 \le A_1$$

1) Xét trường hợp $A_2 \ge B_1$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\sin A_1 + \sin B_1 \ge \sin A_2 + \sin(B_1 + A_1 - A_2) \qquad (2)$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow (\sin A_1 - \sin A_2) + (\sin B_1 - \sin(B_1 + A_1 - A_2)) \le 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{A_1 - A_2}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right) - \cos\left(\frac{2B_1 + A_1 - A_2}{2}\right)\right] \le 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{(A_1 - A_2)}{2}\sin\frac{(A_1 + B_1)}{2}\sin\frac{(B_1 - A_2)}{2} \le 0$$

Vậy bất đẳng thức (2) đúng. Để chứng minh (1), ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức.

$$\sin C_1 + \sin(B_1 + A_1 - A_2) \le \sin B_2 + \sin C_2 \qquad (3)$$

Ta có (3) $\Leftrightarrow (\sin C_1 - \sin C_2) + (\sin(B_1 + A_1 - A_2) - \sin B_2) \le 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{(C_1 - C_2)}{2}\cos\frac{(C_1 + C_1)}{2} - \cos\frac{(B_1 + A_1 - A_2 + B_2)}{2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\frac{(C_1 - C_2)}{2}\sin\frac{(\pi - A_2)}{2}\sin\frac{(B_2 - C_1)}{2} \le 0$$

Do $C_2 \ge C_1$, $B_2 \le C_1$, suy ra (3) đúng, vậy (1) đúng.

2) Xét trường hợp $A_2 < B_1$

Khi đó (2) không còn đúng. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sin B_1 + \sin C_1 \le \sin A_2 + \sin(C_1 + B_1 - A_2) \quad (4)$$

Biến đổi tương tự như bất đẳng thức (2), ta sẽ có:

(4) $\Leftrightarrow 4\sin\dfrac{(B_1 - A_2)}{2}\sin\dfrac{(B_1 + C_1)}{2}\sin\dfrac{(C_1 - A_2)}{2} \le 0$

Do $B_1 > A_2$ và $C_1 < A_2$, suy ra (4) đúng.

Vậy để chứng minh (1), chúng ta chỉ cần kiểm tra bất đẳng thức

$$\sin A_1 + \sin(C_1 + B_1 - A_2) \le \sin B_2 + \sin C_2 \qquad (5)$$

Bằng các biến đổi lượng giác tương tự, ta có:

$$(5) \Leftrightarrow 4\cos\frac{A_2}{2}\sin\frac{(A_1 - B_2)}{2}\sin\frac{(C_2 - A_1)}{2} \le 0$$

Vậy (5) đúng. Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Bằng phương pháp đã nêu, các bạn có thể kiểm tra tính đúng đắn của nhiều bất đẳng thức cơ bản khác trong tam giác với các hàm số cosin, tang và cotang.

Phải chăng ta cũng lập được một thứ tự tương ứng cho tứ giác và tứ diện? Chắc chắn rằng việc khái quát hóa bất đẳng thức (1) sẽ đem lại nhiều điều thú vị. Chúc các bạn thành công.

MỞ RỘNG MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

TẠ HỒNG QUẢNG
Hà Tây

Trên báo toán GAZETA MATEMATICA của Rumani số 9, 1989, trang 335, tác giả Gheoghe Marghescu đưa ra bất đẳng thức sau:

Bài toán 1. $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ là các số dương, $n \ge 2$. Khi đó ta có

$$\left(\sqrt{a_1^2 + a_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{1}{a_1 + b_1} + \frac{1}{a_2 + b_2} + \ldots + \frac{1}{a_n + b_n}\right) \ge n\sqrt{n} \qquad (1)$$

Để chứng minh (1) tác giả đã phải sử dụng một loạt các bất đẳng thức đã biết như bất đẳng thức Côsi cho n số dương, bất đẳng thức trung bình điều hòa, bất đẳng thức Mincốpxki. Xem chứng minh của Gheorghe Marghescu tôi băn khoăn liệu có cách chứng minh khác dễ hiểu hơn không? Sau một thời gian suy nghĩ tôi đã tìm ra một cách chứng minh khác khá đơn giản và điều lí thú là kết quả nhận được mạnh hơn bất đẳng thức (1). Cụ thể tôi đi đến bài toán sau:

Bài toán 2. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số dương, $n \ge 1$. Khi đó ta có.

$$\left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right) \times \left(\frac{1}{a_1 + b_1} + \ldots + \frac{1}{a_n + b_n}\right) \ge \frac{n^2}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

Chứng minh: Với mọi a, b thực ta có

$$\sqrt{a^2 + b^2} \ge \frac{a + b}{\sqrt{2}}$$

Do đó, sử dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta được

$$\left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{a_1 + b_1} + \frac{1}{a_2 + b_2} + \ldots + \frac{1}{a_n + b_n}\right) \ge$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left((a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)\right).\left(\frac{1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{1}{a_n+b_n}\right)\geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a_1+b_1}.\frac{1}{\sqrt{a_1+b_1}}+\ldots+\sqrt{a_n+b_n}.\frac{1}{\sqrt{a_n+b_n}}\right)^2=\frac{n^2}{\sqrt{2}}$$

Bài toán 2 đã được giải quyết.

Lưu ý rằng với n = 2, vế phải của bất đẳng thức (2) trùng với vế phải của bất đẳng thức (1) còn với n > 2 thì vế phải của (2) thực sự lớn hơn vế phải của (1).

Dựa vào cách chứng minh của bài toán (2) ta dễ dàng nhận được kết quả sau đây:

Bài toán 3. $a_1, a_2,\ldots,a_n$, $b_1, b_2,\ldots,b_n$ là các số dương, $n \geq 1$. Giả sử $c_1, c_2,\ldots,c_n$ là một hoán vị nào đó của các số $a_1, a_2,\ldots,a_n$.

Chứng minh rằng khi đó ta có:

$$\left(\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\right).\left(\frac{1}{c_1+b_1}+\frac{1}{c_2+b_2}+\ldots+\frac{1}{c_n+b_n}\right)\geq\frac{n^2}{\sqrt{2}} \qquad (3)$$

Tất nhiên kết quả này vẫn chưa làm cho chúng ta thỏa mãn. Có thể mở rộng bài toán 3 như sau.

Bài toán 4. Ta chia các số dương $a_1, a_2,\ldots,a_n$, $b_1, b_2,\ldots,b_n$, $n \geq 1$ làm n nhóm sao cho trong mỗi nhóm có ít nhất một số. Gọi $M_1, M_2, \ldots, M_n$ lần lượt là tổng các số trong mỗi nhóm. Chứng minh rằng khi đó ta có

$$\left(\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\right).\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\ldots+\frac{1}{M_n}\right)\geq\frac{n^2}{\sqrt{2}} \qquad (4)$$

Bài toán 4 được giải tương tự như bài toán 2.

Đến đây chắc các bạn sẽ tự hỏi: liệu bất đẳng thức (4) có thể mở rộng hơn được không ? Các bạn hãy suy nghĩ tiếp đi, có thể nhiều điều mới mẻ sẽ được phát hiện. Sự say mê, miệt mài suy nghĩ sẽ mang đến cho các bạn những niềm vui.

Cuối cùng đề nghị các bạn tự giải bài toán sau:

Bài toán 5. Ta chia các số dương $a_1, a_2,\ldots,a_n$, $b_1, b_2,\ldots,b_n$ làm n nhóm sao cho trong mỗi nhóm có ít nhất một số. Gọi $M_1, M_2, \ldots, M_n$ lần lượt là tổng các số trong mỗi nhóm. Chứng minh rằng với mọi k nguyên ≥ 2 ta có:

$$\left(\sqrt[k]{a_1^k+b_1^k}+\sqrt[k]{a_2^k+b_2^k}+\ldots+\sqrt[k]{a_n^k+b_n^k}\right).\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}+\ldots+\frac{1}{M_n}\right)\geq\frac{\sqrt[k]{2}}{2}.n^2 \qquad (5)$$

NHÂN MỘT BÀI THI HỌC SINH GIỎI

HOÀNG CHỨNG
TP Hồ Chí Minh

Các bài toán thi học sinh giỏi thường là khó, ở mức độ khác nhau, tùy tầm cỡ cuộc thi. Tuy nhiên, ngay cả kì thi toán quốc tế, cũng có bài không quá "dễ sợ" như ta tưởng, nếu ta biết cách "xoay xở" đối với nó. Lấy thí dụ bài sau đây trong kì thi toán quốc tế lần thứ 33 (năm 1992) vừa qua.

Cho 9 điểm trong không gian, trong đó không có 4 điểm nào nằm trong cùng một mặt phẳng. Tất cả những điểm này được nối nhau từng cặp bằng đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô màu xanh hoặc màu đỏ hoặc không tô màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho với mọi cách tô màu n đoạn thẳng tùy ý ta đều tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu.

Sau đây ta gọi bài toán này là *bài toán 1.*

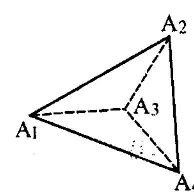
Đây là một bài toán về *graph (đồ thị).* Nếu bạn chưa có dịp làm quen với lí thuyết graph thì đối với bạn, bài toán có vẻ "lạ", khó thấy sự liên quan đến các kiến thức số học, đại số hay hình học quen thuộc. *Phải suy nghĩ từ đầu để giải bài toán ?*

Nhà toán học lỗi lạc *D. Hibert*, trong báo cáo ở hội nghị toán học quốc tế năm 1900, khi nêu ra 23 bài toán mà "thế kỉ thứ 19 thách thức thế kỉ thứ 20", đã nói: "Có lẽ, trong đa số trường hợp chúng ta không tìm được lời giải của một bài toán là bởi vì chúng ta chưa giải được hay chưa giải được trọn vẹn những bài toán *đơn giản và dễ hơn* bài toán đã cho" (tôi gạch dưới, H.C.).

Chúng ta thử suy nghĩ theo hướng dẫn của Hilbert xem sao. Trong bài toán 1, người ta cho 9 điểm. Ta xét bài toán với *số điểm ít hơn:*

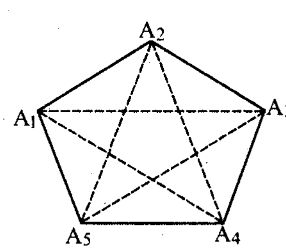
Bài toán 2 – Cho k điểm trong không gian (k < 9), trong đó không có 4 điểm nào cùng nằm trong một mặt phẳng. Tất cả những điểm này được nối nhau từng cặp bằng đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô màu xanh hoặc đỏ hoặc không tô màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho với mọi cách tô màu n đoạn thẳng tùy ý (trong đó các đoạn thẳng đã vẽ), ta đều tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu.

Trước hết, chú ý rằng giả thiết "không có 4 điểm nào cùng nằm trong một mặt phẳng" chỉ có nghĩa là "các đoạn thẳng nối từng cặp điểm đã cho không cắt nhau, ngoài đầu mút chung (nếu có).



Hình 1

Ta gọi k điểm đã cho là k *đỉnh*, đoạn thẳng nối hai đỉnh gọi là một cạnh. Với k đỉnh, ta có tất cả là $\frac{k(k-1)}{2}$ cạnh và số n phải tìm, nếu có, là số $\leq \frac{k(k-1)}{2}$.



Hình 2

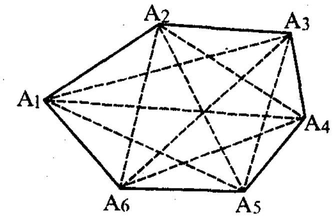
Ta xét từ giá trị nhỏ nhất của k trở đi.

- Với $k = 3$, bài toán không có lời giải vì đương nhiên có thể tô 3 cạnh của một tam giác với hai màu khác nhau.

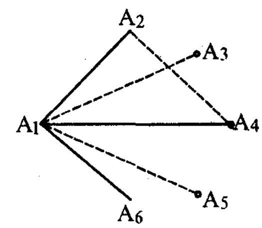
- Với $k = 4$ (bốn đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4), có thể vẽ được tất cả 6 cạnh. Có thể tô 4 cạnh liên tiếp A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 bằng một màu (đỏ chẳng hạn), hai đoạn thẳng còn lại bằng màu khác (xanh), lúc đó không có tam giác nào có các cạnh cùng màu (h.1). Bài toán không có lời giải với $k = 4$.

- Với $k = 5$ (năm đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4, A_5), vẽ được tất cả $\frac{5.4}{2} = 10$ cạnh. Có thể tô 5 cạnh liên tiếp A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 bằng một màu (đỏ), 5 cạnh còn lại bằng màu khác (xanh), lúc đó không có tam giác nào có các cạnh cùng màu (h.2). Bài toán cũng không có lời giải với $k = 5$.

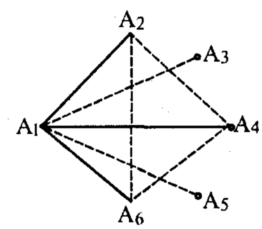
- Với $k = 6$, vẽ được tất cả $\frac{6.5}{2} = 15$ cạnh. Nếu ta cùng tô 6 cạnh liên tiếp A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1 bằng cùng một màu (đỏ), các cạnh còn lại được tô màu khác (xanh), thì lúc đó các tam giác $A_1A_3A_5$ và $A_2A_4A_6$ được tô cùng một màu xanh (h.3)



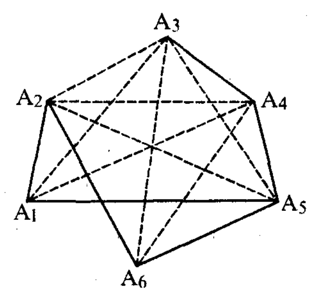
Hình 3



Hình 4



Hình 5



Hình 6

Có thể chứng minh dễ dàng rằng:

Với $k = 6$ thì với mọi cách tô màu cả 15 cạnh, ta luôn tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu.

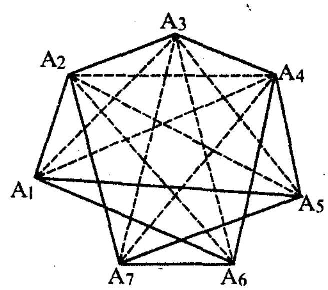
Thực vậy, theo giả thiết, một đỉnh bất kì (A_1) là đầu mút của 5 cạnh A_1A_i ($i = 2, 3, 4, 5, 6$). Năm cạnh này được tô trong hai màu, nên phải có ít nhất 3 cạnh được tô cùng một màu, thí dụ A_1A_2, A_1A_4, A_1A_6 được tô cùng màu đỏ. Xét tam giác $A_2A_4A_6$: nếu tam giác này có một cạnh màu đỏ (A_2A_4 chẳng hạn) thì ta có một tam giác ($A_1A_2A_4$) có các cạnh cùng màu đỏ (h.4). Nếu ngược lại thì $A_2A_4A_6$ là một tam giác có các cạnh cùng màu xanh (h.5). Trong mọi trường hợp, ta đều có một tam giác có các cạnh cùng màu, đpcm.

Như vậy, với $k = 6$ thì $n \leq 15$. Xét trường hợp $n = 14$, nghĩa là ta không tô màu một cạnh, thí dụ A_1A_6. Khi đó nếu ta tô màu 10 cạnh qua 5 đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 như hình 2 (không có tam giác nào có các cạnh cùng màu), rồi tô cạnh A_6A_i cùng màu với cạnh A_1A_i ($i = 2, 3, 4,5$) ta cũng sẽ không có tam giác nào có các cạnh cùng màu. Hình 6 chứng tỏ yêu cầu của bài toán không được thỏa mãn với $n = 14$.

Tóm lại, với *$k = 6$, ta có $n = 15$.*

- Xét tiếp với $k = 7$. Số cạnh tối đa là $7.6 / 2 = 21$. Nếu ta chỉ tô màu 20 cạnh, thí dụ không tô màu A_1A_7, thì ta đã tô màu tất cả các cạnh nối từng cặp trong 6 đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (hoặc A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7), với 15 cạnh này, dù tô màu cách nào, ta cũng có một tam giác có các cạnh cùng màu. Vậy $n \leq 20$.

Nếu n = 19, ta có thể lặp lại cách tô màu từ hình 2 sang hình 6 để từ hình 6 sang hình 7, với một điều chú ý: *lấy một đỉnh là đầu mút của 5 cạnh* (tức là khác A_1 và A_6 trong hình 6), thí dụ ta lấy A_5. Không tô màu A_7A_5, còn các cạnh A_7A_i ($i \neq 5$) được tô cùng màu với cạnh A_5A_i. Hình 7 chứng tỏ có thể tô màu 19 cạnh mà không có tam giác nào có các cạnh cùng màu.

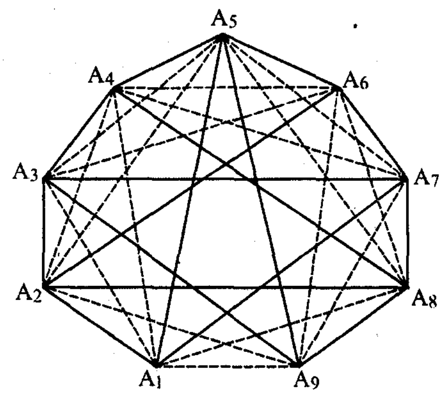


Hình 7

Như vậy, ta đã chứng minh được rằng với $k = 7$ thì $n = 20$.

Lập luận trên đây có thể áp dụng cho k = 8, rồi k = 9. Với k = 9, có tối đa 9.8 / 2 = 36 cạnh. Giả sử ta tô màu 32 cạnh, không tô màu 3 cạnh.

Xét 3 đỉnh, mỗi đỉnh là đầu mút của một cạnh ta không tô màu. Như vậy, ta đã tô màu tất cả các cạnh đi qua 6 đỉnh còn lại và (như đã chứng minh với $k = 6$) dù tô màu cách nào, ta cũng có một tam giác với các cạnh cùng màu. Do đó $n \leq 33$.



Hình 8

Hình 8 cho thấy một cách tô màu 32 cạnh mà không một tam giác nào có các cạnh cùng màu. Chú ý rằng từ hình 7 sang hình 8 có hai bước : 1) *tô màu 6 cạnh xuất phát từ A_8 :* chọn một đỉnh là đầu mút của 6 cạnh (phải khác với A_1, A_6, A_7, A_5), chẳng hạn A_4 ; không tô màu A_8A_4, còn A_8A_i ($i \neq 4$) được tô cùng màu với A_4A_i ; 2) *tô màu 7 cạnh xuất phát từ A_9* : chọn một đỉnh là đầu mút của 7 cạnh, thí dụ A_3 ; không tô màu A_9A_3 rồi tô A_9A_i ($i \neq 3$) cùng màu với A_3A_i.

Bài toán 1 đã giải xong. Số n nhỏ nhất phải tìm là 33.

Có thể thấy rõ là bài toán được giải nhờ vào một loạt những bài toán *đơn giản và dễ hơn* (đặc biệt là với k = 5, 6, 7 điểm). Hơn nữa, từ đó thấy ngay được lời giải với $k = 10$. (Bạn thử xét tiếp: với $k > 10$ thì sao ?)

Xin lưu ý rằng : một số bài toán thi học sinh giỏi có thể quy về bài toán 2 trên đây. Thí dụ :

Bài toán 2a – Cho 6 điểm trong mặt phẳng, sao cho bất kì 3 điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác mà các cạnh có chiều dài khác nhau. Chứng minh rằng cạnh nhỏ nhất của một trong các tam giác đó đồng thời cũng là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

(Thi học sinh giỏi Ba Lan, 1976)

Ta chỉ việc tô các cạnh của mỗi tam giác bằng hai màu xanh, đỏ, với yêu cầu *cạnh nhỏ nhất được tô màu đỏ*. Như vậy, không có tam giác nào có các cạnh được tô cùng màu xanh. Từ bài toán 2 (với k = 6), suy ra rằng phải có một tam giác có các cạnh cùng màu đỏ. Cạnh lớn nhất trong tam giác này, vì là cạnh đỏ, nên phải là cạnh nhỏ nhất trong một tam giác khác.

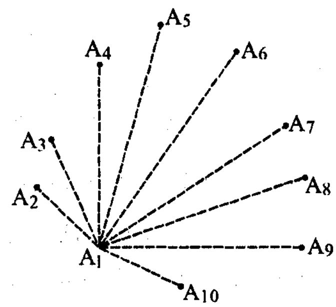
Bài toán 2b – cho 6 đường thẳng trong không gian, trong đó không có 3 đường thẳng nào song song, không có 3 đường thẳng nào đồng quy và không có 3 đường thẳng nào nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng từ 6 đường thẳng đó bao giờ cũng lấy ra được 3 đường thẳng đôi một chéo nhau.

Bài toán này tương tự bài toán trên, nếu ta cho *tương ứng mỗi đường thẳng với một điểm* ; hai đường thẳng chéo nhau thì hai điểm tương ứng được nối với một cạnh màu đỏ, hai đường thẳng không chéo nhau thì hai điểm tương ứng được nối với một cạnh màu xanh. Từ giả thiết của bài toán, suy ra rằng trong 3 đường thẳng bất kì nào (của 6 đường thẳng đã cho) cũng có hai đường thẳng chéo nhau.

