

ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 9 – PHÂN SỐ

CHỦ ĐỀ 1: HỆ THỐNG KIẾN THỨC CƠ BẢN

PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Số có dạng $\frac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ gọi là phân số.

Số nguyên n được đồng nhất với phân số $\frac{n}{1}$.

Tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{a.m}{b.m} = \frac{a:n}{b:n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}, m, n \neq 0$ và $n \in \text{ƯC}(a, b)$.

Nếu $(a, b) = 1$ thì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Nếu $\frac{m}{n}$ là dạng tối giản của phân số $\frac{a}{b}$ thì tồn tại số nguyên k sao cho $a = mk, b = nk$.

PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Áp dụng các tính chất chia hết để giải các bài toán về phân số

I.Phương pháp giải

Bài toán tổng quát: Tìm số tự nhiên n sao cho $\frac{A(n)}{B(n)}$ có giá trị nguyên.

Cách làm:

$$\frac{A(n)}{B(n)} = \frac{1}{a} \left(b + \frac{d}{C(n)} \right) \quad (a, b, d \in \mathbb{Z}) \Rightarrow C(n) \in \text{Ư} \left(\frac{d}{a} \right).$$

Nếu $a = 1$ ta tìm được n và kết luận.

Nếu $a \neq 1$ ta tìm được n cần thử lại rồi kết luận.

Bài toán tổng quát: Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên n để phân số tối giản hoặc rút gọn được” ta làm như sau:

Gọi d là ước nguyên tố của tử và mẫu.

Dùng các phép toán cộng, trừ, nhân để khử n để từ đó tìm d .

Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên n để phân số tối giản” ta tìm n để tử số hoặc mẫu số không chia hết cho các ước nguyên tố.

Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được” ta tìm n để tử số hoặc mẫu số chia hết cho các ước nguyên tố.

II. Bài toán

Bài 1: Cho $A = \frac{n-1}{n+4}$

- a) Tìm n nguyên để A là một phân số
b) Tìm n nguyên để A là một số nguyên.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

a) Để A là phân số thì $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -4 \end{cases}$

b) Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì

$$(n-1):(n+4) \Rightarrow (n+4-5):(n+4) \Rightarrow [(n+4)-5]:(n+4)$$

Mà $(n+4):(n+4) = 1$ nên $5:(n+4) \Rightarrow n+4 \in U(5)$.

$U(5) = \{\pm 1, \pm 5\}$

Ta có bảng sau:

$n+4$	1	-1	5	-5
n	-3	-5	1	-9
A	-4	6	0	2

Vậy $n \in \{-9, -5, -3, 1\}$.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Để phân số $\frac{A}{n}$ có giá trị là một số nguyên thì

$$(n+10):(2n-8) \Rightarrow (n+10):(n-4) \Rightarrow [(n-4)+14]:(n-4) \Rightarrow 14:(n-4)$$

$$\Rightarrow n-4 \in \mathbb{U}^{(14)}$$

$$\mathbb{U}^{(14)} = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14 \}$$

Mặt khác, n là số tự nhiên nên $n-4 \geq -4 \Rightarrow n-4 \in \{ -2; -1; 1; 2; 7; 14 \}$

Ta có bảng sau:

$n-4$	1	-1	2	-2	7	14
n	5	3	6	2	11	18
A	$\frac{15}{2}$ (loại)	$\frac{13}{-2}$ (loại)	$\frac{16}{4}=4$	-3	$\frac{21}{14}$ (loại)	1

Vậy $n \in \{ 2; 6; 18 \}$

Bình luận:

- Ngoài cách lập bảng trên ta có thể để ý rằng:

$$(n+10):(2n-8) \Rightarrow (n+10):[2(n-4)] \Rightarrow (n+10):2$$

Kết hợp với $(n-4) \in \{ -2; -1; 1; 2; 7; 14 \} \Rightarrow n \in \{ 2; 3; 5; 6; 11; 18 \} \Rightarrow n \in \{ 2; 6; 18 \}$

- Đối với bài toán trên với $n \in \{ 5; 3; 11 \}$ đều là số nguyên nhưng khi thay vào $\frac{A}{n}$ thì không được giá trị nguyên vì: theo bài ra thì $(n+10):(2n-8) \Rightarrow (n+10):(n-4)$ nhưng không có điều ngược lại.