Trong giả thiết của bài toán 2, nếu yêu cầu *mỗi đoạn thẳng được tô màu xanh, đỏ hoặc trắng* (một trong ba màu), ta có *bài toán tương tự* sau đây:

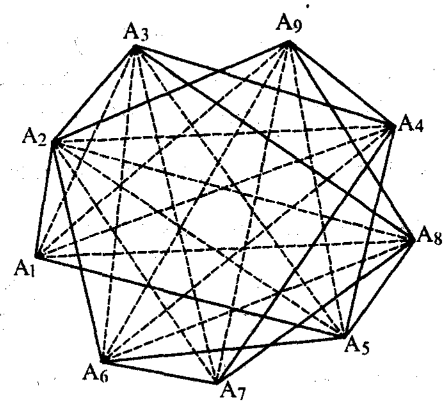
Bài toán 3 – Cho k điểm trong không gian (k > 4), trong đó không có 4 điểm nào nằm trong cùng một mặt phẳng. Tất cả những điểm này được nối nhau từng cặp bằng đoạn thẳng, mỗi đoạn thẳng được tô màu xanh, hoặc đỏ, hoặc trắng. Tìm giá trị nhỏ nhất của n sao cho với mọi cách tô màu n đoạn thẳng tùy ý (trong số các đoạn thẳng đã vẽ), ta đều tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu.

Với $k = 9$, bài toán 3 không có lời giải (không có số n thỏa mãn yêu cầu đề ra) : có thể chỉ ra cách tô màu (xanh, đỏ hoặc trắng) cả 36 cạnh mà không một tam giác nào có các cạnh cùng màu.



Hình 9

Có mối quan hệ khá lí thú sau đây : bài toán 3 rất dễ với k = 10. Có thể tô màu tất cả 45 cạnh (khi k = 10) theo quy tắc sau : qua mỗi đỉnh A_i (i = 1, ..., 10), tô *bốn cạnh màu đỏ* là A_iA_{i+1}, A_iA_{i+4}, A_iA_{i+6} và A_iA_{i+9} : *bốn cạnh màu xanh* là A_iA_{i+2}, A_iA_{i+3}, A_iA_{i+7} và A_iA_{i+8} ; *một cạnh màu trắng là* A_iA_{i+5} (tính i + m theo mod tức là lấy số dư của i + m thí dụ 7 + 4 = 11, 6 +7 = 13). Hình 9 chỉ rõ việc tô màu với các cạnh qua A_1 (cạnh màu đỏ : nét liền ; cạnh màu xanh : nét đứt ; cạnh màu trắng : nét chấm). Dễ thấy rằng với cách tô màu đó (cho tất cả 45 cạnh) không có tam giác nào có các cạnh cùng màu.



Hình 10

Đến đây, chỉ việc *bỏ bớt một đỉnh* (A_{10}) *và bỏ tất cả các cạnh qua đỉnh đó*, ta được cách tô màu chứng minh rằng bài toán 3 không có lời giải với k = 9. Chú ý rằng trong cách tô màu này chỉ có 4 cạnh màu trắng (vì đã bỏ một cạnh trắng $A_{10}A_5$), nên đó cũng *là cách tô màu (đỏ hoặc xanh) 32 cạnh (nối 9 đỉnh), trong đó không có tam giác nào có các cạnh cùng màu* (h.10), trong đó không nối 4 cạnh A_1A_6, A_2A_7, A_3A_8, A_4A_9).

Có thể chứng minh rằng cách tô màu trong hình 10 không khác cách tô màu trong hình 8. Nhưng kết quả đó được tìm ra qua hai đường khác nhau : nhờ giải các *bài toán đặc biệt đơn giản hơn* (với 5, 6, 7 điểm) hoặc nhờ *bài toán tương tự* (tô ba màu).

Bài toán 3 sẽ khó hơn nhiều khi ta cho *k* một giá trị lớn hơn 10. *Bạn hãy thử giải bài toán với k = 19 (điểm).* Muốn vậy, trước hết có lẽ bạn phải *dựa vào kết quả và cách giải bài toán 2*, với k = 6, để giải bài toán sau:

Bài toán 4 – Cho 17 điểm trong không gian trong đó không có 4 điểm nào nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng nếu tô màu đỏ, xanh hoặc trắng tất cả các đoạn thẳng nối từng cặp điểm đã cho thì bao giờ cũng có một tam giác có các cạnh cùng màu. (đây là dạng phát biểu khác của một đề thi toán quốc tế năm 1964).

Để hiểu sâu hơn về các bài toán trên đây, bạn có thể tìm đọc về *lí thuyết graph* (đồ thị) mà báo *Toán học và tuổi trẻ* đã vài lần giới thiệu.

BÀN VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN MINH HÀ
ĐHSP Hà Nội

Trong tam giác có một bất đẳng thức rất quen thuộc.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, M là một điểm trong tam giác. Chứng minh rằng:

$$MA + MB + MC < AB + BC + CA \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh rất đơn giản. Tuy nhiên (1) không "mạnh". Kết quả sau đây là sự làm "mạnh" thực chất của (1).

Bài toán 2. Cho ΔABC, M là một điểm trong tam giác. Chứng minh rằng:

$$MA + MB + MC < \max\{AB + AC ; BC + BA ; CA + CB\} \qquad (2)$$

Bài toán 2 có một lời giải khá ngắn gọn và đặc sắc. Tuy nhiên, lời giải sau đây có ý nghĩa hơn. Trước hết ta hãy chứng minh một bổ đề:

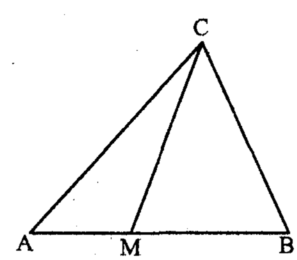
Bổ đề 1. Trong không gian cho dãy điểm $\{X_i\}_{i=1}^n$ và dãy số dương $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, AB là một đoạn thẳng cho trước. M là một điểm trên AB, thế thì:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MX_i \le \max\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i AX_i ; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i BX_i\right\} \qquad (*)$$

Nếu tồn tại i ∈ { 1, 2, ..., n} sao cho X_i không thuộc đường thẳng AB thì dấu bằng không thể xảy ra trong bất đẳng thức trên.

Chứng minh:

Với mỗi i ∈ { 1, 2, ..., n} ta có:



$$MB.\overrightarrow{MA} + MA.\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow MB(\overrightarrow{MX_i} + \overrightarrow{X_iA}) + MA(\overrightarrow{MX_i} + \overrightarrow{X_iB}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (MB + MA)\overrightarrow{MX_i} + MB\overrightarrow{X_iA} + MA\overrightarrow{X_iB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow AB\overrightarrow{MX_i} = MB.\overrightarrow{AX_i} + MA.\overrightarrow{BX_i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MX_i} = \frac{MB}{AB}\overrightarrow{AX_i} + \frac{MA}{AB}\overrightarrow{BX_i}$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MX_i}\right| = \left|\frac{MB}{AB}\overrightarrow{AX_i} + \frac{MA}{AB}\overrightarrow{BX_i}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MX_i}\right| \le \frac{MB}{AB}\left|\overrightarrow{AX_i}\right| + \frac{MA}{AB}\left|\overrightarrow{BX_i}\right|$$

$$\Rightarrow \alpha_i MX_i \le \frac{MB}{AB}\alpha_i\ AX_i + \frac{MA}{AB}\alpha_i\ BX_i$$

Từ đó suy ra:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i MX_i \le \frac{MB}{AB}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i AX_i + \frac{MA}{AB}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i BX_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i MX_i \le \frac{MB + MA}{AB}\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i AX_i;\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i BX_i\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i MX_i \le \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i AX_i;\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i BX_i\right\}$$

Nếu $\exists\ i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho X_i không thuộc đoạn thẳng AB thì ta có bất đẳng thức thực sự

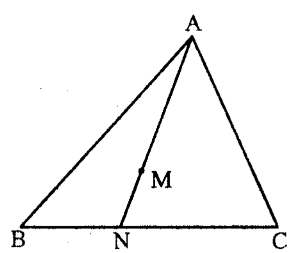
$$MX_{i_0} < \frac{MB}{AB}AX_{i_0} + \frac{MA}{AB}BX_{i_0}$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức thực sự

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i MX_i < \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i AX_i;\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i BX_i\right\}$$

Nhờ bổ đề 1 ta chứng minh (2) như sau:

Với mỗi điểm X trên mặt phẳng tam giác ta đặt f(X) = XA + XB + XC. Áp dụng (*) cho dãy điểm { A ; B ; C} ; dãy số {1 ; 1 ; 1} và đoạn thẳng AN ta có : f(M) < max{ f(A) ; f(N)}.



Áp dụng (*) cho dãy điểm { A ; B ; C} ; dãy số {1 ; 1 ; 1} và đoạn thẳng BC ta có :

f(N) < max{ f(B) ; f(C)}.

Suy ra : f(M) < max{ f(A) ; f(B) ; f(C)}.

$$\Rightarrow MA + MB + MC < \max\{AB + AC;\ BC + BA;\ CA + CB\}.$$

Bài toán sau đây là sự tương tự không gian của bài toán 2.

Bài toán 3. Cho tứ diện ABCD. M là một điểm trong tứ diện. Đặt:

$$\begin{cases} d_A = AB + AC + AD \\ d_B = BC + BD + BA \\ d_C = CD + CA + CB \\ d_D = DA + DB + DC \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$MA + MB + MC + MD < max\{d_A \; ; d_B \; ; d_C \; ; d_D\} \qquad (3)$$

(3) được chứng minh dễ dàng nhờ việc áp dụng (*) cùng với lí luận tương tự như khi chứng minh (2). Bài toán 2 còn có sự tương tự không gian khác.

Bài toán 4. Cho tứ diện ABCD. M là một điểm trong tứ diện. Đặt :

$$\begin{cases} \Sigma_A = S_B + S_C + S_D \\ \Sigma_B = S_C + S_D + S_A \\ \Sigma_C = S_D + S_A + S_B \\ \Sigma_D = S_A + S_B + S_C \end{cases}$$

(Trong đó S_A ; S_B ; S_C ; S_D theo thứ tự là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A ; B ; C ; D).

Chứng minh rằng:

$$S(MAB) + S(MAC) + S(MAD) + S(MBC) + S(MCD) + S(MDB)$$
$$< max\{\Sigma_A \; ; \Sigma_B \; ; \Sigma_C \; ; \Sigma_D\} \qquad (4)$$

Chứng minh (4) rất khó. Tuy nhiên, ta vẫn có thể chứng minh được nó nhờ ý tưởng có được trong khi chứng minh (2). Ta cũng lại chứng minh một bổ đề.

Bổ đề 2: Trong không gian cho dãy đoạn thẳng $\{X_iY_i\}_{i=1}^n$ và dãy số dương $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$. AB là một đoạn thẳng cho trước. M là một điểm thuộc AB. Thế thì:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(MX_iY_i) \le max\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(AX_iY_i); \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(BX_iY_i)\right\} \qquad (**)$$

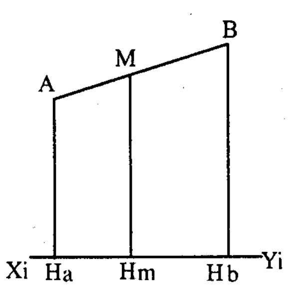
Nếu tồn tại $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $X_{i_0}Y_{i_0}$ và AB chéo nhau thì dấu bằng không thể xảy ra trong bất đẳng thức trên.

Chứng minh: $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ta có:

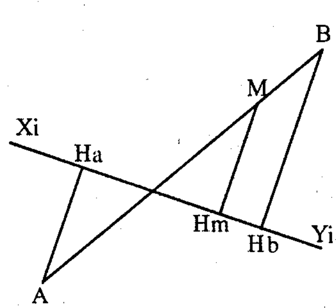
$$S(MX_iY_i) \le \frac{MB}{AB} S(AX_iY_i) + \frac{MA}{AB} S(BX_iY_i)$$

Thật vậy, nếu hai đường thẳng X_iY_i và AB không chéo nhau thì có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau (xem hình vẽ)

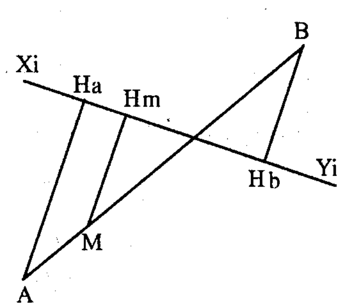
Trong các hình vẽ trên H_a ; H_b ; H_m theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A ; B ; M xuống X_iY_i .



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Trên hình 1 ta có :

$$MH_m = \frac{MB}{AB}AH_a + \frac{MA}{AB}BH_b$$

Trên (h.2) ta có :

$$MH_m = -\frac{MB}{AB}AH_a + \frac{MA}{AB}BH_b$$

Trên (h.3) ta có :

$$MH_m = \frac{MB}{AB}.AH_a - \frac{MA}{AB}BH_b$$

Tóm lại trong cả ba khả năng ta đều có :

$$MH_m \le \frac{MB}{AB}.AH_a + \frac{MA}{AB}BH_b$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}MH_m.X_iY_i \le \frac{MB}{AB}.\frac{1}{2}AH_a.X_iY_i + \frac{MA}{AB}.\frac{1}{2}BH_b.X_iY_i$$

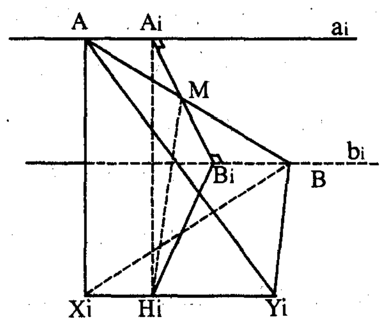
$$S(MX_iY_i) \le \frac{MB}{AB}S(AX_iY_i) + \frac{MA}{AB}S(BX_iY_i)$$

Nếu các đường thẳng X_iY_i và AB chéo nhau (xem hình vẽ)

Qua A ; B theo thứ tự kẻ các đường thẳng a_i ; b_i song song với X_iY_i .

Qua M dựng mặt phẳng P_i vuông góc với X_iY_i . P_i theo thứ tự cắt a_i ; b_i ; X_iY_i tại A_i ; B_i ; H_i. Tương tự như phép chứng minh bổ đề 1. Ta có :

$$H_iM \le \frac{MB_i}{A_iB_i}.H_iA + \frac{MA_i}{A_iB_i}.H_iB$$



Từ đó theo định lí Talét ta có :

$$H_iM \le \frac{MB}{AB}.H_iA + \frac{MA}{AB}.H_iB$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}H_iMX_iY_i \le \frac{MB}{AB}\frac{1}{2}H_iA.X_iY_i + \frac{MA}{AB}\frac{1}{2}H_iB.X_iY_i$$

$$\Rightarrow S(MX_iY_i) \le \frac{MB}{AB}\frac{1}{2}S(AX_iY_i) + \frac{MA}{AB}\frac{1}{2}S(BX_iY_i)$$

Tóm lại : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ta đều có

$$S(MX_iY_i) \le \frac{MB}{AB}S(AX_iY_i) + \frac{MA}{AB}S(BX_iY_i)$$

$$\Rightarrow \alpha_iS(MX_iY_i) \le \frac{MB}{AB}\alpha_iS(AX_iY_i) + \frac{MA}{AB}\alpha_iS(BX_iY_i)$$

Từ đó suy ra :

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iS(MX_iY_i) \le \frac{MB}{AB}\sum_{i=1}^{n}\alpha_iS(AX_iY_i) + \frac{MA}{AB}\sum_{i=1}^{n}\alpha_iS(BX_iY_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_iS(MX_iY_i) \le \frac{MB+MA}{AB}\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_iS(AX_iY_i);\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_iS(BX_iY_i)\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_iS(MX_iY_i) \le max\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_iS(AX_iY_i);\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_iS(BX_iY_i)\right\}$$

Nếu $\exists\ i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho các đường thẳng X_iY_i và AB chéo nhau thì H_{i_0} không thuộc AB nên ta có bất đẳng thức thực sự:

$$H_{i_0}M < \frac{MB_{i_0}}{A_{i_0}B_{i_0}}H_{i_0}A + \frac{MA_{i_0}}{A_{i_0}B_{i_0}}H_{i_0}B$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức thực sự:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i S(MX_iY_i) < max\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i S(AX_iY_i);\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i S(BX_iY_i)\right\}$$

Nhờ bổ đề 2 cùng với cách lí luận như khi chứng minh (2) ta dễ dàng chứng minh được (4). Việc thực hiện chi tiết xin dành cho bạn đọc.

Ngoài các bài toán 3 và 4, bài toán 2 còn có một số sự tương tự không gian khác nữa. Tuy nhiên, tính đúng đắn của nó chưa được kiểm tra.

Bài toán 5 : Cho góc tam diện Oxyz ; Ot là một tia nằm trong góc tam diện.

Đặt : $\alpha = \widehat{yOz}$; $\beta = \widehat{zOx}$; $\gamma = \widehat{xOy}$

Chứng minh rằng:

$$\widehat{tOx} + \widehat{tOy} + \widehat{tOz} < \max\{\alpha + \beta\ ;\ \beta + \gamma\ ;\ \gamma + \alpha\} \qquad (5)$$

Mong rằng một dịp nào đó chúng ta sẽ trở lại vấn đề tính đúng đắn của bài toán 5.

Để kết luận, xin lưu ý rằng : các bổ đề 1 và 2 còn có hiệu lực trong việc giải nhiều bài toán khác. Xin nêu ra đây một số bài xem như bài tập.

1) Cho tam giác đều ABC với cạnh bằng α, β ; γ là ba số dương : M là một điểm trong tam giác. Chứng minh rằng

$$\alpha MA + \beta MB + \gamma MC < max\{\alpha + \beta\ ;\ \beta + \gamma\ ;\ \gamma + \alpha\}.$$

2) Cho Δ ABC nhọn. I, J, K theo thứ tự là chân các đường cao hạ từ A ; B ; C. M là một điểm trong Δ IJK. Chứng minh rằng:

$$MA + MB + MC < max\{AI + BC\ ;\ BJ + CA\ ;\ CK + AB\}.$$

3) Cho hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1 ; M là một điểm trong hình lập phương. Chứng minh rằng:

$$MA + MB + MC + MD + MA_1 + MB_1 + MC_1 + MD_1 < 9$$

4) Cho tứ diện ABCD. M là một điểm trong tứ diện. Đặt

$$S_A^* = AB.S_B + AC.S_C + AD.S_D\ ; \qquad S_B^* = BC.S_C + BD.S_D + BA.S_A$$
$$S_C^* = CD.S_D + CA.S_A + CB.S_B\ ; \qquad S_D^* = DA.S_A + DB.S_B + DC.S_C$$

Chứng minh rằng :

$$AB.S(MCD) + AC.S(MOB) + AD.S(MBC) + BC.S(MDA) +$$
$$+ CD.S(MBA) + DB.S(MCA) < max\{S_A^*\ ;\ S_B^*\ ;\ S_C^*\ ;\ S_D^*\}$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI CÁC ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

BÙI TÁ LONG
TP Hồ Chí Minh

1. Mở đầu

Trong bài báo này, tôi muốn trao đổi với các bạn một số bài toán liên quan tới các đường phân giác trong tam giác.

Trước tiên, chúng ta cùng thỏa thuận một số ký hiệu quen thuộc : ABC là tam giác đã cho, S_{ABC} – là diện tích của tam giác ABC, BC = a, CA = b, AB = c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC, 2p = a + b + c là chu vi của tam giác, O – là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, R – là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, I_a – là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC ứng với đỉnh A.

Ta có các tính chất quen thuộc sau đây về đường phân giác trong của tam giác ABC.

Tính chất 1 : *Giả sử đường phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại điểm A', khi đó.*

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

(xem chứng minh trong SGK Hình học 8).

Tính chất 2 : *Giả sử đường phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại A'. Khi đó*

$$BA' = \frac{ac}{(b+c)} \,;\, CA' = \frac{ab}{(b+c)}$$

Chứng minh : Theo tính chất 1 : $\frac{BA'}{CA'} = \frac{c}{b}$. Cộng 1 vào cả hai vế của đẳng thức này ta nhận được

$$\frac{BC}{CA'} = \frac{(b+c)}{b} \text{ hay } CA' = \frac{ab}{(b+c)} \text{ và } BA' = BC - CA' = \frac{ac}{(b+c)}$$

Tính chất 3. *Giả sử đường phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại A'. Khi đó*

$$AA' = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{(b+c)}$$

Chứng minh:

$$S_{ABC} = S_{ABA'} + S_{ACA'}$$

$$\text{hay } \left(\frac{1}{2}\right)AB.AC.\sin A = \left(\frac{1}{2}\right).AB.AA'\sin\left(\frac{A}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)AC.AA'\sin\frac{A}{2}.$$

Từ đó suy ra $AA' = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{(b+c)}$

II - Ứng dụng các kết quả trong phần I vào một số bài toán

Sử dụng các tính chất 1, 2, 3 trong phần I ta sẽ giải một số bài toán sau:

Bài toán 1 : *Trong tam giác ABC ta dựng các đường phân giác trong, giao điểm A', B', C' của chúng với các cạnh đối diện tạo thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng*

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Giải : Theo tính chất 1 ta có

$$AB' = \frac{bc}{(a+c)};\quad AC' = \frac{bc}{(a+b)}$$

Từ đó suy ra

$$S_{AB'C'} = \left(\frac{1}{2}\right)AB'.AC'\sin A = \frac{bc}{(a+c)}.\frac{bc}{(a+c)}.\frac{S_{ABC}}{bc}$$

Hay

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{bc}{(a+c)(a+b)} \qquad (1)$$

Tương tự ta có

$$\frac{S_{BA'C'}}{S_{ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)} \qquad (2)$$

$$\frac{S_{CA'B'}}{S_{ABC}} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BA'C'}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CA'B'}}{S_{ABC}} =$$

$$= 1 - \frac{bc}{(a+c)(a+b)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} =$$

$$= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad \text{(đpcm)}$$

Từ bài toán 1 ở trên ta suy ra

Bài toán 2. (Thi vô địch CHDC Đức – 1981)

Trong tam giác ABC ta dựng các đường phân giác trong AA', BB', CC'. Chứng minh rằng

$$S_{A'B'C'} \le \frac{S}{4}$$

Giải. Thực vậy, theo bài toán 1 ta có

$$S_{A'B'C'} = \frac{2abcS}{(a+b)(b+c)(c+a)} \qquad (4)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương a, b, c ta có

$a + b \ge 2\sqrt{ab}$, $b + c \ge 2\sqrt{bc}$, $a + c \ge 2\sqrt{ac}$. Kết hợp với (4) ta nhận được

$$S_{A'B'C'} \le \frac{S}{4} \quad \text{(đpcm)}$$

Bài toán 3: (Bài thi toán Quốc tế lần thứ 32 tại Thụy Điển). *Cho tam giác ABC và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Các đường phân giác trong của các góc A, B, C lần lượt cắt các cạnh đối diện tại A', B', C'. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{4} < \frac{(AI\,.\,BI\,.\,CI)}{(AA'\,.\,BB'\,.\,CC')} \le \frac{8}{27}$$

Giải : Theo tính chất 3 ta có

$$AA' = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \tag{5}$$

Ngoài ra

$$AI = \frac{AP}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{(b+c-a)}{2\cos\frac{A}{2}} \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{(b+c)(b+c-a)}{4bc\cos^2\frac{A}{2}} \tag{7}$$

Theo định lý hàm Cosin ta có

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$$

Hay $\quad 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} \qquad (8)$

Kết hợp (7) và (8) ta nhận được

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{(b+c)}{(a+b+c)} \tag{9}$$

Tương tự $\quad \frac{BI}{BB'} = \frac{(a+c)}{(a+b+c)} \qquad (10)$

$$\frac{CI}{CC'} = \frac{(a+b)}{(a+b+c)} \tag{11}$$

Từ (9), (10), (11) suy ra

$$\left(\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\right) = \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+b+c)^3}$$

Bây giờ, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+b+c)^3} > \frac{1}{4}$$

Thực vậy, bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức

$$4(a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 2acb) >$$
$$> a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

Đơn giản cả hai vế ta nhận được bất đẳng thức

$$a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) + 2abc > a^3 + b^3 + c^3 \qquad (12)$$

Theo bất đẳng thức tam giác

$$b + c > a,\quad a + c > b,\quad a + b > c.$$

Từ đó ta suy ra (12)

Để chứng minh

$$\frac{(a + b)(a + c)(b + c)}{(a + b + c)^3} \le \frac{8}{27},$$

ta áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\frac{(a + b)(a + c)(b + c)}{(a + b + c)^3} = \left(1 - \frac{c}{(a + b + c)}\right)\left(1 - \frac{b}{(a + b + c)}\right)\left(1 - \frac{a}{(a + b + c)}\right)$$

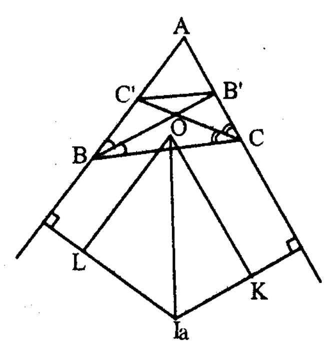
$$\le \left\{\frac{3 - \frac{a}{(a+b+c)} - \frac{b}{(a+b+c)} - \frac{c}{(a+b+c)}}{3}\right\}^3 = \frac{8}{27}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều

Bài toán 4. *Giả sử BB' và CC' là các đường phân giác trong của các góc B và C ; O, I_a lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, bàng tiếp ứng với đỉnh A, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

Chứng minh rằng

$$B'C' = \frac{abc.\, OI_a}{[(a + b)(a + c)R]}$$



Giải : Qua O ta dựng hai đường thẳng song song với AB và AC cắt các đường thẳng vuông góc hạ từ I_a xuống AB, AC tương ứng tại L và K

Ta có $\widehat{B'AC'} = \widehat{LOK}$ (13)

Theo tính chất 2 có

$$AB' = \frac{bc}{(a + c)};\quad AC' = \frac{bc}{(a + b)}$$

Ngoài ra, không khó khăn lắm thấy rằng

$$OL = p - \frac{c}{2} = \frac{(a + b)}{2},\quad OK = p - \frac{b}{2} = \frac{(a + c)}{2}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{AB'}{OL} = \frac{AC'}{OK} = \frac{2bc}{(a + c)(a + b)} \qquad (14)$$

Kết hợp (13) (14) ta nhận được $\Delta\, AB'C' \sim \Delta OLK$

Do OI_a là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔOLK cho nên

$$LK = I_aO\sin(180^0 - A) = I_aO\sin A.$$

Từ đó

$$B'C' = \left[\frac{2bc}{(a + c)(a + b)}\right]LK = \frac{(2bcI_aO\sin A)}{(a + c)(a + b)} = \frac{abcI_aO}{(a + c)(a + b)R}\ \text{(đpcm).}$$

PHÂN HOẠCH TAM GIÁC CỦA MỘT ĐA GIÁC

NGUYỄN VĂN MẬU
ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội

Trong hình học, ngoài các bài toán truyền thống mang tính chất định hình và định tính sâu sắc (dựa vào các đặc trưng hình học cơ bản được phát biểu thành các định lí hình học) còn có những bài toán kiểu ghép hình và chia hình mang một nội dung khác. Phương pháp khảo sát các loại toán này thường dựa trên một vài đặc tính rất riêng biệt và rất đơn giản, có khi chỉ là những suy luận lôgic hình thức tưởng như không có gì liên quan tới hình học như các nguyên lí Dirichle, tiêu chuẩn chia hết của một số tự nhiên cho một số nguyên cho trước, ...

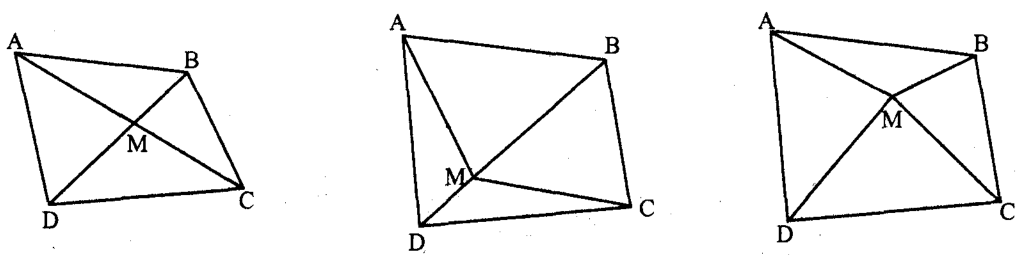
Các bài toán ghép hình và chia hình có thể xem như là những bài toán sơ đẳng của hình học tổ hợp. Trong bài này, chúng ta sẽ xem xét một số tính chất đơn giản của một bài toán phân hoạch đa giác (lồi, phẳng) thành các tam giác bằng một hệ thống điểm cho trước trong đa giác đó. Đối với một đa giác K cho trước, kí hiệu K là tập hợp tất cả các điểm trong của K. Ta nói điểm M ∈ K nếu M ∈ K hoặc M là điểm biên của K. Để tránh sự vi phạm những khái niệm cơ bản của hình học, ta không coi ba điểm thẳng hàng là một tam giác.

Ví dụ1: Cho tứ giác ABCD và điểm M là điểm trong của tứ giác. Khi đó có ba khả năng.

i) M không nằm trên AC và BD

ii) M nằm trên AC và ở ngoài BD (hoặc ngược lại)

iii) M nằm trên AC và BD



Trường hợp i) chứa 4 tam giác trong phân hoạch.

Trường hợp ii) chứa 4 tam giác và một "tam giác" suy biến BMD trong phân hoạch.

Trường hợp iii) chứa 4 tam giác và 2 "tam giác" suy biến AMC; BMD.

Vì vậy, trong 3 trường hợp này, đều nhận được 4 tam giác phân biệt trong phân hoạch.

Định nghĩa 1**:** Cho trước đa giác K (phẳng, lồi) và k điểm $M_j \in K$ ($j = 1, 2, \ldots, k$).

Khi đó ta nói K được phân hoạch tam giác theo bộ điểm $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$ nếu K được chia thành các tam giác thỏa mãn các điều kiện sau:

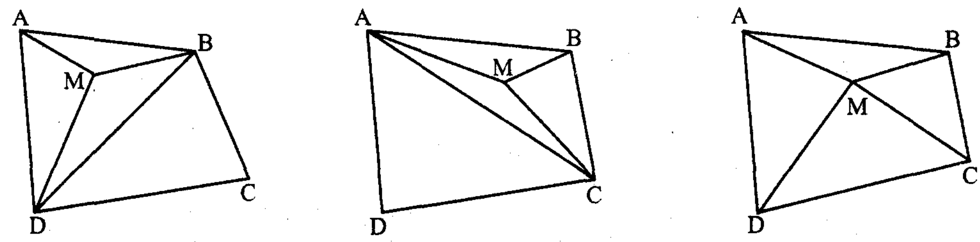
a) Mỗi đỉnh của tam giác là một trong các điểm đã cho hoặc là đỉnh của K.

b) Mọi đỉnh của đa giác và mọi điểm đã cho đều là đỉnh của một tam giác nào đó.

c) Không có đỉnh của tam giác là điểm trong của một cạnh của một tam giác khác.

d) Các tam giác là rời nhau, tức là phần trong của chúng không chứa điểm chung.

Như vậy, các tam giác suy biến không được tính trong phân hoạch vì vi phạm điều kiện c).



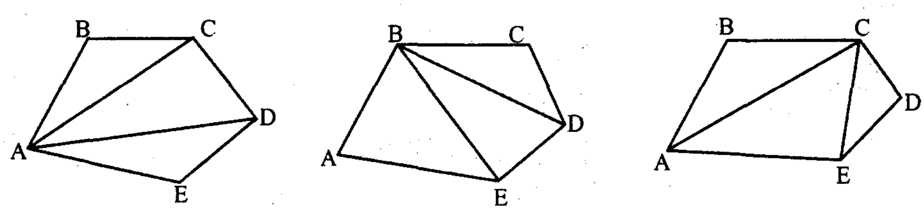
Ở ví dụ 1, trong cả ba trường hợp đều có 4 tam giác trong phân hoạch. Rõ ràng, với một bộ điểm cho trước, có thể có nhiều cách phân hoạch khác nhau thỏa mãn định nghĩa 1. Chẳng hạn, trong ví dụ 1, đối với trường hợp i) sẽ có các cách phân hoạch sau:

(Còn đối với các trường hợp ii) và iii) thì sẽ có tương ứng 2 và 1 cách phân hoạch). Do đó, số cách phân hoạch tam giác phụ thuộc vào vị trí tương đối của các điểm của bộ điểm đã cho đối với đa giác K. Ngay cả khi tập hợp các điểm cho trước trong đa giác là tập rỗng thì vẫn có thể có nhiều cách phân hoạch.

Ví dụ 2: Với ngũ giác ABCDE ta có 5 cách phân hoạch tam giác (ứng với việc kẻ các đường chéo của ngũ giác xuất phát từ đỉnh A, B, C, D, E).

Quan sát hai vị trí trên, ta nhận thấy rằng phép phân hoạch tam giác của một tứ giác theo một điểm và của một ngũ giác (theo tập rỗng) chia đa giác thành các tam giác khác nhau, song số lượng các tam giác trong mỗi phân hoạch đều như nhau.

(Trong ví dụ 1 ta nhận được 4 tam giác, trong ví dụ 2 có 3 tam giác). Điều này, cũng đúng cho trường hợp tổng quát.



Bài toán 1. Cho n – giác K ($n \geq 3$). Khi đó số tam giác trong mỗi phân hoạch (tam giác) của K đều bằng $n - 2$.

Đây là bài toán giản đơn đối với chương trình phổ thông cơ sở. Vì tổng các góc trong của n – giác K bằng $(n-2)180^0$ nên nếu số tam giác trong một phân hoạch là k thì tổng các góc trong của k tam giác này bằng $k.180^0$. Do vậy : $k.180^0 = (n-2)180^0$ hay $k = n - 2$

Bài toán 2. Cho tam giác K và m điểm phân biệt trong K. Khi đó, trong mỗi phân hoạch của K đều có $s = 2m + 1$ tam giác.

Thật vậy, nếu có s tam giác thì tổng các góc trong của chúng bằng $s.180^0$. Vậy:

$s.180^0 = 180^0 + m.360^0$ hay $s = 1 + 2m$.

Hoàn toàn tương tự theo cách giải trên, ta có kết quả : Với n – giác K và m điểm trong K thì số tam giác trong mỗi phân hoạch của K theo m điểm đó bằng

$$s = n - 2 + 2m \qquad (1)$$

Tuy nhiên, ở đây, chúng ta không đề cập đến sự tồn tại của phân hoạch tam giác của n – giác K theo bộ m điểm, trong K (Xin bạn đọc tự chứng minh sự tồn tại của phép phân hoạch).

Từ đẳng thức (1), nếu ta gọi các cạnh của tam giác trong một phân hoạch là "cạnh trong" khi cạnh đó không trùng với cạnh của n – giác K cho trước, thì sẽ có

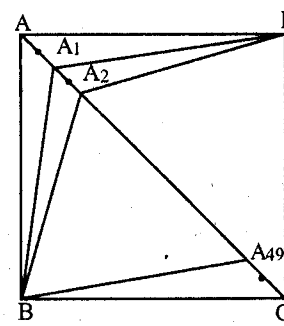
Hệ quả: Số các cạnh trong mỗi phân hoạch của n – giác K theo bộ m điểm trong K là một hằng số và bằng 2m – 2 (không phụ thuộc vào n).

Bài toán 3. Chứng minh rằng với 49 điểm tùy ý trong hình vuông cạnh bằng 1, trong mỗi phân hoạch hình vuông theo 49 điểm đó, đều tồn tại ít nhất một tam giác có diện tích $\le \frac{1}{100}$.

Giải: Theo đẳng thức (1), thì số tam giác trong mọi phân hoạch bằng

$$s = 4 - 2 + 2.49 = 100.$$

Do vậy, kết luận của bài toán là hiển nhiên.



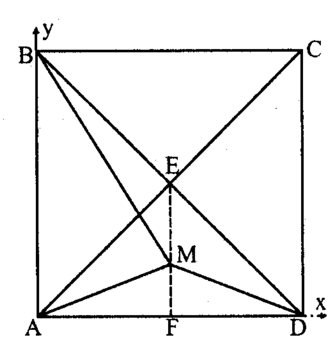
Nhận xét rằng số 49 là số nhỏ nhất để bài toán 3 đúng. Thật vậy, xét 49 điểm chia một đường chéo của hình vuông thành 50 phần bằng nhau (xem hình vẽ), thì mọi tam giác BA_iA_{i+1}, DA_iA_{i+1} ($i = 0, 1, \ldots, 49$; $A_0 = A$; $A_{50} = C$) đều có diện tích bằng $\frac{1}{100}$.

Nhận xét rằng, nếu trong định nghĩa 1 loại bỏ điều kiện c) thì trong mỗi phân hoạch cần liệt kê thêm các tam giác suy biến (tam giác có ba điểm nằm trên một đường thẳng (xem ví dụ 1)). Trong trường hợp này, phương pháp giải các bài toán tương tự như bài toán 3 sẽ không còn đơn giản ngay cả khi số điểm cho trước trong tam giác không nhiều.

Bài toán 4. Cho hình vuông ABCD có diện tích bằng 1. Hãy xác định số dương a nhỏ nhất sao cho với mọi điểm M trong hình vuông đều tìm được ít nhất một tam giác có đỉnh là M và 2 đỉnh kia là đỉnh của hình vuông ABCD với diện tích ≤ a.

Giải : Gọi E là tâm của hình vuông, F là trung điểm của AD. Vì E là tâm đối xứng của hình vuông nên chỉ cần xét M thuộc ΔEAD. Vì đường thẳng chứa EF là trục đối xứng nên chỉ cần xét điểm M trên EF. Từ đó, chọn M trên EF để s(MBD) = s(MAD) và ta thu được M là trung điểm của EF. Khi đó lấy $a = S_{MAD} = \frac{1}{8}$. (các kết quả trên dễ dàng kiểm tra nếu ta đặt hình vuông.

Trong hệ trục tọa độ vuông góc A(0, 0), B(0, 1), C(1, 1) và D(1, 0)).



Rõ ràng giá trị $a = \frac{1}{8}$ vẫn còn đúng cho trường hợp có hai điểm trong hình vuông.

Tuy nhiên, nếu số điểm là 3, 4 hoặc 5 và đỉnh của các tam giác trong phân hoạch là các điểm đã cho và 4 điểm tùy ý cố định trong hình vuông (thay cho 4 đỉnh hình vuông) thì các tính toán trở nên rất phức tạp.

MỞ RỘNG MỘT KẾT QUẢ CỦA TORICELLI

NGUYỄN MINH HÀ
ĐHSP Hà Nội

Trong tam giác có một bài toán kinh điển:

Bài toán 1: *Cho tam giác ABC. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho tổng (MA + MB + MC) nhỏ nhất.*

Bài toán 1 đã được nhà toán học Toricelli giải và kết quả cụ thể như sau: Nếu $\max\{\hat{A};\ \hat{B};\ \hat{C}\} < 120^0$ thì tổng (MA + MB + MC) nhỏ nhất khi $\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 120^0$

Nếu $\hat{A} \geq 120^0$ thì tổng (MA + MB + MC) nhỏ nhất khi M trùng A

Nếu $\hat{B} \geq 120^0$ thì tổng (MA + MB + MC) nhỏ nhất khi M trùng B

Nếu $\hat{C} \geq 120^0$ thì tổng (MA + MB + MC) nhỏ nhất khi M trùng C

Bài toán 1 có sự mở rộng tất yếu

Bài toán 2: *Cho tam giác ABC và ba số dương x, y, z. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm Msao cho tổng (xMA +yMB +zMC) nhỏ nhất.*

Bài toán 2 đã được đề cập trong một vài tài liệu

Tuy nhiên, chưa có tài liệu nào cho một lời giải tường minh. Bài báo này xin giới thiệu một lời giải như vậy. Trước hết xin phát biểu không chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề: Cho tam giác ABC. M là một điểm trong không gian. Khi đó:

1. Nếu M không thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ba số BC. MA ; CA. MB; AB. MC là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

2. Nếu M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì trong ba số $BC.MA$; $CA.MB$; $AB.MC$ có một số bằng tổng hai số còn lại. Cụ thể

a) Nếu M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A) thì:

$$BC.MA = CA.MB + AB.MC$$

b) Nếu M thuộc cung $\overset{\frown}{CA}$ (không chứa B) thì:

$$CA.MB = AB.MC + BC.MA$$

c) Nếu M thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ (không chứa C) thì:

$$AB.MC = BC.MA + CA.MB$$

Bổ đề trên là sự phát biểu chi tiết bất đẳng thức nổi tiếng Ptôlêmê.

Trở lại việc giải bài toán 2 :

A - Trường hợp $\left[\begin{array}{l} y + z \leq x \\ z + x \leq y \\ x + y \leq z \end{array}\right.$

Chẳng hạn : $y + z \le x$

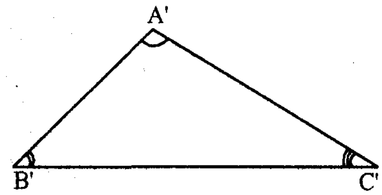
Ta có : $xMA + yMB + zMC \ge (y + z)MA + yMB + zMC =$

$= y(MA + MB) + z(MA + MC) \ge yAB + zAC$

Đẳng thức xẩy ra $\Leftrightarrow$ M trùng A.

Vậy : (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M trùng A và giá trị nhỏ nhất đó bằng : yAB + zAC.

B - Trường hợp $\begin{cases} y + z > x \\ z + x > y \\ x + y > z \end{cases}$



Hình 1

Khi đó tồn tại $\Delta A'B'C'$ thỏa mãn điều kiện :

$B'C' = x$; $C'A' = y$, $A'B' = z$ (h.1)

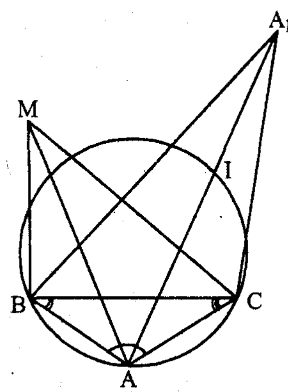
I. Nếu

$\max\left\{\widehat{A} + \widehat{A'} \; ; \; \widehat{B} + \widehat{B'} \; ; \; \widehat{C} + \widehat{C'}\right\} < 180^0$

Về phía ngoài ΔABC ta dựng ΔA_1BC đồng dạng với $\Delta A'B'C'$ (h.2). Gọi I là giao (khác A_1) của đường thẳng AA_1 với đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BC.