Bài 3: Chứng minh rằng phân số $\frac{2n+3}{4n+8}$ tối giản với mọi số tự nhiên n .

Phân tích:

Để chứng minh một phân số là phân số tối giản thì ta cần chứng minh ước chung lớn nhất của tử và mẫu phải bằng 1.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

$$(2n+3, 4n+8) = d \Rightarrow \begin{cases} 2n+3:d \\ 4n+8:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6:d \\ 4n+8:d \end{cases} \Rightarrow 2:d \Rightarrow d \in \{1, 2\}$$

Giả sử ƯCLN

Vì $2n+3$ là số tự nhiên lẻ nên $d \neq 2$.

Vậy $d=1$ nên phân số $\frac{2n+3}{4n+8}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Gọi d là ước nguyên tố của $21n+3$ và $6n+4$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (21n+3):d \\ (6n+4):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (42n+6):d \\ (42n+28):d \end{cases} \Rightarrow 22:d \Rightarrow d \in \{2, 11\}$$

Nếu $d=2$ ta thấy $(6n+4):2 \forall n$ còn $(21n+3):2$ khi n lẻ.

Nếu $d=11$ thì $(21n+3):11 \Rightarrow (22n-n+3):11$ hay $22n-(n-3) \Rightarrow (n-3):11 \Rightarrow n-3=11k$
 $\Rightarrow n=11k+3 (k \in \mathbb{N})$

Với $n=11k+3$ thì $6n+4=6(11k+3)+4=(66k+22):11 \Rightarrow (6n+4):11$

Vậy n lẻ hoặc $n=11k+3$ thì phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Bài 5: Tìm các số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho: $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}, \frac{b}{c} = \frac{12}{21}, \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$

Lời giải:

Điều kiện: $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \\ \frac{b}{c} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \\ \frac{c}{d} = \frac{6}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3m \\ b = 5m = 4n \\ c = 7n = 6k \\ d = 11k \end{cases} \quad (m, n, k \in \mathbb{N}^*)$$

Suy ra $\begin{cases} 4n : 5 \\ 7n : 6 \end{cases}$ mà $(4, 5) = 1, (6, 7) = 1 \Rightarrow \begin{cases} n : 5 \\ n : 6 \end{cases} \Rightarrow n \in BC(5, 6)$ mặt khác a, b, c, d nhỏ nhất nên

$$n = BCNN(5, 6) \Rightarrow n = 5 \cdot 6 = 30 \Rightarrow m = 24; k = 35$$

$$\Rightarrow a = 72; b = 120; c = 210; d = 385.$$

Bài 6: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Cách 1:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow (n+3):[2(n-1)] \Rightarrow (n+3):(n-1) \Rightarrow [(n-1)+4]:(n-1) \Rightarrow 4:(n-1)$$

Suy ra $n-1$ là ước của 4.

U(4) = $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ mặt khác n là số tự nhiên nên $n-1 \geq -1$ nên $n-1 \in \{-1; 1; 2; 4\}$

Ta có bảng sau:

$n-1$	-1	1	2	4
n	0	2	3	5

$\frac{n+3}{2n-2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{8}=1$
	Loại	Loại		

Vậy $n=5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Cách 2:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow 2(n+3):2n-2 \Rightarrow (2n+6):(2n-2) \Rightarrow (2n-2+8):(2n-2) \Rightarrow 8:(2n-2) \Rightarrow 4:(n-1)$$

Suy ra $n-1$ là ước của 4

Ư $(4) = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 4 \}$ mặt khác n là số tự nhiên nên $n-1 \geq -1$ nên $n-1 \in \{ -1; 1; 2; 4 \}$

Ta có bảng sau:

$n-1$	-1	1	2	4
n	0	2	3	5
$\frac{n+3}{2n-2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{8}=1$
	(loại)	(loại)		

Vậy $n=5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Cách 3:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow (n+3):[2(n-1)] \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ (n+3):(n-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ [(n-1)+4]:(n-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ 4:(n-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ n-1 \in \{\pm 4, \pm 2, \pm 1\} \\ n-1 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ n \in \{5, 3, 2, 0\} \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow n=5$$

Vậy $n=5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Bài 7: Tìm số nguyên n sao cho:

a) $\frac{n+7}{3n-1}$ là số nguyên.

b) $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên.