Vì $\quad \widehat{A} + \widehat{A'} < 180^0 \Rightarrow \widehat{A} < 180^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{BAC} < 180^0 - \widehat{BA_1C} \Rightarrow$



Hình 2

A không thuộc hình tròn ngoại tiếp $\Delta A_1BC \Rightarrow$ I thuộc đoạn thẳng AA_1 (1)

Vì :

$$\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{B'} < 180^0 \\ \widehat{C} + \widehat{C'} < 180^0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABA_1} < 180^0 \\ \widehat{ACA_1} < 180^0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ I thuộc cung $\widehat{BC}$ (không chứa A_1) của đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BC (2)

Từ (1) và (2) ta thấy : I đồng thời thuộc đoạn AA_1 và cung $\widehat{BC}$ (không chứa A_1) của đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BC.

Hơn thế, bạn đọc có thể thấy : I thuộc ΔABC và :

$$\begin{cases} \widehat{BIC} = 180^0 - \widehat{A'} \\ \widehat{CIA} = 180^0 - \widehat{B'} \\ \widehat{AIB} = 180^0 - \widehat{C'} \end{cases}$$

Lấy điểm M bất kì ta có :

$$xMA + yMB + zMC = B'C'.MA + C'A'.MB + A'B'.MC$$

$$= B'C'.MA + \frac{B'C'}{BC}.CA_1.MA + \frac{B'C'}{BC}.A_1B.MC$$

$$= B'C'\left(MA + \frac{CA_1.MB + A_1B.MC}{BC}\right)$$

Áp dụng bổ đề cho ΔA_1BC và điểm M ta có :

$$xMA + yMB + zMC \geq B'C'\left(MA + \frac{MA_1.BC}{BC}\right)$$

$$= B'C'(MA + MA_1) \geq B'C'.AA_1 = x.AA_1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ M đồng thời thuộc đoạn AA_1 và cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A_1) của đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BC

$$M \text{ trùng } I \begin{cases} \widehat{BMC} = 180^0 - \widehat{A'} \\ \widehat{CMA} = 180^0 - \widehat{B'} \\ \widehat{AMB} = 180^0 - \widehat{C'} \end{cases} \qquad (*)$$

Vậy : (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M thỏa mãn (*) và giá trị nhỏ nhất đó bằng : xAA_1

II. Nếu $\max\left\{\widehat{A} + \widehat{A'} ; \widehat{B} + \widehat{B'} ; \widehat{C} + \widehat{C'}\right\} = 180^0$

Chẳng hạn : $\widehat{A} + \widehat{A'} = 180^0$

Tương tự như trường hợp I với chú ý rằng : A chính là giao của đoạn AA_1 với cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A_1) của đường tròn ngoại tiếp ΔA_1BC, ta thấy : (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M trùng A và giá trị nhỏ nhất đó bằng : $xAA_1 = yAB + zAC$.

III. Nếu $\max\left\{\widehat{A} + \widehat{A'} ; \widehat{B} + \widehat{B'} ; \widehat{C} + \widehat{C'}\right\} > 180^o$.

Chẳng hạn: $\widehat{A} + \widehat{A'} > 180^0$

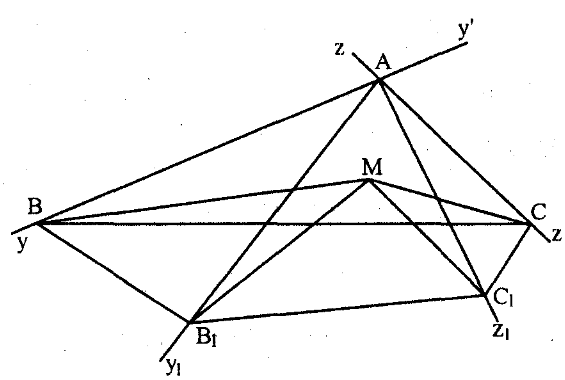
Qua A kẻ các đường thẳng yy' ; zz' sao cho : B thuộc tia Ay ; C thuộc tia Az. Lấy điểm M bất kì.

1) Nếu M nằm trong góc $\widehat{yAz}$ (h.3)

Vì : $\widehat{A} + \widehat{A'} > 180^0$ nên ta dựng được các tia Ay_1, Az_1 thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \widehat{y_1Az_1} + \widehat{A'} = 180^0 \\ \text{Các tia } Ay_1, Az_1 \text{ nằm trong góc } \widehat{yAz} \text{ (h.3)} \\ M \text{ nằm trong góc } \widehat{y_1Az_1} \end{cases}$$

Trên tia Ay_1, Az_1 lần lượt lấy các điểm B_1 ; C_1 sao cho : $AB_1 = AB$; $AC_1 = AC$.



Hình 3

Áp dụng trường hợp II cho ΔAB_1C_1 ta có :

$$xMA + yMB_1 + zMC_1 \geq yAB_1 + zAC_1$$
$$\Rightarrow \quad xMA + yMB_1 + zMC_1 \geq yAB + zAC$$

Vì ΔABB_1 cân tại A nên :

$$MB \geq MB_1$$

Tương tự như vậy :

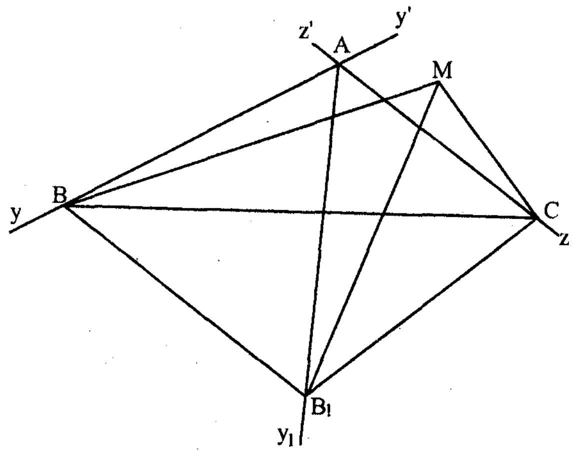
$$MC \geq MC_1$$

Suy ra : $\quad xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC \qquad (3)$

2. Nếu M nằm trong góc $\widehat{zAy}$ *(h.4)*

Vì $\widehat{A} + \widehat{A'} > 180^0$ nên ta dựng được tia Ay_1 nằm trong góc $\widehat{yAz}$ thỏa mãn điều kiện :

$\widehat{y_1Az} + \widehat{A'} = 180^0$ (*h.* 4). Trên Ay_1 lấy điểm B_1 sao cho: $AB_1 = AB$.



Hình 4

Áp dụng trường hợp II cho ΔAB_1C ta có :

$$xMA + yMB_1 + zMC \geq yAB_1 + zAC$$
$$\Rightarrow \quad xMA + yMB_1 + zMC \geq yAB + zAC$$

Vì ΔABB_1 cân tại A nên : $MB \geq MB_1$

Suy ra :

$$xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC \quad (4)$$

3) Nếu M nằm trong góc $\widehat{y'Az'}$ *(h. 5)*

Trên Ay' ; Az' lấy các điểm B', C' sao cho : AB' = AB ; AC' = AC. Áp dụng trường hợp 1 cho $\Delta AB'C'$ ta có :

$$xMA + yMB' + zMC' \geq yAB' + zAC'$$
$$\Rightarrow \quad xMA + yMB' + zMC' \geq yAB + zAC$$

Vì $\Delta ABB'$ cân tại A nên $MB \geq MB'$

Tương tự như vậy : $MC \geq MC'$

Suy ra :

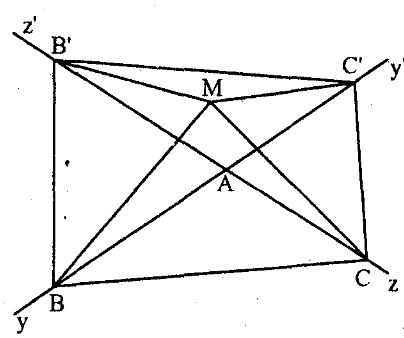
$$xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC \quad (5)$$

4) Nếu M nằm trong góc $\widehat{z'Ay}$: Tương tự như trường hợp 2 ta có

$$xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC \quad (6)$$

Từ (3) ; (4) ; (5) ; (6) ta có:

$$xMA + yMB + zMC \geq yAB + zAC \ \forall M$$



Hình 5

Đẳng thức xẩy ra $\Leftrightarrow$ M trùng A.

Vậy : (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M trùng A và giá trị nhỏ nhất đó bằng: yAB + zAC.

Kết luận:

A – Nếu x, y, z không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó :

1) $y + z \le x$ thì (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M trùng A

2) $z + x \le y$ thì (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M trùng B

3) $x + y \le z$ thì (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M trùng C

B – Nếu x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

Ta kí hiệu tam giác đó là A'B'C (B'C' = x ; C'A' = y ; A'B' = z)

1) Max $\left\{\widehat{A} + \widehat{A'},\ \widehat{B} + \widehat{B'},\ \widehat{C} + \widehat{C'}\right\} < 180^0$ thì (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi :

$$\left[\begin{array}{l} \widehat{BMC} = 180^0 - \widehat{A'} \\ \widehat{CMA} = 180^0 - \widehat{B'} \\ \widehat{AMB} = 180^0 - \widehat{C'} \end{array}\right.$$

2) Nếu $\widehat{A} + \widehat{A'} \ge 180^0$ thì (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M trùng A

3) Nếu $\widehat{B} + \widehat{B'} \ge 180^0$ thì (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M trùng B

4) Nếu $\widehat{C} + \widehat{C'} \ge 180^0$ thì (xMA + yMB + zMC) nhỏ nhất khi M trùng C

Để kết thúc xin nêu một vài bài tập áp dụng

Bài tập 1: Cho ΔABC. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho :

$\left(MA + \dfrac{\sqrt{3}}{2}MB + \dfrac{1}{2}MC\right)$ nhỏ nhất

Bài tập 2: Cho ΔABC. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho :

(BC . MA + CA . MB + AB . MC) nhỏ nhất

Bài tập 3: Cho ΔABC. m_a ; m_b ; m_c theo thứ tự là độ dài các trung tuyến xuất phát từ A ; B ; C. Hãy tìm trên mặt phẳng tam giác điểm M sao cho (m_aMA + m_b.MB + m_cMC) nhỏ nhất.

MỘT VÀI TÍNH CHẤT CÁC NGHIỆM CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO

PHAN HUY KHẢI
Viện Toán học

Bài viết này giới thiệu với các bạn một vài quy tắc để khảo sát tính chất các nghiệm của một phương trình bậc cao, từ đó trong nhiều trường hợp ta có thể áp dụng để giải nhiều bài toán cụ thể.

Phương trình bậc n có dạng tổng quát

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

trong đó $a_0 \neq 0$. Ta kí hiệu P'(x), P''(x) tương ứng là đạo hàm bậc nhất và bậc hai của P(x), $P^{(i)}(x)$ là đạo hàm bậc i của P(x), i = 1, 2, ... (xin nhắc lại là $P^{(i)}(x) = (P^{(i-1)}(x))'$

Như đã biết, phương trình (1) có tối đa là n nghiệm thực. Để khảo sát số nghiệm, cũng như để đánh giá nghiệm của (1), người ta thường dùng các định lí sau đây:

Định lí 1: Nếu $P(\alpha)\, P(\beta) < 0$, thì trong khoảng $\alpha < x < \beta$, (1) có ít nhất một nghiệm.

Sự đúng đắn của định lí 1 suy ra từ chỗ vì mọi đa thức P(x) đều là liên tục mà $P(\alpha)$ và $P(\beta)$ trái dấu, nên tồn tại ít nhất mọi giá trị x_0, $\alpha < x_0 < \beta$ sao cho $P(x_0) = 0$.

Định lí 2: (định lí Rolle). Nếu $P(\alpha) = P(\beta)$, thì tồn tại ít nhất một điểm x_0, $\alpha < x_0 < \beta$ sao cho $P'(x_0) = 0$.

Thật vậy theo định lí Lagrange, ta có tồn tại x_0, $\alpha < x_0 < \beta$ thỏa mãn điều kiện $P(\beta) - P(\alpha) = (\beta - \alpha) = P'(x_0)$. Từ đó suy ra $P'(x_0) = 0$.

Định lí 3 (định lí Newton). Nếu $P(x_0) \geq 0$ và $P^{(i)}(x_0) \geq 0$ với mọi i = 1, 2, ..., n thì nếu x là một nghiệm bất kì của (1), ta đều có $x \leq x_0$.

Chứng minh : Ta có $P^{(n)}(x) = a_0 n! = \text{const}$, do đó từ giả thuyết có $P^{(n)}(x) \geq 0$ với mọi x (nói riêng với mọi $x \geq 0$). Từ đó suy ra $P^{(n-1)}(x)$ là hàm đồng biến khi $x > x_0$, tức là $P^{(n-1)}(x) > P^{(n-1)}(x_0) \geq 0$, $\forall x > x_0$, vậy $P^{(n-2)}(x)$ lại là hàm đồng biến khi $x > x_0$, do đó $P(x) > P(x_0) \geq 0$. Điều đó có nghĩa là mọi $x > x_0$ đều không phải là nghiệm của (1).

Ta có đ.p.c.m.

Dưới đây chúng tôi đưa ra một vài ví dụ minh họa cho các định lí nêu ở trên.

Ví dụ 1: Cho phương trình

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + (2m - 2) + m - 3 = 0 \qquad (2)$$

Tìm m để (3) có nghiệm x1, x2, x3 thỏa mãn điều kiện $x_1 < -1 < x_2 < x_3$

Điều kiện cần: Giả sử thỏa mãn đầu bài, khi đó theo định lí Bezu, ta có $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Rõ ràng $P(x) > 0$ nếu $x_1 < x < x_0$ vì thế $P(-1) = m - 5 > 0 \Rightarrow m < -5$.

Điều kiện đủ. Đảo lại giả sử m < -5. Khi đó ta có P(-1) = m – 5 > 0. Do P(0) = m – 3 < 0, nên theo định lí 1, tồn tại nghiệm x, mà $-1 < x_2 < 0$. Rõ ràng tồn tại a (mà a > 0 đủ lớn) sao cho f(-a) < 0, vậy tồn tại nghiệm x_1 mà $-a < x_1 < -1$. Lại tồn tại b > 0 đủ lớn mà f(b) > 0, do đó áp dụng định lí 1 một lần nữa suy ra tồn tại nghiệm x_3 mà $0 < x_3 < b$. Như vậy ta có $-a < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3 < b$, tức là $x_1 < -1 < x_2 < x_3$. Tóm tại m < -5 là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Cho phương trình

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 15x^3 - x^2 + 3x - 7 = 0 \qquad (3)$$

Chứng minh rằng phương trình (3) có nghiệm thực duy nhất. Ta có

$$P'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 2x + 3$$
$$P''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 90x - 2$$
$$P'''(x) = 60x^2 - 120x + 90$$
$$P^{(4)}(x) = 120x - 120$$
$$P^{(5)}(x) = 120$$

Dễ thấy P(1), P'(1), P''(1), P''(3), $P^{(4)}(1)$, $P^{(5)}(1)$ đều dương. Theo định lí Newton, thì mọi x > 1 đều không phải là nghiệm của (3).

Rõ ràng khi $x < 0$ thì $P(x) < 0$, vậy mọi $x < 0$ cũng không phải là nghiệm của (3). Ta có $P(0) = -7 < 0$, $P(1) > 0$, do đó theo định lí 1, thì (3) có ít nhất một nghiệm $\overline{x}$ mà $0 < \overline{x} < 1$. Mặt khác dễ thấy $P'(x) > 0$ khi $0 < x < 1$, nên $P(x)$ là hàm thực sự tăng trên khoảng $(0, 1)$, do đó x cũng là nghiệm duy nhất của (3) trên khoảng ấy. Như vậy ta đi đến điều phải chứng minh.

Ví dụ 3: Cho a, b, c là ba số thực khác nhau. Đặt $m = \min(a, b, c)$, $M=\max(a, b, c)$

Chứng minh rằng

$$3m < a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$$
$$< a + b + c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < 3M$$

Không giảm tổng quát có thể giả sử $a < b < c$.

Xét đa thức

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

Rõ ràng phương trình $P(x) = 0$ có 3 nghiệm $x_1=a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$. Theo định lí Rolle phương trình

$$P'(x) = 3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2 mà $a < x_1 < b < x_2 < c$.

Từ
$$\overline{x_1} = \frac{a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}}{3}$$
$$\overline{x_2} = \frac{a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}}{3}$$

suy ra đ.p.c.m

Để kết thúc cho bài viết, xin đưa ra một vài bài tập để các bạn luyện tập với các phương pháp vừa trình bày ở trên để khảo sát nghiệm của một phương trình bậc cao.

1) (Định lí Budan – Fourier). Xét phương trình

$$P(x) = a_0x^n + a_0x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (*)$$

trên đoạn $[a, b]$. Giả sử $P(a)P(b) \neq 0$. Kí hiệu $v(x)$ là số lần đổi dấu trong dãy $P(x)$, $P'(x)$, ..., $P^{(n)}(x)$. Chứng minh rằng nếu gọi k là số nghiệm của (*) trên đoạn $[a, b]$, thì $k = v(a) - v(b) - 2m$, trong đó m là số tự nhiên nào đấy. (Nói cách khác k có cùng tính chẵn lẻ với $v(a) - v(b)$).

2) (Định lí Descartes). Xét phương trình (*), trong đó $a_0a_n \neq 0$. Kí hiệu v là số lần đổi dấu của dãy $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Gọi k là số nghiệm của (*), thì $k = v - 2m$, với m là số tự nhiên nào đấy.

3) Chứng minh rằng phương $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có 5 nghiệm thực.

4) Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6$. Chứng minh rằng hàm số đạt cực trị tại 3 điểm A, B, C và gốc tọa độ O là trọng tâm của tam giác ABC.

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

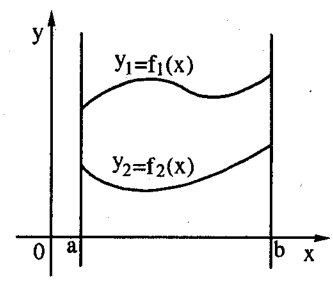
NGUYỄN SINH NGUYÊN
Đà Nẵng

Trong chương trình THPT ta có một ứng dụng của phép tính tích phân:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ và đồ thị của hai hàm $y_1 = f_1(x)$ và $y_2 = f_2(x)$ liên tục trên $[a, b]$ sao cho $f_1(x) \geq f_2(x)$, với mọi $x \in [a, b]$ được cho bởi công thức

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

(xem Giải tích 12 Ngô Thúc Lanh trang 128, Phan Đức Chính trang 159, Trần Văn Hạo trang 137). Trong các kì thi tốt nghiệp PTTH của miền Nam trước đây hầu như năm nào cũng có dạng toán này. ở đây, bài báo này đề cập đến một ứng dụng bài toán tính diện tích bằng tích phân này để chứng minh một số bất đẳng thức. Phương trình này có hiệu lực đối với các bất đẳng thức có chứa hàm mũ hay loga.



Hình 1

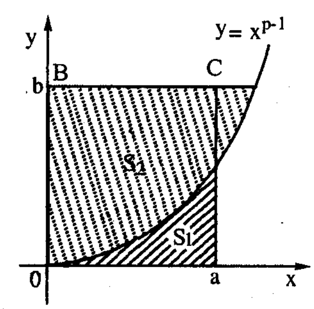
Ví dụ 1. *Cho các số $p > 1$, $q > 1$ liên hệ với nhau bởi* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Thế thì với mọi a, b dương ta có $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ *(Bất đẳng thức Young)*

Giải. Xét đường cong $y = x^{p-1}$ với $x > 0$, $p > 1$. Ta cũng có $x = y^{q-1}$. Ta thấy (hình 2) tổng diện tích S_1, S_2 lớn hơn diện tích hình chữ nhật ACBO. Ta tính S_1, S_2:

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}dx = \frac{x^p}{p}\Big|_0^a = \frac{a^p}{p}$$

$$S_2 = \int_0^b y^{q-1}dy = \frac{y^q}{q}\Big|_0^b = \frac{b^q}{q}$$



Hình 2

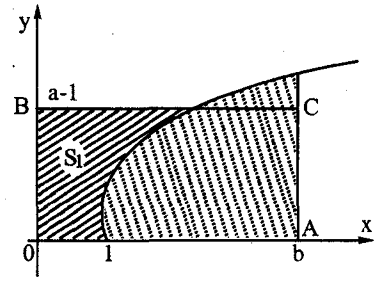
Vậy $S_{AOBC} = ab \leq S_1 + S_2$

$$\Rightarrow ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{đpcm}$$

Ví dụ 2. *Cho a, b các số lớn hơn hay bằng 1. Chứng minh rằng*

$$ab \leq e^{a-1} + b\ln b.$$

Giải. Xét đường cong $y = \ln x$ $(x \geq 1)$ và các điểm A, B, C (hình 3). Diện tích hình chữ nhật ACBO không lớn hơn tổng diện tích S_1, S_2.



Hình 3

Mà $S_{ACBO} = b(a - 1)$

và $$S_1 = \int_0^{a-1} e^y dy = e^y \Big|_0^{a-1} = e^{a-1} - 1$$

$$S_2 = \int_1^b \ln x dx = x\ln x - x \Big|_1^b = b\ln b - b + 1$$

Vậy $(a-1)b \le b\ln b - b + 1 = e^{a-1} - 1 = b\ln b - b + e^{a-1}$

$\Leftrightarrow ab \le b\ln b + e^{a-1}$ đpcm.

Ví dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ ta có $n! < n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}$*

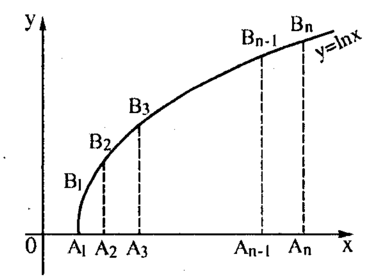
Giải. Trong mặt phẳng tọa độ, lấy các điểm A_i có hoành độ $X_{A_i} = i$ ($i = 1, \ldots, n$). Gọi B_i là các điểm trên đường cong $y = \ln x$ có hình chiếu trên trục hoành là A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Diện tích hình thang cong $A_1B_nA_n$ lớn hơn tổng diện tích các hình thang $A_1A_2B_2$, $B_2A_2A_3B_3$, ..., $A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$

$$\frac{\ln 1 + \ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + \ldots + \frac{\ln(1-l) + \ln n}{2} < \int_1^n \ln x dx$$

$$\Leftrightarrow \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n-1) + \frac{\ln n}{2} < n\ln n - n + 1$$

$$\Leftrightarrow \ln n! < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + 1 = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}\right)$$

$$\Leftrightarrow n! < n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}$$



Hình 4

Các bạn thử vận dụng phương pháp này để chứng minh các bất đẳng thức:

1. $b(a+1) \le e^a + b\ln b$ với $a, b > 0$

2. $(n+1)ab \le a^{n+1} + nb^{\frac{n+1}{n}}$
(a, b > 0, n nguyên dương)

3. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương
$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

PHÉP BIẾN HÌNH ĐỒNG DẠNG ĐẶC BIỆT VÀ ỨNG DỤNG VÀO VIỆC GIẢI TOÁN HÌNH HỌC

NGÔ THẾ PHIỆT
Đà Nẵng

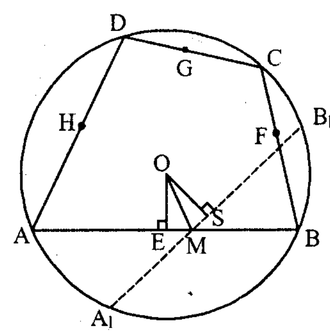
Cho hai cặp điểm A, A' và B, B' với $A'B' = kAB$ trong đó $k > 0$ là một số thực dương. Có hai phép đồng dạng biến A thành A' và B thành B'. Một phép giữ nguyên hướng của mặt phẳng gọi là phép *đồng dạng thuận*. Một phép đổi hướng của mặt phẳng gọi là phép *đồng dạng nghịch*. Sau đây là một phép đồng dạng thuận đặc biệt có tâm, đó là tích của một phép vị tự có tỉ số $k > 0$ và một phép quay cùng tâm với phép vị tự có góc quay $0^0 \leq \alpha \neq 180^0 < 360^0$.

Gọi H(O, k) là phép vị tự tâm O tỉ số $k > 0$ và R(O, α) là phép quay tâm O góc quay α với $0^0 \leq \alpha \neq 180^0 < 360^0$ thì φ(0, k, a) = H(0, k). R(0, α) = R(O, α) ; H(0, k) gọi là phép đồng dạng tâm O tỉ số k góc quay α.

Vậy: φ(0, k, a) : M → M' sao cho $\begin{cases} OM' = kOM \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \alpha \end{cases}$

Bài toán 1. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O ; quay tứ giác quanh O một góc α với $0^0 \leq \alpha < 360^0$ thành tứ giác $A_1B_1C_1D_1$. Chứng minh rằng giao điểm của các cặp đường thẳng AB và A_1B_1 ; BC và B_1C_1 ; CD và C_1D_1 ; DA và D_1A_1 là 4 đỉnh của một hình bình hành.*

Giải. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi M, N, P, Q lần lượt là giao điểm của AB và A_1B_1, BC và B_1C_1, CD và C_1D_1, DA và D_1A_1. Gọi S là trung điểm A_1B_1. Ta có:



$$\begin{cases} \widehat{EOM} = \dfrac{\alpha}{2} \\ OM = \dfrac{OE}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Vậy phép đồng dạng

$$\varphi\left(O, \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \frac{\alpha}{2}\right) : E \to M.$$

Tương tự : F → N
G → P
H → Q

Vậy MNPQ ~ EFGH

EFGH là hình bình hành. Suy ra MNPQ là hình bình hành.

Bài toán 2. *Cho ΔABC bất kì. Vẽ phía ngoài tam giác đó các tam giác BCM và CAN sao cho:*

$$\begin{cases} \widehat{BMC} = \widehat{ANC} = 90^0 \\ \dfrac{CM}{BM} = \dfrac{1}{3} \text{ và } \dfrac{CN}{AN} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{2}{3}$.

Tính $\widehat{KMN}$ *và tỉ số* $\dfrac{KM}{KN}$

Giải. Từ K dựng về phía ngoài tam giác KH ⊥ AB và $KH = \frac{1}{5}AB$.

Ta có :

$$tg\widehat{HBK} = \frac{1}{3} \text{ và } tg\widehat{HAK} = \frac{1}{2}$$

Suy ra :

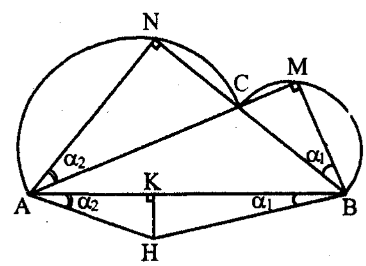
$$\widehat{HBK} = \widehat{CBM} = \alpha_1 \text{ với } tg\alpha_1 = \frac{1}{3}$$

$$\widehat{HAK} = \widehat{CAN} = \alpha_2 \text{ với } tg\alpha_2 = \frac{1}{2}$$

Ta có : $\dfrac{BH}{BK} = \dfrac{BC}{BM} = \dfrac{1}{\cos\alpha_1}$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BH}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}}\right) = \alpha_1$$

Suy ra phép đồng dạng



$$\varphi\left(B, \frac{1}{\cos\alpha_1}, \alpha_1\right) : K \to H;$$

$$M \to C$$

Vậy :

$$\begin{cases} \dfrac{HC}{KM} = \dfrac{1}{\cos\alpha_1} \\ \left(\widehat{KM, HC}\right) = \alpha_1 \end{cases}$$

Tương tự : $\varphi(A, \cos\alpha_2, \alpha_2) : H \to K;$

$$C \to N$$

Suy ra $\begin{cases} \dfrac{KN}{HC} = \cos\alpha_2 \\ \left(\widehat{HC, KN}\right) = \alpha_2 \end{cases}$

Vậy

$$\begin{cases} \left(\widehat{KM, KN}\right) = \left(\widehat{KM, HC}\right) + \left(\widehat{HC, KN}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \dfrac{KM}{KN} = \dfrac{KM}{HC} \cdot \dfrac{HC}{KN} = \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \end{cases}$$

$$tg\widehat{KMN} = tg(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 - tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

Vậy $\widehat{KMN} = 45^0$

Ta lại có $\cos^2\alpha_1 = \dfrac{1}{tg^2\alpha_1 + 1}$

$$\cos^2\alpha_2 = \frac{1}{tg^2\alpha_2 + 1}$$

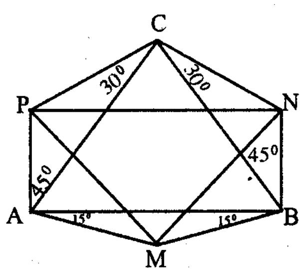
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{KM}{KN}\right)^2 = \frac{tg^2\alpha_2 + 1}{tg^2\alpha_1 + 1} = \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{KM}{KN} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Bài toán 3. *Trên các cạnh của ΔABC bất kì dựng về phía ngoài của tam giác đã cho các tam giác ABM, BCN và CAP sao cho:*

$$\widehat{CAP} = \widehat{CBN} = 45^0$$
$$\widehat{ACP} = \widehat{BCN} = 30^0$$
$$\widehat{ABM} = \widehat{BAM} = 15^0$$

Chứng minh ΔPMN vuông cân tại M.



(Đề thi toán quốc tế lần thứ 17 năm 1975)

Giải. Xét

$$F = \varphi\left(N, \frac{1}{k}, 105^0\right) . \varphi\left(P, k, 105^0\right) . R(M, 150^0)$$

với $k = \dfrac{sin45^0}{sin30^0} = \sqrt{2}$. Vì $\begin{cases} \dfrac{PC}{PA} = \dfrac{sin45^0}{\sin 30^0} = k \\ \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{sin30^0}{\sin 45^0} = \dfrac{1}{k} \end{cases}$

Suy ra :

$$B \xrightarrow{R(M,\,150^0)} A \xrightarrow{\varphi(P,k,\,105^0)} C \xrightarrow{\varphi(N,\frac{1}{k},\,105^0)} B$$

Vậy F(B) = B.

F là một phép đồng dạng thuận có :

$$\begin{cases} \text{tỉ số } k\,.\,\dfrac{1}{k} = 1 \\ \text{góc } 150^0 + 105^0 + 105^0 = 360^0 \end{cases}$$

và giữ nguyên B. Vậy F là phép đồng nhất. Suy ra F(M) = M.

Vậy : $M \xrightarrow{R(M,\,150^0)} M \xrightarrow{\varphi(P,k,\,105^0)} M' \xrightarrow{\varphi(N,\frac{1}{k},\,105^0)} M$

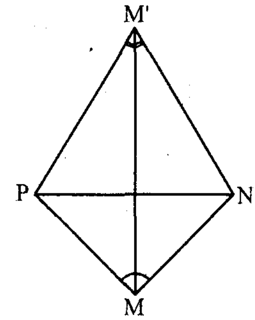
Suy ra $\Delta PMM' \sim \Delta PAC$

$\Delta NMM' \sim \Delta NBC$

Đã biết $\Delta PAC \sim \Delta NBC$

Từ đó $\Delta PMM' \sim \Delta NMM'$

Hai tam giác này có MM' chung và có hướng ngược nên bằng nhau (đối xứng qua trục MM'). Vậy



$$\widehat{PMM'} = \widehat{NMM'} = \widehat{PAC} = 45^0$$

$$\Rightarrow \widehat{PMN} = 90^0,\ MP = MN$$

Vậy ΔPMN vuông cân tại M.

Sau đây là các bài tập tương tự:

1. Cho ΔABC bất kì. Dựng trên các cạnh của tam giác và phía ngoài của tam giác các tam giác đều ABM, BCN, ACK. Gọi P, Q lần lượt là tâm của các tam giác BCN và ACK. Chứng minh :

a) $CM \perp PQ$

b) $CM = PQ\sqrt{3}$

2. Cho tứ giác lồi ABCD. Trên các cạnh và phía ngoài của tứ giác ta dựng các tam giác đều ABM, CDN, BCI và ADJ. Gọi P, Q là tâm của các tam giác BCI và ADJ. Chứng minh

$MN \perp PQ$ và $MN = PQ\sqrt{3}$

3. Cho ΔABC bất kì. Dựng về phía ngoài của tam giác đã cho các tam giác EBA, FAC sao cho

$$\begin{cases} \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^0 \\ tg\widehat{EBA} = tg\widehat{FAC} = 2 \end{cases}$$

Trên BC lấy điểm H sao cho $BH = \dfrac{1}{5}BC$

Tính $\widehat{EHF}$ và tỉ số $\dfrac{HE}{HF}$

4. Cho hai đường thẳng m, n cắt nhau tại S tạo với nhau một góc φ. Qua S dựng hai đường thẳng bất kì a, b. Cho $M \in m$; $N \in n$; hạ $MA \perp a$, và $MB \perp b$; $NA_1 \perp a$, và $NB_1 \perp b$. Tìm góc tạo bởi A_1B_1 và AB ?

5. Cho ΔABC bất kì. Dựng trên các cạnh của tam giác và về phía ngoài các tam giác ABM, BCN, ACP, thỏa mãn các điều kiện sau đây :

a) $\Delta ACP \sim \Delta BCN$ và có hướng ngược nhau.

b) ΔABM cân có đáy AB (hoặc M là trung điểm của AB)

c) Tổng các góc có hướng $\widehat{BMA}$, $\widehat{APC}$ và $\widehat{CNB}$ (hoặc $\widehat{AMB}$, $\widehat{BNC}$ và $\widehat{CPA}$) bằng 360^0

Chứng minh $\begin{cases} \widehat{PMN} = 2\widehat{PAC} \\ PM = MN \end{cases}$

VỀ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

TRẦN THANH THIÊN
Đồng Nai

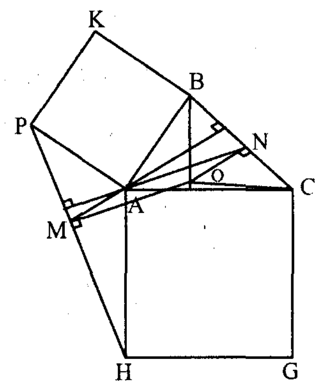
Dưới đây là một bài toán thi vô địch Liên Xô cách đây khoảng hơn 10 năm :

"Cho tam giác ABC. Trên ba cạnh của tam giác ABC, về phía ngoài tam giác ta dựng ba hình vuông. Xác định hình dạng của tam giác ABC nếu 6 đỉnh của ba hình vuông (không phải là đỉnh của tam giác) nằm trên một nửa đường tròn". Xin giới thiệu với bạn đọc một số lời giải.

Lời giải thứ nhất (Hình 1)

Trước hết, bạn đọc có thể chứng minh được kết quả quen thuộc sau : Với hai hình vuông ABKI và ACGH nói trong đầu bài thì trung tuyến AM của tam giác AIH vuông góc với BC và trung tuyến AN của tam giác ABC vuông góc với IH. Đồng thời, ta cũng chứng minh được :

$$AM = \frac{BC}{2}\ .\ AN = \frac{IH}{2}$$



Hình 1

Trở lại bài toán : Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Giả sử 6 đỉnh của ba hình vuông thuộc đường tròn. Dễ dàng thấy rằng tâm đường tròn ấy chính là O. Vậy ON vuông góc với BC, OM vuông góc với IH. Từ đó suy ra, ON // AM, AN // OM, nên tứ giác ANOM là hình bình hành.

Vậy $OM = AM = \frac{BC}{2}$, suy ra góc $\widehat{BOC}$ bằng 1 vuông.

Tương tự, góc $\widehat{AOC}$ và góc $\widehat{AOB}$ cùng bằng 1 vuông. Điều này vô lý.

Kết luận : Không có tam giác nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải thứ hai (Hình 2)

Chúng ta giả sử hình vuông thứ ba là BCFE. Dễ thấy $\Delta AFC = \Delta GBC$ (c.g.c), suy ra : AF = GB.

Mặt khác OA = OB, OF = OG, suy ra $\Delta AOF = \Delta BOG$.

Vậy : $\widehat{AOF} = \widehat{BOB}$,.

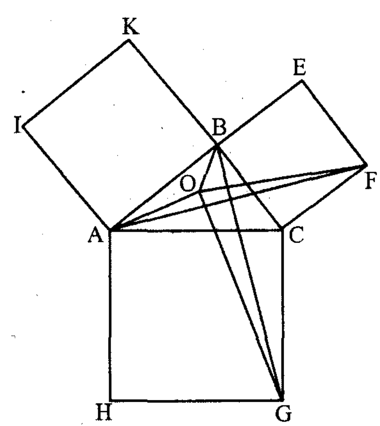
Từ đó : $\widehat{AOG} = \widehat{BOF}$,

Nên $\Delta AOG = \Delta BOF$(c.g.c)

Do đó AG = BF, suy ra : AC = BC.

Hoàn toàn tương tự AC = AB.

Vậy tam giác ABC đều. Thử lại, nếu tam giác ABC đều thì đỉnh của ba hình vuông trên một đường tròn.,



Hình 2

Lời giải thứ ba : (Hình 3)

Gọi P, Q là các trung điểm của AC và HG. Hiển nhiên O, P, Q thẳng hàng và OP ⊥ AC, OQ ⊥ HG. Ta chọn chiều dương của trục OP theo hướng của véctơ $\overrightarrow{PQ}$.

Khi đó : $\overline{OP} = R\cos B$

(R là bán kính đường tròn (ABC). $\overline{PQ} = AC = 2R\sin B$

Vậy $OQ^2 = (OP + PQ)^2 = R^2(\cos B + 2\sin B)^2$

$= R^2(\cos^2 B + 4\cos B\sin B + 4\sin^2 B).$

Ta lại có : $HQ^2 = (R\sin B)^2 = R^2\sin^2 B$

Vậy $OH^2 = R^2(\cos^2 B + 4\cos B\sin B + 5\sin^2 B)$

$= R^2(2\sin 2B - 2\cos 2B + 3)$

Tương tự : $OG^2 = R^2(2\sin 2A - 2\cos 2A + 3)$

$OK^2 = R^2(2\sin 2C - 2\cos 2C + 3)$

Do OH = OG = OK nên :

$$\begin{cases} \sin 2A - \cos 2A = \sin 2B - \cos 2B \ (1) \\ \sin 2B - \cos 2B = \sin 2C - \cos 2C \ (2) \end{cases}$$

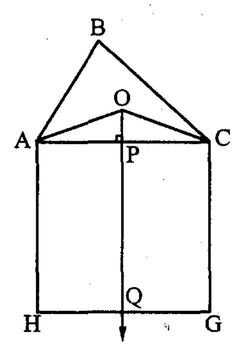
(1) ⇔ 2cos(A + B)sin(A – B) + 2sin (A + B)sin(A – B) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(A - B) = 0 \\ \cos(A + B) = -\sin(A + B) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(A - B) = 0 \\ tg(A + B) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ C = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

(vì A, B, C là các góc của tam giác)

Tương tự : (2) ⇔ $\left[\begin{array}{l} B = C \\ A = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$



Hình 3

Vậy tam giác ABC chỉ có thể là tam giác đều hoặc là tam giác vuông cân. Dĩ nhiên, trong ba lời giải ít nhất hai lời giải sai.Các bạn học sinh thử xét lời giải nào sai. Chúng tôi thiết nghĩ việc làm đó có thể giúp ích phần nào cho các bạn tránh các sai lầm trong việc giải các bài toán nói chung và các bài toán hình học phẳng nói riêng.

PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VỚI VIỆC XÁC ĐỊNH KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

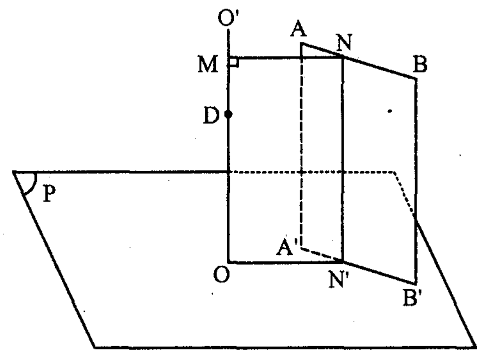
THÁI VIẾT THẢO
Trường THPT Phan Bội Châu, Nghệ An

Bài viết này giới thiệu cùng các bạn ứng dụng của phép chiếu vuông góc trong việc xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Qua đó làm phong phú thêm cách giải loại toán này, đồng thời cho thấy một cách nhìn và sự vận dụng sáng tạo phần lí thuyết đã được học trong chương trình hình học.

Ta biết rằng phép chiếu vuông góc bảo tồn tỉ số các đường thẳng cùng phương và nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ thì $\overrightarrow{M'A'} = k.\overrightarrow{M'B'}$ với M', A', B' tương ứng là ảnh của M, A, B qua phép chiếu vuông góc.

Xét hai đường thẳng chéo nhau AB và CD. Ta dựng 1 mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại O ($O \in AB$). (Xem hình 1).

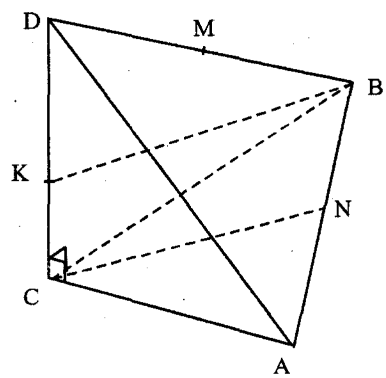
Giả sử đoạn MN là đoạn vuông góc chung của AB, CD ; hình chiếu của A, B, N trên (P) là A', B', N'. Rõ ràng MN = ON' (h.vẽ). Như vậy d(AB, CD) = d(O, A'B') (Ta kí hiệu d(AB, CD) là khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD, (hình 1) d(O, A'B') là khoảng cách giữa điểm O và A'B'.



Hình 1

Trong từng bài toán, có thể chọn mặt phẳng (P) qua C, hoặc D hay 1 điểm đặc biệt nào đó trên đường thẳng CD. Cụ thể ta xét các bài toán sau:

Bài toán 1. Hình tứ diện ABCD có cạnh CD vuông góc với mặt phẳng ABC, M là trung điểm của DB, N là trung điểm của AB, K là điểm trên CD sao cho $CK = \frac{1}{3}CD$.

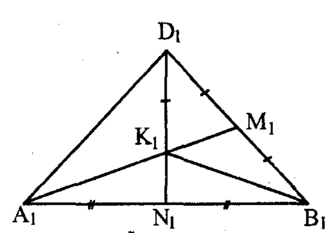


Hình 2a

Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng BK và CN bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CN (hình 2a).

Giải. Ta chiếu tứ diện ABCD lên mặt phẳng (P) vuông góc với CN tại N.

Kí hiệu A_1, B_1, D_1, M_1, K_1 là hình chiếu của A, B, D, M, K trên (P), chú ý rằng hình chiếu của CN và N chính là N.



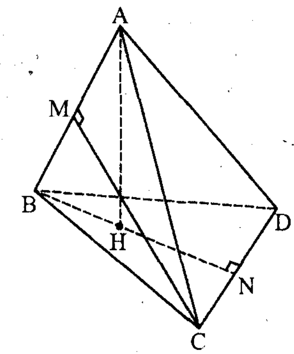
Hình 2b

Theo giả thiết $CD \perp (ABC) \Rightarrow CD \perp CB$.

$CD \perp CA$. Do đó ND_1 // CD và $ND_1 \perp A_1B_1$ tại N (xem hình 2b). Ta có : d(BK, CN) = d(N, B_1K_1) ; d(AM, CN) = d(N, A_1M_1). Suy ra cần chứng minh d(N, B_1K_1) = d(N, A_1M_1).

Từ giả thiết M là trung điểm BD $\Rightarrow$ M_1 là trung điểm B_1D_1 ; cũng như thế N là trung điểm A_1B_1, mặt khác $CK = \frac{1}{3}CD \Rightarrow NK_1 = \frac{1}{3}ND_1$ $(K \in ND_1)$. Từ các đẳng thức trên dễ dàng suy ra K_1 là trọng tâm $\Delta A_1B_1D_1$. Mặt khác $\Delta A_1K_1B_1$ cân tại K_1 nên suy ra d(N, B_1K_1) = d(N, A_1M_1) (đpcm).

Bài toán 2. Cho tứ diện ABCD cạnh a. Gọi M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm cạnh CD. Hãy tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và CM.



Giải. Vì ABCD là tứ diện đều, nên từ giả thiết ta suy ra $BN \perp CD$. Ta chiếu tứ diện ABCD lên mặt phẳng P vuông góc với BN tại N. Rõ ràng $CD \subset (P)$.

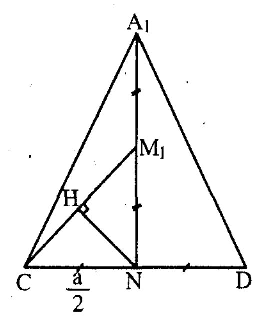
Gọi H là chân đường cao kẻ từ A tới mặt BCD.

Khi đó $A \xrightarrow{P} A_1$, $B \xrightarrow{P} N$, $C \xrightarrow{P} C$, $D \xrightarrow{P} D$, $H \xrightarrow{P} N$,

(Kí hiệu $A \xrightarrow{P} A_1$ tức A_1 là ảnh của A qua phép chiếu vuông góc lên P). Từ giả thiết suy ra :

$A_1C = A_1D$, $A_1N \perp CD$

Ta có $NA_1 = HA = a.\sqrt{\frac{2}{3}}$ và d(MC, NB) = d(N, CM_1). Chú ý rằng $MA = MB \Rightarrow M_1A_1 = M_1N$ $(M_1 \in A_1N)$ (xem hình 3b) .



Và d(N, CM_1) = NH, trong tam giác vuông CNM_1 ta có :

$$\frac{1}{NH^2} = \frac{1}{NC^2} + \frac{1}{NM_1^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{6}{a^2} = \frac{16}{a^2} \Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{10}}{10}$$

Vậy d(MC, NB) = $\frac{a\sqrt{10}}{10}$

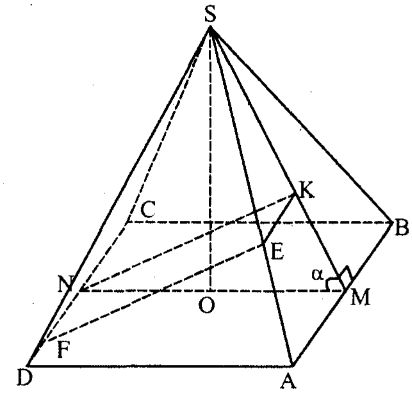
Bài toán 3.

Trong mặt phẳng P cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Trên đường thẳng Ox vuông góc với mặt phẳng ABC tại O lấy 1 điểm S. Gọi α là góc do mặt bên hình chóp SABCD tạo với đáy. Hãy xác định đường vuông góc chung của SA và SD và tính độ dài đường vuông góc chung đó.

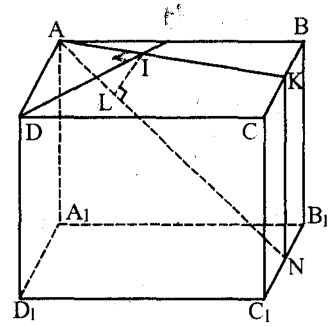
Giải. Gọi M, N là trung điểm của AB và CD (xem hình 4), khi đó O là trung điểm MN và mặt phẳng SMN vuông góc với CD tại N. Hình chiếu của SA trên mặt phẳng này là SM (vì $AB \perp (SMN)$.

Do đó d(CD, S) = d(N, SM) = NK($NK \perp SM$). Do đó NK = $NM.\sin\alpha = a.\sin\alpha$.

Để vẽ đường vuông góc chung của CD và SA, từ K kẻ KE // AB, $E \in SA$. Trong mặt phẳng DNKE từ E kẻ EF // NK, cắt DC tại F. Thì EF là đường vuông góc chung của CD và SA.



Bài toán 4. Cho hình lập phương ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ cạnh a, M, N là trung điểm của AB và B_1C_1. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM và vẽ đoạn vuông góc chung của chúng.



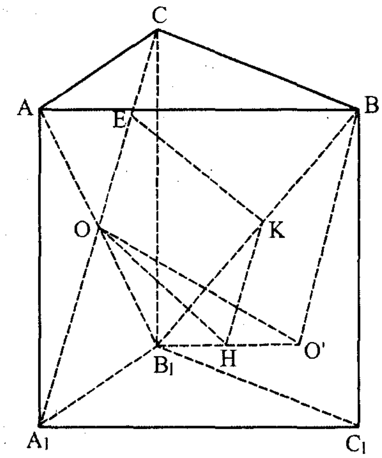
Giải: (xem hình 5). Gọi K là trung điểm của BC. AK cắt DM tại I. Vì ABCD là hình vuông, nên DM $\perp$ AK tại I. Mặt khác $AA_1 \perp$ [ABCD] $\Rightarrow AA_1 \perp$ DM. Do đó DM $\perp$ $[AKNA_1]$. Hình chiếu của AN lên mặt phẳng này là chính nó. Vì vậy d(DM, AN) = d(I, AN) = IL(IL $\perp$ AN). IL chính là đoạn vuông góc chung của DM và AN. Ta tính IL : IL =

$$AI.\sin\widehat{LAI} = AI\,.\,\frac{NK}{AN} = \frac{a\sqrt{5}}{5}\,.\,a\,.\,\frac{2}{3a} = \frac{2a\sqrt{5}}{15}.$$

Vậy khoảng cách giữa MD và AN bằng $\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

Cuối cùng xin mời các bạn giải bài tập sau :

Bài toán 5. Lăng trụ tam giác đều ABC. $A_1B_1C_1$ có 9 cạnh đều bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1C, và chỉ ra đoạn vuông góc chung của chúng.



DÙNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH

NGUYỄN PHI PHÚC

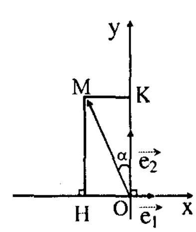
Giáo viên THPT Phương Lâm - Đồng Nai

Với nhiều bài toán hình học có chứa yếu tố "khoảng cách", "cùng phương" và đặc biệt là yếu tố "vuông góc", nếu khéo chọn hệ trục tọa độ thì có thể chuyển được thành bài toán đại số có nhiều hứa hẹn cho khả năng tìm ra lời giải. Đó lày ý tưởng sử dụng phương pháp tọa độ để giải toán.

Trong bài viết này xin trình bày việc sử dụng "Phương pháp tọa độ" để tìm tòi lời giải một số bài toán với kiến thức cơ bản không vượt quá chương trình toán lớp 10 PTHT.

Trong Chương I - §5, Chương II - §1 Sách giáo khoa (SGK) Hình học 10 (*), ta có các định nghĩa :

1. $M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{xe_1} + \overrightarrow{ye_2} = \overrightarrow{OHe_1} + \overrightarrow{OKe_2}$
2. $\vec{a} = (a_1, a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2\,\vec{e}_2$
3. $x = OM\cos\alpha$
4. $y = OM\sin\alpha$ $(0^0 \le \alpha \le 180^0)$



Kết hợp định nghĩa và các tính chất được nêu trong SGK Hình học 10, ta chứng minh được hai kết quả quan trọng sau :

Bổ đề 1 : Trong mặt phẳng Oxy cho

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$$

Ta có : $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

Chứng minh : 1) $\vec{a} = \vec{0}$ *hoặc* $\vec{b} = \vec{0}$. Hiển nhiên đúng

2) $\vec{a} \neq \vec{0}$ *và* $\vec{b} \neq \vec{0}$

Nếu $b_1 = 0$: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

Nếu $b_2 = 0$: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

Nếu $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases} (k \neq 0) \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Bổ đề 2 : Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b}$ (b_1, b_2)

Ta có : $\vec{a}.\vec{b} = (a_1, a_2).(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$

Chứng minh : Ta có $\begin{cases} |\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1 \\ \vec{e_1} \perp \vec{e_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e_1}^2 = \vec{e_2}^2 = 1 \\ \vec{e_1}.\vec{e_2} = 0 \end{cases}$ (*)

Khi đó : $\vec{a}.\vec{b} = (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}).(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2})$

$$= a_1b_1\vec{e_1}^2 + a_1b_2\vec{e_1}.\vec{e_2} + a_2b_1\vec{e_2}.\vec{e_1} + a_2b_2\vec{e_2}^2$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2$$

Sau đây là một số bài tập minh họa.

Bài 1. (SGK HH 10, trang 60)

Cho ΔABC vuông tại A, các cạnh góc vuông là b và c, M là một điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = \alpha$. Chứng minh rằng : $AM = \dfrac{bc}{c\cos\alpha + b\sin\alpha}$

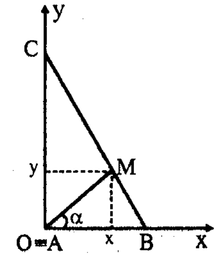
Lời giải : Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó : $A(0, 0), B(b, 0), C(0, c), M(x, y)$.

Từ định nghĩa : $x = AM\cos\alpha$, $y = AM\sin\alpha$

Nên $M(AM\cos\alpha, AM\sin\alpha)$

(*) Hình học 10, Trần Văn Hạo chủ biên, Nxb Giáo dục 1993.

Do $M \in BC \Rightarrow \overrightarrow{CM}$ cùng phương với $\overrightarrow{CB}$



$$\Rightarrow \begin{vmatrix} AM\cos\alpha & AM\sin\alpha - c \\ b & -c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow AM(c\cos\alpha + b\sin\alpha) = bc$$

$$\Rightarrow AM = \frac{bc}{c\cos\alpha + b\sin\alpha}$$

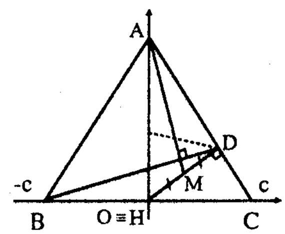
Bài 2. (SGK HH 10, trang 50)

Cho ΔABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh AM vuông góc với BD.

Lời giải : Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Khi đó : $H(0, 0), A(c, a), B(-c, 0), C(c, 0), D(x, y)$

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AC} \end{cases}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x, -y)(c, -a) = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y-a \\ c & -a \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} cx - ay = 0 \\ ax + cy = ac \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2c}{a^2 + c^2} \\ y = \dfrac{c^2a}{a^2 + c^2} \end{cases}$$

Vậy $D\left(\dfrac{a^2c}{a^2 + c^2}, \dfrac{c^2a}{a^2 + c^2}\right)$, M là trung điểm của HD nên

$$M\left(\frac{a^2c}{2(a^2 + c^2)}, \frac{c^2a}{2(a^2 + c^2)}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2a^2c + c^3}{a^2 + c^2}, \frac{c^2a}{a^2 + c^2}\right)\left(\frac{a^2c}{2(a^2 + c^2)}, \frac{-c^2a - 2a^3}{2(a^2 + c^2)}\right)$$

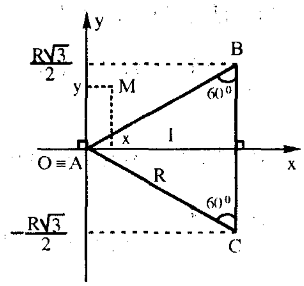
$$= \frac{2a^4c^2 + a^2c^4}{2(a^2 + c^2)^2} + \frac{-c^4a^2 - 2a^4c^2}{2(a^2 + c^2)^2} = 0$$

Vậy BD $\perp$ AM (đpcm)

Bài 3. (Đề thi học sinh giỏi toàn quốc – Năm 1979)

Điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Chứng minh giá trị của $MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí của M.

Lời giải. Gọi I, R là tâm và bán kính đường tròn $\mathscr{C}$ ngoại tiếp Δ đều ABC. Ta có : $A(0, 0)$, $B\left(\frac{3R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{3R}{2}, -\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$, $I(R, 0), M(x, y) \in \mathscr{C} \Rightarrow MI = R$



$$\Rightarrow MI^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2Rx$$

Ta có : $MA^4 + MB^4 + MC^4 =$

$$= (x^2 + y^2)^2 + \left[\left(x - \frac{3R}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2$$

$$+ \left[\left(x - \frac{3R}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2$$

$$= (2Rx)^2 + (3R^2 - Rx - R\sqrt{3}y)^2 + (3R^2 - Rx + R\sqrt{3}y)^2$$

$$= 6R^2x^2 + 6R^2y^2 + 18R^4 - 12R^3x$$

$$= 6R^2(x^2 + y^2) + 18R^4 - 12R^3x$$

$$= 6R^2.\ 2Rx + 18R^4 - 12R^3x = 18R^4$$

Vậy giá trị $MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí M.

Bài 4. (Đề thi vô địch Anh – năm 1983)

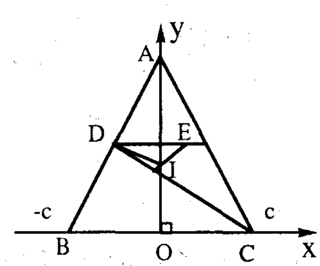
Cho ΔABC. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, D là trung điểm cạnh AB, E là trọng tâm của ΔACD. Chứng minh rằng nếu $AB = AC$ thì IE vuông góc với CD.

Lời giải : Chọn hệ trục như hình vẽ (O là trung điểm BC)

Khi đó O(0, 0), A(0, a), B(-c, 0), C(c, 0), $D\left(-\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $E\left(\frac{c}{6}, \frac{a}{2}\right)$ (*)

$$\begin{cases} \overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{c}{2}, y - \frac{a}{2}\right).(c, a) = 0 \\ (x, y).(2c, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{a^2 - c^2}{2a} \end{cases}$$



$Vậy\ I\left(0, \frac{a^2 - c^2}{2a}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{DC} = \left(\frac{c}{6}, \frac{c^2}{2a}\right)\left(\frac{3c}{2}, -\frac{a}{2}\right) = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow IE \perp DC\ (đpcm)$$

Lưu ý : (*) : Công thức tọa độ trọng tâm tam giác.

Xem bài tập 4 trang 33 SGK HH 10.

Bài 5. (Đề thi vô địch Bungari – năm 1981)

Đường phân giác trong và ngoài của góc C của ΔABC cắt đường thẳng AB ở L và M. Chứng minh rằng nếu CL = CM thì $AC^2 + BC^2 = 4R^2$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

Lời giải : Nếu CL = CM thì ΔCML vuông cân (do CL ⊥ CM theo tính chất hai đường phân giác của góc).

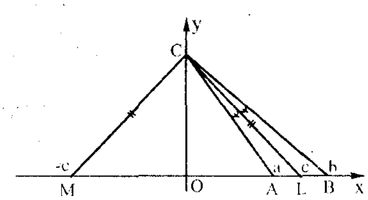
Chọn hệ trục như hình vẽ (O là trung điểm của ML)

Khi đó : O(0, 0), A(a, 0), B(b, 0), C(0, c), L(c, 0), M(-c, 0)

Theo tính chất đường phân giác ta có :

$$\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{AL^2}{LB^2} = \frac{AC^2}{CB^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(c-a)^2}{(b-c)^2} = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$$



$$\Leftrightarrow ab^2 + ac^2 - a^2b - c^2b = 0 \Leftrightarrow (a-b)(c^2 - ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{c^2}{a}$$

Vậy $B\left(\frac{c^2}{a}, 0\right)$ nên

$$AC^2 + BC^2 = (a^2 + c^2) + \left(c^2 + \frac{c^4}{a^2}\right) = \left[\frac{a^2+c^2}{a}\right]^2 \quad (1)$$

Gọi I(x, y) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có :

$$\begin{cases} AI = CI \\ AI = BI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = BI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-c)^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = \left(\frac{x-c^2}{a}\right)^2 + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax - 2cy = a^2 - c^2 \\ x = \frac{a^2+c^2}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2+c^2}{2a} \\ y = c \end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{a^2+c^2}{2a}, c\right)$

nên $4R^2 = 4CI^2 = 4\left(\frac{a^2+c^2}{2a}\right)^2 = \left(\frac{a^2+c^2}{a}\right)^2 \quad (2)$

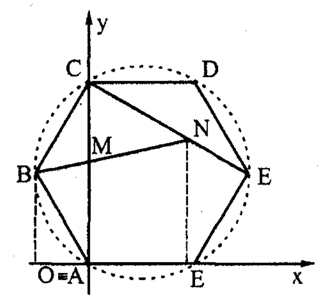
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC^2 + BC^2 = 4R^2$ (đpcm)

Bài 6. (Đề thi toán Quốc tế lần thứ 23)

Trên các đường chéo AC và CE của lục giác đều ABCDEF, ta lấy hai điểm M và N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$

Biết rằng B, M, N thẳng hàng. Tìm k.

Lời giải : Đặt 2R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp lục giác đều ABCDEF. Chọn hệ trục như hình vẽ.



Khi đó A(0, 0), B(-R, $\sqrt{3}R$), C(0, $2\sqrt{3}R$), E(3R, $\sqrt{3}R$), M(0, m), N(x, y) với $\sqrt{3}R < m < 2\sqrt{3}R$.

Ta có : $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{BM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x & y - m \\ R & m - \sqrt{3}R \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y - 2\sqrt{3}R \\ -3R & \sqrt{3}R \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m - \sqrt{3}R)x + 3Ry = -mR \\ x + \sqrt{3}y = 6R \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6R^2 - \sqrt{3}mR}{\sqrt{3}m - 2R} \\ y = \dfrac{7mR - 6\sqrt{3}R^2}{\sqrt{3}m - 2R} \end{cases}$$

Vậy $$N\left(\frac{6R^2 - \sqrt{3}mR}{\sqrt{3}m - 2R}, \frac{7mR - 6\sqrt{3}R^2}{\sqrt{3}m - 2R}\right)$$

Theo bài toán ta có :

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} \Leftrightarrow AM = CN\ (do\ AC = CE) \Leftrightarrow AM^2 = CN^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 = \left(\frac{6R^2 - \sqrt{3}mR}{\sqrt{3}m - 2R}\right)^2 + \left(\frac{7mR - 6\sqrt{3}R^2}{\sqrt{3}m - 2R} - 2\sqrt{3}R\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3m^4 - 4\sqrt{3}Rm^3 + 16\sqrt{3}R^3.m - 48R^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2R)(3m^3 + (6 - 4\sqrt{3})Rm^2 + (12 - 8\sqrt{3})R^2m + 24R^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2R$$

Vậy $$k = \frac{AM}{AC} = \frac{m}{2\sqrt{3}R} = \frac{2R}{2\sqrt{3}R} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Đặt $f(m) = 3m^3 + (6 - 4\sqrt{3})Rm^2 + (12 - 8\sqrt{3})R^2m + 24R^3$.

Ta có : $\sqrt{3}R < m 2\sqrt{3}R \Rightarrow (m + R)^2 < (2\sqrt{3} + 1)^2 R^2$

$\Rightarrow -m^2 - 2Rm + (2\sqrt{3})^2 R^2 > 0$

$\Rightarrow (6 - 4\sqrt{3})Rm^2 + (12 - 8\sqrt{3})R^2m + 24R^3 > 96R^3 - 48\sqrt{3}R^3 > 0$

$\Rightarrow f(m) > 0$

Để kết thúc, xin mời các bạn giải một số bài toán sau bằng phương pháp tọa độ.

Bài 1 : Cho ΔABC cân tại A, BC = a, đường cao AH = h. Gọi K là hình chiếu của B lên cạnh AC. Tìm điều kiện giữa a, h để K thuộc cạnh AC, khi đó tính AK.

Bài 2 : Gọi M là trọng tâm của ΔABC. Chứng minh rằng

$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2)$.

Bài 3 : Cho ΔABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

Bài 4 : Các đường cao của Δ nhọn ABC cắt nhau ở O. Trên đoạn OB và OC người ta lấy hai điểm B_1, C_1 sao cho

$$\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^0$$

Chứng minh rằng $AB_1 = AC_1$ (Đề thi vô địch NewYork 1976).

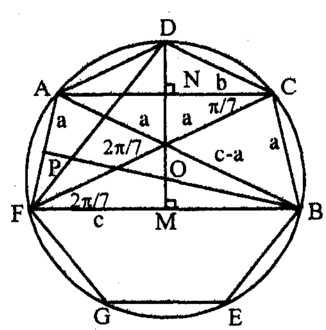
Bài 5 : Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, người ta lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R, S là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AD, AB, BC, CD. Chứng minh rằng PQ vuông góc với RS và giao điểm của chúng nằm trên một trong hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD (Đề thi vô địch Nam Tư 1983).

SUY NGHĨ TỪ MỘT HÌNH THẤT GIÁC ĐỀU

MAI XUÂN THẮNG
Thái Bình

Trong một lần suy nghĩ về các tính chất của hình đa giác đều 7 cạnh ; tôi thấy từ đó có thể suy ra một số bài toán thú vị về các hệ thức trong tam giác. Thật vậy :

Giả sử ADCBEGF là đa giác đều nội tiếp đường tròn tâm O. Ta thấy mỗi cạnh của đa giác trương một cung là $\frac{2\pi}{7}$ và góc nội tiếp cung này là $\frac{\pi}{7}$.



Nếu gọi cạnh của đa giác là a và AB = c ; AC = b. Gọi I là giao điểm của AC và FD. Nối OD cắt AC ở N và BF ở M. Từ đó suy ra OD $\perp$ AC ; OD $\perp$ BF ; đồng thời N, M là trung điểm của AC, BF. Gọi K là giao điểm của AB và CF suy ra K $\in$ OD. Ta thấy tứ giác ACBF là hình thang cân và

$$\widehat{AKF} = \widehat{KAC} + \widehat{ACK} = \frac{2\pi}{7}.$$

Mà $\widehat{AFK} = \dfrac{2\pi}{7} \Rightarrow \Delta AKF$ cân ở A và AK = KC = AF = a

$\Rightarrow$ KF = KB = c – a và BF = CF = AB = c

Trong ΔKNC vuông ta có : $\cos\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{NC}{KC} = \dfrac{b}{a}$ (1)

Trong ΔKMB ta có : $\cos\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{BM}{BK} = \dfrac{c}{2(c-a)}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{b}{2a} = \dfrac{c}{2(c-a)} \Leftrightarrow bc - ab = ac \Leftrightarrow bc = ab + ac$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{abc} = \frac{ab+ac}{abc} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (3)}$$

Vậy ta có bài toán sau :

Bài 1 : Trong ΔABC có BC = a, AC = b, BA = c và $4\hat{A} = 2\hat{B} = \hat{C}$

Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

(Đề 137 và đề 107 của bộ đề tuyển sinh môn Toán)

Tiếp tục suy nghĩ ta có : CI là phân giác của $\widehat{DCF} \Rightarrow \dfrac{ID}{IF} = \dfrac{CD}{CF} = \dfrac{a}{c}$

$$\Rightarrow ID = \frac{ab}{a+c}$$

Đồng thời $\widehat{CID} = \widehat{DCF} = \dfrac{2\pi}{7} \Rightarrow \Delta IDC \sim \Delta CDF$.

$$\Rightarrow \frac{ID}{CD} = \frac{DC}{DF} \Leftrightarrow DC^2 = ID.DF \text{ hay } a^2 = \frac{ab^2}{a+c}$$

$$\Leftrightarrow b^2 = a(a+c) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - \frac{c}{b} \quad (4)$$

Mặt khác, trong ΔFDC có

$$\cos\widehat{DFC} = \frac{MF}{DF} \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{c}{2b} \quad (5)$$

Gọi D là trung điểm của AF $\Rightarrow$ BP $\perp$ AF và có $\cos\widehat{BAP} = \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{a}{2c}$

Vậy $\quad \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{a}{2c}$ (6)

Từ (1), (5) và (6) ta có :

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \quad (7)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \left(\dfrac{b}{a} - \dfrac{c}{b}\right) + \dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c} = a\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) = a.\dfrac{1}{a} = 1$ (8)

Từ đó : $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$ (9)

(Thay (8) vào (7) ta có hệ thức 9). Vậy ta có bài toán :

Bài 2 : Trong ΔABC có $4\hat{A} = 2\hat{B} = \hat{C}$. Chứng minh rằng :

$$\boxed{\begin{array}{l} a)\ \dfrac{a}{c} - \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a} = 1; \\ b)\ \cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2} \end{array}} \qquad (9)$$

(Thi vô địch toán quốc tế tại Ba Lan)

Tiếp tục khai thác các quan hệ giữa a, b, c ta có :

(4) $\Leftrightarrow b^2 = a(a + c) \Leftrightarrow b^2 - a^2 = ac \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{b-a}$ (*)

(3) $\Leftrightarrow ab + ac = bc \Leftrightarrow \dfrac{a}{b-a} = \dfrac{c}{b}$ (**)

Từ (*) và (**) ta có $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow c^2 = b(a + b)$ (10)

Lại thấy :

$$\left.\begin{array}{l} (10) \Leftrightarrow \dfrac{c-b}{a} = \dfrac{b}{c+b} \\ (3) \Leftrightarrow \dfrac{b}{c+b} = \dfrac{a}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{c-b}{a} = \dfrac{a}{c} \Leftrightarrow a^2 = c(c-b) \qquad (11)$$

$$\left.\begin{array}{l} (3) \Leftrightarrow \dfrac{c}{a} = 1 + \dfrac{c}{b} \\ \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 1 - \dfrac{a}{c} \\ \text{và } -\dfrac{b}{c} = -\dfrac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = 2 + \left(\dfrac{c}{b} - \dfrac{a+c}{2}\right)$$

$$= 2 + \frac{c^2 - b(a+b)}{bc} = 2 + 0 = 2 \ (\text{Theo } (10))$$

Vậy ta lại có hệ thức : $\boxed{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = 2}$ (12)

Khi đó (8) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{c} - \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a}\right)^2 = 1^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} - 2.2 = 1 \ (\text{Theo } 12)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} = 5 \qquad (13)$$

$$(13) \Leftrightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + \left(\frac{a}{2c}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{cos^2\frac{\pi}{7} + cos^2\frac{2\pi}{7} + cos^2\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{4}} \qquad (14)$$

Từ (14) ta có bài toán.

Bài 3 *:* Trong ΔABC có $4\hat{A} = 2\hat{B} = \hat{C}$ thì

$cos^2A + cos^2B = cos^2C = \dfrac{5}{4}$

Để kết thúc bài viết này, tôi chỉ muốn nói với các bạn rằng : chỉ bằng kiến thức phổ thông cơ sở đôi khi cũng có thể giải được các bài toán của cấp PTTH nếu ta chịu khó suy luận toán học và rèn luyện tư duy lôgic từ một bài toán cụ thể. Tuy nhiên các đẳng thức trên có thể chứng minh dễ dàng bằng lượng giác, chẳng hạn :

$$cos\frac{\pi}{7} = -cos\frac{8\pi}{7} = 1 - 2cos^2\frac{4\pi}{7}\ ;\ cos\frac{2\pi}{7} = 2cos^2\frac{\pi}{7} - 1$$

$$cos\frac{3\pi}{7} = -cos\frac{4\pi}{7} = 1 - 2cos^2\frac{2\pi}{7}$$

Khi đó :

$$cos\frac{\pi}{7} - cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{3\pi}{7} = 3 - 2\left(cos^2\frac{\pi}{7} + cos^2\frac{2\pi}{7} + cos^2\frac{4\pi}{7}\right) \qquad (15)$$

Thay (9) vào (15) ta có : $cos^2\dfrac{\pi}{7} + cos^2\dfrac{2\pi}{7} + cos^2\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{5}{4}$

(kết quả của 14)

Tóm lại : Trong tam giác ABC có $4\hat{A} = 2\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{4\pi}{7}$ thì ta có các hệ thức giữa các cạnh a, b, c như sau :

1) $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ 2) $\begin{cases} a^2 = c(c - b) \\ b^2 = a(a + c) \\ c^2 = b(a + b) \end{cases}$ 3) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = 2$

4) $\dfrac{a}{c} - \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a} = 1$ 5) $\dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} = 5$

Ngoài các hệ thức trên, các bạn có thể tự chứng minh được các hệ thức sau :

6) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a} + 1 = 2\dfrac{c}{a}$

7) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = \dfrac{2b}{a}$

8) $a^3 + b^3 + c^3 = ab^2 + bc^2 + ca^2$

Với cách suy nghĩ tương tự, chúng ta có thể tìm tòi các hệ thức từ các hình đa giác đều 8 cạnh, 12 cạnh, 18 cạnh….

PHƯƠNG PHÁP TRẢI TỨ DIỆN

TRỊNH VINH NGỌC
Hà Tĩnh

Khi giải các bài toán về tứ diện, ngoài những loại tứ diện với tính chất của nó mà học sinh đã được làm quen như tứ diện vuông, đều, gần đều, trực giao..., còn có những tứ diện với dữ kiện mà cách giải nó tương đối đặc biệt. Nó đòi hỏi học sinh tư duy sắc sảo, biết tìm mối quan hệ trong dữ kiện mới tìm ra lời giải hoặc lời giải đơn giản hơn. Trong bài viết này trình bày suy nghĩ về cách giải đó mà tôi đặt tên là : phương pháp trải tứ diện.

Nội dung chủ yếu của phương pháp này là dựa vào dữ kiện của bài toán đã cho nhất là dữ kiện tổng các góc phẳng bằng 90^0 hoặc 180^0, từ đó khai triển tứ diện, trải tứ diện đó lên một mặt phẳng sao cho phù hợp, tức là được một đa giác có tính chất đặc biệt và giải bài toán đó trên đa giác mới tạo thành.

Bài toán 1 :

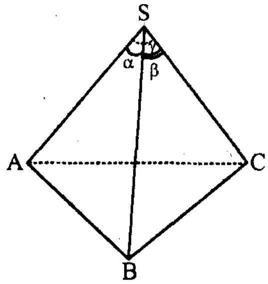
Tứ diện SABC có các mặt SAB, SBC, SCA tương đương và tổng các góc phẳng ở đỉnh S bằng 180^0. Chứng minh tứ diện SABC là tứ diện gần đều.

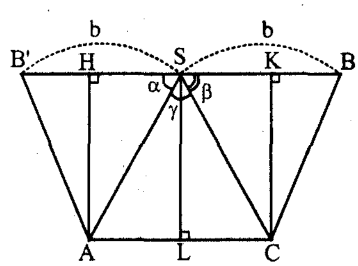
Bài toán này đã có cách giải trong hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh, nhưng tương đối dài và khó hiểu đối với học sinh.

Sau nhiều đêm suy nghĩ khai thác giả thiết tổng các góc phẳng ở đỉnh S bằng 180^0, tôi đã có cách giải sau :

Giải : Cắt tứ diện theo các cạnh SB, AB, BC rồi trải lên mặt phẳng (SAC). Gọi SA = a, SB = b, SC = c. Do dt(SB_1C) = dt(SAB') nên đường cao AH của ΔSAB' bằng đường cao CK của ΔSB_1C.

Mặt khác vì $\widehat{ASB'} + \widehat{B_1SC} + \widehat{CSA} = 180^0$ nên B', S, B_1 thẳng hàng ⇒ tứ giác AHKC là hình chữ nhật ⇒ SL = CK = AH (SL là đường cao của ΔSAC) ⇒ AC = SB = b (do dt (SAC) = dt(SCB_1)) ⇒ tứ giác SB'AC là hình bình hành ⇒ AB' = SC = c. Tương tự SA = B_1C = a. Vậy tứ diện SABC là tứ diện gần đều.

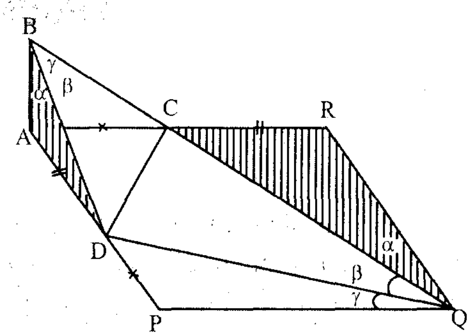




Bài toán 2 : Tứ diện ABCD có các góc phẳng ở đỉnh A bằng 1 vuông và AB = AC + AD. Chứng minh rằng tổng các góc phẳng ở đỉnh B bằng 1 vuông.

(Hình học không gian Sarugin)

Ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp lượng giác bằng cách gọi α, β, γ là 3 góc phẳng ở đỉnh S thì $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ và ta chỉ việc chứng minh cos (α + β) = sinγ như việc xét các tam giác vuông là xong. Điều này không khó khăn lắm xin nhường bạn đọc.



Ở đây tôi muốn trình bày cách giải thứ 2. Bài toán yêu cầu chứng minh $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ nghĩa là tổng α + β + γ bằng 1 góc vuông của 1 hình vuông, 1 hình chữ nhật... Và với giả thiết AB = AC + AD gợi cho ta "lắp ghép" các mặt bên của tứ diện đã cho, và ta có một kết quả thú vị.

Giải : Cắt các mặt bên của tứ diện ABCD rồi ghép lại hình vẽ. Rõ ràng APQR là hình vuông.

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{CBD} + \widehat{DBA} = \widehat{RQD} + \widehat{DQC} + \widehat{CQP} = \frac{\pi}{2} \ (đpcm)$$

Cách chứng minh đơn giản – xin nhường cho các bạn tự làm.

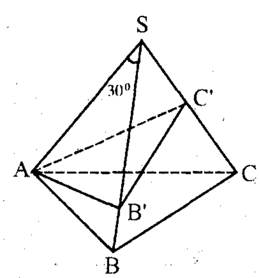
Bài toán 3 : Hình chóp đều SABC đỉnh S có $\widehat{ASB} = 30^0$, AB = a. Lấy B', C' lần lượt thuộc cạnh SB, SC. Xác định vị trí của B', C' sao cho chu vi tam giác AB'C' nhỏ nhất.

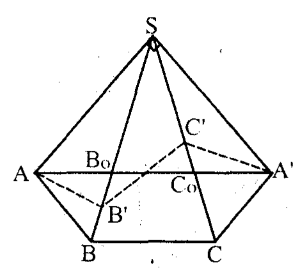
Giải : Cắt tứ diện theo các cạnh SA, AC, AB rồi trải mặt xung quanh (hình vẽ) ta có :

ΔSAA' là tam giác vuông cân. Độ dài chu vi của ΔAB'C' bằng độ dài đường gấp khúc AB'C'A'. Độ dài này ngắn nhất khi và chỉ khi A, B', C', A' thẳng hàng tức là khi $B' \equiv B_0$, $C' \equiv C_0$, tức là ta đã xác định được vị trí của B', C' trên SB, SC.

Để chặt chẽ hơn ta cần tính BB_0, CC_0 . Do $\widehat{ASA'} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{SAB_0} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BAB_0} = 30^0 \Rightarrow \Delta ABB_0$ cân tại A. Áp dụng định lý hàm số sin cho ΔABB_0 ta tính được $BB_0 = \dfrac{2a}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.





Cuối cùng để kết thúc bài viết này, tôi xin nêu lên một bài toán mà chắc các bạn yêu toán đã biết nó và cách giải.

Bài toán 4 : Đề thi học sinh giỏi quốc gia môn Toán 12 năm học 1991 – 1992.

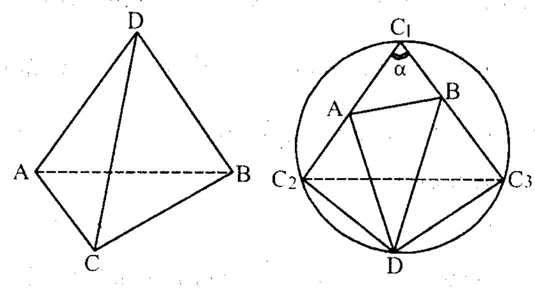
Giả sử tứ diện ABCD thỏa mãn các điều kiện

1) $\widehat{ACD} + \widehat{BCD} = 180^0$

2) Tổng các góc phẳng ở đỉnh A bằng tổng các góc phẳng ở đỉnh B và bằng 180^0. Hãy tính diện tích toàn phần của tứ diện theo AC + CB = k và $\widehat{ACB} = \alpha$.

Bài toán này đã được giải bằng cách quay các ΔCAB, CAD, CBD theo thứ tự quanh các trục AB, AD, BD đến nằm trên mặt phẳng (ABD) để thành các ΔC_1AB, C_2AD, C_3BD sao cho C_1, D nằm khác phía đối với AB ; C_2, B nằm khác phía đối với đường thẳng AC, v.v... (Các bạn có thể xem lời giải trong THTT số tháng 1/1993).

Ở đây do điều kiện tổng các góc phẳng ở đỉnh A và B đều bằng 180^0 gợi cho ta tính thẳng hàng của các đỉnh sau khai triển và điều kiện $\widehat{ACD} + \widehat{BCD} = 180^0$ gợi cho ta điều kiện cho một tứ giác phẳng nội tiếp. Bởi vậy ta có thể giải nó bằng cách trải như sau :



Giải : Cắt tứ diện theo các cạnh CA, CB, CD rồi ghép các ΔCAD, CBD, CAB xuống mặt phẳng (ABD) ta có :

A, C_1, C_2 thẳng hàng

B, C_1, C_3 thẳng hàng

Tứ giác $C_1C_2DC_3$ nội tiếp (hình vẽ).

Đến đây cách tính S_{tp} giống như lời giải ở THTT số tháng 1/1993.

Tôi xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp trong Tổ toán trường PTTH năng khiếu Hà Tĩnh đã góp ý cho bài báo nhỏ này của tôi.

ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY

TRẦN XUÂN ĐÁNG
Trường Lê Hồng Phong, Nam Định

Định nghĩa 1 : Giả sử $f(x)$ là một đa thức với các hệ số hữu tỉ. $f(x)$ được gọi là bất khả quy trên Q nếu $f(x)$ không viết được dưới dạng tích của hai đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 với các hệ số hữu tỉ.

Định nghĩa 2 : Giả sử $f(x)$ là một đa thức với các hệ số nguyên. $f(x)$ được gọi là bất khả quy trên Z nếu $f(x)$ không viết được dưới dạng tích của hai đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 với các hệ số nguyên.

Định nghĩa 3 : Đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên được gọi là nguyên bản nếu và chỉ nếu các hệ số của nó nguyên tố cùng nhau.

Chú ý rằng nếu $f(x)$ là một đa thức với các hệ số hữu tỉ thì có thể viết nó một cách duy nhất dưới dạng

$$f(x) = \frac{a}{b} f_1(x)$$

trong đó $\frac{a}{b}$ là một phân số tối giản (a, b $\in$ Z) và $f_1(x)$ là một đa thức nguyên bản.

Muốn vậy ta quy đồng mẫu số các hệ số của $f(x)$ rồi đặt USCLN của các tử số thành nhân tử. Ta thấy rằng $f(x)$ và $f_1(x)$ có cùng một bậc.

Để chứng minh cách viết đó là duy nhất (xê xích dấu) giả sử $f(x) = \frac{a}{b} f_1(x) = \frac{c}{d} f_2(x)$ trong đó $f_1(x)$ và $f_2(x)$ đều nguyên bản.

Khi đó ta có

$$ad f_1(x) = bc f_2(x)$$

Như vậy $|ad|$ *và* $|bc|$ đều là USCLN của các hệ số của cùng một đa thức với các hệ số nguyên. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bổ đề Gaoxơ : Tích của hai đa thức nguyên bản là một đa thức nguyên bản.

Chứng minh : Thật vật giả sử đã cho các đa thức nguyên bản

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_ix^i + \ldots + a_kx^k \ (a_k \neq 0)$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_jx^j + \ldots + b_mx^m \ (b_m \neq 0)$$

và giả sử

$$f(x).g(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{i+j}x^{i+j} + \ldots + c_{m+k}x^{m+k}$$

Nếu $f(x)$ g(x) không nguyên bản thì tồn tại một số nguyên tố p là ước số chung của tất cả các hệ số $c_0, c_1, \ldots, c_{m+k}$. Vì tất cả các hệ số của $f(x)$ không đồng thời chia hết cho p do $f(x)$ là nguyên bản, nên trong các hệ số $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sẽ có một số đầu tiên, giả sử a_i không chia hết cho p. Tương tự giả sử b_j là hệ số đầu tiên của g(x) không chia hết cho p. Ta có

$$c_{i+j} = \sum_{r+s=i+j} a_r b_s$$

Xét ba trường hợp :

1) $i \geq 1, j \geq 1$. Khi đó

$$\sum_{r+s=i+j} a_r b_s = \sum_{r+s=i+j} a_r b_s + \sum_{r+s=i+j} a_r b_s + a_i b_j$$

Nếu $r < i$ thì $a_r \vdots p$. Nếu $s < j$ thì $b_s \vdots p$.

Mặt khác a_ib_j không chia hết cho p. Vậy c_{i+j} không chia hết cho p

2) $i = 0, j \geq 1$. Khi đó

$$c_{i+j} = c_j = a_0 b_j + \sum_{\substack{r+s<j \\ s<j}} a_r b_s$$

Vậy c_{i+j} không chia hết cho p.

3) $j = 0, i \geq 1$. Tương tự như trường hợp 2 ta cũng có c_{i+j} không chia hết cho p.

4) $i = 0, j \neq 0$. Khi đó $c_0 = a_0 . b_0$ không chia hết cho p.

Trong mọi trường hợp ta đều có c_{i+j} không chia hết cho p. Điều này trái với giả thiết. Vậy $f(x). g(x)$ là nguyên bản.

Định lí 1 : Nếu đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên có bậc $n > 1$ bất khả quy trên Z thì nó cũng bất khả quy trên Q.

Chứng minh : Thật vậy giả sử ngược lại rằng đa thức $f(x)$ khả quy trên Q, tức là $f(x) = f_1(x). f_2(x)$ trong đó $f_1(x), f_2(x)$ là các đa thức với các hệ số hữu tỉ và có bậc nhỏ hơn n.

Ta có $f_i(x) = \frac{a_i}{b_i} g_i(x)$ (i = 1, 2) trong đó $\frac{a_i}{b_i}$ là một phân số tối giản và $g_i(x)$ là một đa thức nguyên bản.

Từ đó $f(x) = \frac{a_1.a_2}{b_1.b_2} g_1(x).g_2(x)$.

Giả sử $\frac{a_1.a_2}{b_1.b_2} = \frac{q}{r}$ với $(q, r) = 1$. Khi đó ta có $f(x) = \frac{q}{r} g_1(x).g_2(x)$.

Nếu c_i là một hệ số nào đó của tích $g_1(x).g_2(x)$ thì $c_i.q$ phải chia hết cho r vì các hệ số của $f(x)$ là những số nguyên. Vì $(q, r) = 1$ nên c_i phải chia hết cho r. Vậy r là một ước số chung của các hệ số của tích $g_1(x).g_2(x)$.

Nhưng theo bổ đề Gaoxơ thì $g_1(x).g_2(x)$ là nguyên bản. Vậy $r = \pm 1$. Từ đó $f(x) = \pm q. g_1(x).g_2(x)$ với $\pm q.g_1(x)$ và $g_2(x)$ là các đa thức với các hệ số nguyên và có bậc nhỏ hơn n. Vậy $f(x)$ là khả quy trên Z, trái với giả thiết. Vậy $f(x)$ bất khả quy trên Q.

Định lí 2 : Cho đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ $(n > 1)$ trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là những số nguyên và một số nguyên tố p thỏa mãn các điều kiện sau :

1) a_n không chia hết cho p

2) $a_0, a_1, \ldots, a_k$ chia hết cho p $(0 \leq k < n)$

3) a_0 không chia hết cho p^2

Nếu $f(x)$ viết được dưới dạng tích của hai đa thức với các hệ số nguyên thì bậc của một trong hai đa thức đó không nhỏ hơn k + 1.

Chứng minh : Giả sử $f(x) = h(x).g(x)$ trong đó

$$h(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$$
$$g(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-m}x^{n-m}$$

Ta có $a_0 = b_0 . c_0$. Vì $a_0 \vdots p$ và không chia hết cho p^2 nên trong hai số b_0, c_0 có một số chia hết cho p và số còn lại không chia hết cho p. Giả sử $b_0 \vdots p$ và c_0 không chia hết cho p. Vì $a_n = b_m . c_{n-m}$ không chia hết cho p nên b_m cũng không chia hết cho p. Gọi i_0 là số nhỏ nhất trong số các số i thỏa mãn b_i không chia hết cho p thì $0 < i_0 \leq m$. Ta có $a_{i_0} = c_0.b_{i_0} + \sum_{\substack{i+j=i_0 \\ 0 \leq i < i_0}} b_ic_j$ không chia hết cho p.

Vậy $i_0 \geq k + 1$. Mặt khác $m \geq i_0$, vậy $m \geq k + 1$ (đpcm) với $k = n - 1$ ta nhận được tiêu chuẩn Aidenstai (Eisenstein) : Cho đa thức $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ($n \geq 1$), trong đó $a_i \in Z$ ($i = 0, 1,\ldots, n$) ; $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ chia hết cho số nguyên tố p ; a_0 không chia hết cho p^2 và a_n không chia hết cho p. Khi đó $f(x)$ bất khả quy trên Q.

Áp dụng định lí 2 ta có thể giải được bài toán sau :

Bài toán : Giả sử $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ trong đó n là một số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $f(x)$ không viết được dưới dạng tích của hai đa thức có bậc không nhỏ thua 1 với các hệ số nguyên. (Đề thi toán quốc tế năm 1993)

Giải : Giả sử $f(x) = f_1(x).f_2(x)$ trong đó $f_1(x), f_2(x)$ là các đa thức với các hệ số nguyên và có bậc không nhỏ thua 1.

Đa thức $f(x)$ thỏa mãn các giả thiết của định lí 2 với $p = 3$, $k = n - 2$. Vậy trong các đa thức $f_1(x)$ và $f_2(x)$ có một đa thức có bậc không nhỏ hơn $n - 1$. Giả sử $f_1(x)$ có bậc không nhỏ hơn $n - 1$. Khi đó $f_2(x)$ có bậc bằng 1. Vậy $f_2(x)$ có nghiệm nguyên ($f_2(x) = x + b$ với $b \in Z$). Giả sử $x = x_0$ ($x_0 \in Z$) là nghiệm nguyên của $f_2(x)$ thì x_0 phải là ước số của 3. Từ đó suy ra $x_0 = \pm 1, \pm 3$. Mặt khác dễ dàng chứng minh được $f_2(1) \neq 0$, $f_2(-1) \neq 0$, $f_2(3) \neq 0$, $f_2(-3) \neq 0$. Điều vô lí này chứng tỏ $f(x)$ không viết được dưới dạng tích của hai đa thức có bậc không nhỏ thua 1 với các hệ số nguyên.

Định lí 3 : Giả sử g(x) là một đa thức có bậc không nhỏ hơn 1 và có các hệ số hữu tỉ. Khi đó với mỗi đa thức $f(x)$ với các hệ số hữu tỉ có một và chỉ một cặp đa thức q(x), r(x) với các hệ số hữu tỉ sao cho $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ và $\deg r(x) < \deg g(x)$ nếu $r(x) \neq 0$.

Chứng minh : Trước hết ta chứng minh bằng quy nạp theo bậc của đa thức $f(x)$ sự tồn tại của cặp đa thức q(x), r(x).

Giả sử $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ ($m \geq 1$, $b_m \neq 0$)

Nếu $f(x) = 0$ hoặc $\deg f(x) < m$ thì chỉ việc chọn $q(x) = 0$ và $r(x) = f(x)$. Giả sử kết luận đúng với mỗi đa thức có bậc nhỏ hơn n ($n \geq m$) và giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ($a_n \neq 0$)

Đặt $f_1(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m}.x^{n-m}.g(x)$. Ta có ngay $f_1(x) = 0$ hoặc $\deg f_1(x) < n$. Theo giả thiết quy nạp có cặp đa thức $q_1(x), r_1(x)$ sao cho $f_1(x) = g(x).q_1(x) + r_1(x)$ trong đó $r_1(x) = 0$ hoặc $\deg r_1(x) < m$.

$$\text{Từ đó } f(x) = g(x)\left[q_1(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right] + r_1(x) = g(x)q(x) + r(x) \text{ với}$$

$$q(x) = q_1x + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m},\ r(x) = r_1(x)$$

Các bạn hãy tự chứng minh tính duy nhất của q(x), $r_1(x)$

Định lí 4 : Cho đa thức $f(x)$ khác 0, có các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là a. Nếu $f(x)$ bất khả quy trên Q thì $f(x)$ là một đa thức có bậc nhỏ nhất với các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là a.

Chứng minh : Vì $f(x)$ khác 0 và có một nghiệm là a nên $\deg f(x) \geq 1$. Giả sử $f_0(x)$ là đa thức với các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là a và có bậc nhỏ nhất. Nếu $\deg f(x) > \deg f_0(x)$ thì theo định lí 3 (chú ý rằng $\deg f_0(x) \geq 1$) tồn tại các đa thức q(x), r(x) với các hệ số hữu tỉ, trong đó hoặc

$r(x) = 0$ hoặc $\deg r(x) < \deg f_0(x)$ và $\deg q(x) \geq 1$. Vì $f(x)$ bất khả quy trên Q nên $r(x) \neq 0$ và $\deg r(x) < \deg f_0(x)$. Ta cũng có $\deg r(x) \geq 1$ vì $r(a) = 0$. Điều này trái với định nghĩa của $f_0(x)$. Vậy $f(x)$ là một đa thức có bậc nhỏ nhất với các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là a. Áp dụng định lí 4 ta có thể giải được bài toán sau :

Bài toán : Tìm đa thức của x có bậc nhỏ nhất với các hệ số nguyên có một nghiệm là $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

(Đề thi chọn HSG PTTH toàn quốc năm học 1983 - 1984)

Hướng dẫn : Đa thức $f(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ sẽ là một đa thức của x có bậc nhỏ nhất với các hệ số nguyên có một nghiệm là $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc :

Bài 1 : Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n số nguyên khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng đa thức $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$ bất khả quy trên Q.

Bài 2 : Tìm đa thức có bậc nhỏ nhất với các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là:

$$\sqrt[3]{\sqrt{2 + 3\sqrt{3}} + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{2 + 3\sqrt{3}} - \sqrt{2}}$$

(Đáp số : $x^4 - 4x^2 - 23$)

ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ TỔNG QUÁT

NGUYỄN MINH HÀ
ĐHSP Hà Nội

Định lí Ptô-lê-mê là định lí nổi tiếng trong hình học phẳng

Định lí 1 (Ptô-lê-tê) : Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A). Khi đó :

$$AB.MC + CA.MB = BC.MA$$

Người ta đã tổng quát định lí 1 thành bất đẳng thức Ptô-lê-mê. Trong bài báo này tôi xin giới thiệu một hướng tổng quát hóa khác của nó.

Hãy cứ xem định lí 1 là định lí Ptô-lê-mê cho tam giác (nội tiếp). Vậy có hay không một định lí Ptô-lê-mê cho đa giác nội tiếp. Để giải quyết vấn đề này, trước hết hãy bắt đầu từ một trường hợp đơn giản mà ta có thể xem nó là định lí Ptô-lê-mê cho đa giác đều (nội tiếp) với số cạnh lẻ.

Định lí 2 : Cho đa giác đều $A_0A_1\ldots A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O), M là một điểm thuộc cung $\overset{\frown}{A_0A_{2n}}$ (không chứa $A_1 ; \ldots ; A_{2n-1}$)

Khi đó :

$$\sum_{0 \leq k \leq n} MA_{2k} = \sum_{1 \leq k \leq n} MA_{2k-1}$$

Chứng minh : Với mọi i = 0, 1, ..., 2n ta có :

$$R^2 = OA_i^2 = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_i})^2$$

$$= OM^2 + MA_i^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA_i} = R^2 + MA_i^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA_i}$$

Suy ra : $MA_i^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA_i} = 0$

$$\Rightarrow MA_i + 2\overrightarrow{OM}.\frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i} = 0$$

Suy ra : $\sum\limits_{0\le k\le n} MA_{2k} - \sum\limits_{1\le k\le n} MA_{2k-1}$

$$+ 2\overrightarrow{OM}.\left(\sum_{0\le k\le n}\frac{\overrightarrow{MA_{2k}}}{MA_{2k}} - \sum_{1\le k\le n}\frac{\overrightarrow{MA_{2k-1}}}{MA_{2k-1}}\right) = 0$$

Nhờ giả thiết $A_0, A_1 \dots A_{2n}$ là đa giác đều nội tiếp đường tròn (O) ta có :

$$\sum_{0\le k\le n}\frac{\overrightarrow{MA_{2k}}}{MA_{2k}} - \sum_{1\le k\le n}\frac{\overrightarrow{MA_{2k-1}}}{MA_{2k-1}} = \vec{0} \qquad (*)$$

Vậy:

$$\sum_{0\le k\le n} MA_{2k} - \sum_{1\le k\le n} MA_{2k-1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{0\le k\le n} MA_{2k} = \sum_{1\le k\le n} MA_{2k-1}$$

Định lí 2 đã được chứng minh. Trong phép chứng minh trên ta thấy đẳng thức (*) đóng vai trò quyết định. Nhận xét này gợi cho ta hướng phát biểu và chứng minh một định lí tổng quát hơn.

Định lí 3 (Ptô-lê-mê tổng quát) : Trong mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_0A_1\dots A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung $\overset{\frown}{A_0A_{2n}}$ (không chứa $A_1; \dots ; A_{2n-1}$).

Khi đó :

$$\sum_{0\le k\le n}\left\{tg\left[\frac{1}{4}OA_{2k-2}, OA_{2k})\right] + tg\left[\frac{1}{4}OA_{2k}, OA_{2k+2})\right]\right\} OA_{2k}$$

$$= \sum_{1\le k\le n}\left\{tg\left[\frac{1}{4}OA_{2k-3}, OA_{2k-1})\right] + tg\left[\frac{1}{4}OA_{2k-1}, OA_{2k+1})\right]\right\} OA_{2k-1}$$

Trong đó :

$A_{-1} = A_{2n}$; $A_{-2} = A_{2n-1}$;
$A_{2n+1} = A_0$; $A_{2n+2} = A_1$

Trong định lí trên cũng như trong các định lí tiếp theo, kí hiệu (Ox, Oy) chỉ góc định hướng giữa hai tia Ox, Oy.

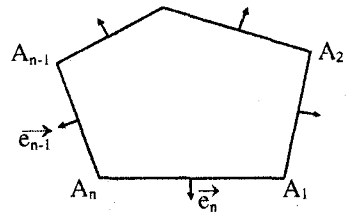
Để chứng minh định lí 3, trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau :

Bổ đề 4 (Định lí "Con nhím") : Trong mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_1A_2\dots A_n$ và hệ véctơ đơn vị : $\vec{e_i}$; $\vec{e_2}$; $-\vec{e_n}$

Xác định như sau :

$$\vec{e_i} = R^{-90^0}\left(\frac{\overrightarrow{A_iA_{i+1}}}{A_iA_{i+1}}\right) \quad i = 1, 2, ..., n$$

Trong đó : $A_{n+1} = A_0$; R^{-90^0} là phép quay véctơ góc quay -90^0



Hình 1

Khi đó : $\sum\limits_{1 \le i \le n} A_iA_{i+1}\vec{e}_i = \vec{0}$

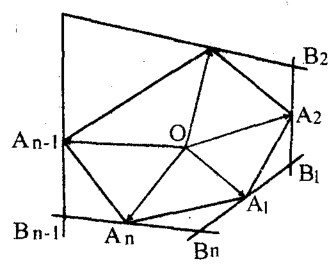
Chứng minh :

Ta có (h.1) $\sum\limits_{1 \le i \le n} A_iA_{i+1}\vec{e}_i$

$$= \sum_{1 \le i \le n} A_iA_{i+1}R^{-90^0}\left(\frac{\overrightarrow{A_iA_{i+1}}}{A_iA_{i+1}}\right) = \sum_{1 \le i \le n} R^{-90^0}\left(A_iA_{i+1}\frac{\overrightarrow{A_iA_{i+1}}}{A_iA_{i+1}}\right)$$

$$= \sum_{1 \le i \le n} R^{-90^0}(\overrightarrow{A_iA_{i+1}}) = R^{-90^0}\left(\sum_{1 \le i \le n} \overrightarrow{A_iA_{i+1}}\right) = R^{-90^0}(\vec{0}) = \vec{0}$$

Hệ quả 5 : Trong mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho O nằm trong $A_1A_2\ldots A_n$. Khi đó :



Hình 2

$$\sum_{0 \le i \le n}\left\{tg\left[\frac{1}{2}(OA_{k-1}, OA_k)\right] + tg\left[\frac{1}{2}(OA_k, OA_{k+1})\right]\right\}\overrightarrow{OA_k} = \vec{0}$$

Trong đó $A_0 = A_n$; $A_{n+1} = A_1$

Chứng minh :

Với mỗi k = 1, 2, ..., n dựng các đường thẳng d_k tiếp xúc với (O) tại A_k (h.2). Đặt

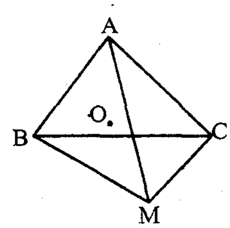
$B_k = d_k \cap d_{k+1}$ (ở đây $d_{n+1} = d_1$).

Xét đa giác $B_1B_2\ldots B_n$. Giả sử R là bán kính của (O).

Ta thấy : $$B_{k-1}B_k = R\left\{tg\left[\frac{1}{2}(OA_{k-1}, OA_k)\right] + tg\left[\frac{1}{2}(OA_k, OA_{k+1})\right]\right\}$$

(Ở đây : $B_{n+1} = B_1$)

Áp dụng bổ đề 4 cho đa giác $B_1B_2\ldots B_n$ và hệ véc tơ $\overrightarrow{OA_1}$; $\overrightarrow{OA_2}$; .... ; $\overrightarrow{OA_n}$ dễ dàng nhận được hệ quả 5.



Hình 3

Nhờ hệ quả 5 và phương pháp chứng minh định lí 1, ta dễ dàng chứng minh được định lí 3. Việc thực hiện chi tiết xin dành cho bạn đọc.

Định lí 3 có đúng là sự tổng quát của định lí 1 hay không ? Ta hãy kiểm tra điều đó (h.4).

Theo định lí 3 ta có :

$$\left\{tg\left[\frac{1}{4}(OC, OB)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA, OC)\right]\right\}MC +$$

$$+\left\{tg\left[\frac{1}{4}(OB, OA)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OC, OB)\right]\right\}MB$$

$$= \left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA, OC)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OB, OA)\right]\right\} MA$$

$$\Rightarrow \left(tg\frac{C+B}{2} + tg\frac{A+C}{2}\right)MC + \left(tg\frac{B+A}{2} + tg\frac{C+B}{2}\right)MB$$

$$= \left(tg\frac{A+C}{2} + tg\frac{B+A}{2}\right)MA$$

Từ đó dễ dàng suy ra :

$$\sin C.MC + \sin B.MB = \sin A.MA$$

$$\Rightarrow \quad AB.MC + CA.MB = BC.MA$$

Như vậy, mục tiêu ban đầu của ta đã được thực hiện. Tuy nhiên để cho hoàn chỉnh vấn đề đang xét, xin giới thiệu một định lí nữa. Nó là sự tương tự của định lí 3 cho trường hợp đa giác nội tiếp với số cạnh chẵn.

Định lí 6 : Trên mặt phẳng định hướng cho đa giác $A_0A_1 \ldots A_{2n-1}$ nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung A_0A_{2n-1} (không chứa $A_1, \ldots A_{2n-2}$). Khi đó :

$$\left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-1}, OA_0)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA_0, OA_2)\right]\right\} MA_0 +$$

$$+ \sum_{1\le k\le n-2} \left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2k-2}, OA_{2k}\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2k}, OA_{2k+2})\right]\right\} MA_{2k}$$

$$+ \left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-4}, OA_{2n-2}\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-2}, OA_1\right]\right\} MA_{2n-2}$$

$$= \left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-2}, OA_1\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA_1, OA_3)\right]\right\} MA_1$$

$$+ \sum_{2\le k\le n-1} \left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2k-3}, OA_{2k-1})\right] +\right.$$

$$\left. + tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2k-1}, OA_{2k+1})\right]\right\} MA_{2k-1} +$$

$$+ \left\{tg\left[\frac{1}{4}(OA_1, OA_3)\right] + tg\left[\frac{1}{4}(OA_{2n-1}, OA_0)\right]\right\} MA_{2n-1}$$

Để bạn đọc hiểu rõ ý nghĩa của định lí này xin phát biểu một hệ quả đơn giản nhất của nó.

Hệ quả 7 : Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thuộc cung $\overset{\frown}{AD}$ (không chứa B, C). Khi đó :

$$MA - MD = (\sqrt{2} + 1)(MB - MC)$$

Trước khi kết thúc xin nêu một câu hỏi. Liệu có hay không các bất đẳng thức Ptô-lê-mê tổng quát mà các định lí 3 và 6 chỉ là trường hợp đẳng thức của chúng. Mong bạn đọc cùng quan tâm suy nghĩ về vấn đề này.

ÁP DỤNG MỘT TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC

NGUYỄN PHÚ LỘC
Cần Thơ

Trong bài báo này, chúng tôi nhấn mạnh đến một tính chất của hàm số liên tục với việc ứng dụng tính chất này vào giải vài bài toán.

1. Tính chất :

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn [a, b] và phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trên đoạn [a, b] thì $f(x) > 0$ với $\forall x \in [a, b]$ hay $f(x) < 0$ với $\forall x \in [a, b]$.

Chứng minh

Giả sử tồn tại x_1, x_2 thuộc đoạn [a, b] với $x_1 < x_2$ và $f(x_1).f(x_2) \le 0$, vì f liên tục trên đoạn $[x_1, x_2]$ nên $\exists c \in [x_1, x_2]$ sao cho $f(c) = 0$; mâu thuẫn vì $f(x) = 0$ vô nghiệm trên đoạn [a, b]. Vậy $f(x) > 0\ \forall x \in [a, b]$ hay $f(x) < 0\ \forall x \in [a, b]$.

2. Áp dụng

Bài toán 1 : Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{9-x}$

Giải

Miền xác định : [4, 9]

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{9-x} - \sqrt{x-4}}{2\sqrt{x-4}.\sqrt{9-x}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$$

Ta có $$f'(5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

$$f'(8) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0$$

và vì hàm số $f'(x)$ liên tục trên các khoảng $\left(4\ ;\ \frac{13}{2}\right)$ *và* $\left(\frac{13}{2},\ 9\right)$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	4	5	$\frac{13}{2}$	8	9
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$\sqrt{5}$	↗	$2\sqrt{\frac{5}{2}}$	↘	$\sqrt{5}$