Lời giải:

a) Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{n+7}{3n-1}$ có giá trị là một số nguyên thì

$$(n+7):(3n-1) \Rightarrow 3(n+7):(3n-1) \Rightarrow (3n+21):(3n-1) \Rightarrow (3n-1+22):(3n-1)$$

$$\Rightarrow 22:(3n-1) \Rightarrow 3n-1 \in \text{Ư}(22)$$

$$\text{Ư}(22) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22\}$$

Ta có bảng sau:

$3n-1$	1	-1	2	-2	11	-11	22	-22
n	$\frac{2}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	0	1	$-\frac{1}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	4	$-\frac{10}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	$\frac{23}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	-7
A		-7	4		1	$-\frac{5}{7}$		0

						(loại)		
--	--	--	--	--	--	--------	--	--

Vậy $n \in \{0; 1; 4; -7\}$ thì $\frac{n+7}{3n-1}$ có giá trị nguyên.

b) Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên thì

$$(3n+2):(4n-5) \Rightarrow 4(3n+2):(4n-5) \Rightarrow (12n+8):(4n-5) \quad (12n-15+23):(4n-5)$$

hay

$$\Rightarrow [3(4n-5)+23]:(4n-5)$$

Mà $3(4n-5):(4n-5)$ nên $23:(4n-5) \Rightarrow 4n-5 \in U^{(23)}$.

$$U^{(23)} = \{\pm 1; \pm 23\}$$

Ta có bảng sau:

$4n-5$	1	-1	23	-23
n	$\frac{3}{2}$	1	7	$-\frac{9}{2}$
	(loại vì $n \in \mathbb{Z}$)			(loại vì $n \in \mathbb{Z}$)
A		-5	1	0
		(loại)		

Vậy $n=7$ thì $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên.

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$.

a) Có giá trị là số tự nhiên.

b) Là phân số tối giản.

c) Phân số A rút gọn được với $150 < n < 170$.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

a) Để phân số A là số tự nhiên thì

$$(8n+193):(4n+3) \quad (8n+6+187):(4n+3) \Rightarrow [2(4n+3)+187]:(4n+3)$$

hay

$$2(4n+3):(4n+3) \Rightarrow 187:(4n+3) \Rightarrow (4n+3) \in (187)$$

Mà U

$$(23) = \{ \pm 11; \pm 17; \pm 187 \}$$

U

Mà n là số tự nhiên nên $4n+3 \geq 0$ hay $n \geq -\frac{3}{4}$ suy ra $n \in \{11; 17; 187\}$

Ta có bảng sau:

$4n+3$	11	17	187
n	2	$\frac{7}{2}$	46
		(loại vì $n \in \mathbb{N}$)	
A	19		3

Vậy $n \in \{2; 46\}$ thì $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ là số tự nhiên.

b) Gọi d là ước nguyên tố của $8n+193$ và $4n+3$ thì:

$$\begin{cases} 8n+193:d \\ 4n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n+193:d \\ 2(4n+3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n+193:d \\ 8n+6:d \end{cases} \Rightarrow [(8n+193)-(8n+6)] : d \Rightarrow 187:d$$

$$\Rightarrow d \in \{11; 17\} \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } d \text{ là số nguyên tố.}$$

Với $d=11$ ta có $(4n+3):11 \Rightarrow (4n+3-11):11 \Rightarrow (4n-8):11 \Rightarrow 4(n-2):11 \Rightarrow (n-2):11$

Do đó $n - 2 = 11k \ (k \in \mathbb{N})$ hay $n = 11k + 2 \ (k \in \mathbb{N})$

Với $d = 17$ ta có $(4n + 3) : 17 \Rightarrow (4n + 3 + 17) : 17 \Rightarrow (4n + 20) : 17 \Rightarrow 4(n + 5) : 17 \Rightarrow (n + 5) : 17$

Do đó $n + 5 = 17m \ (m \in \mathbb{N})$ hay $n = 17m - 5 \ (m \in \mathbb{N}^*)$

Vậy với $n \neq 11k + 2 \ (k \in \mathbb{N})$ và $n \neq 17m - 5 \ (m \in \mathbb{N}^*)$ thì phân số $A = \frac{8n + 193}{4n + 3}$ tối giản.

c) Từ câu b) ta có:

Để phân số $A = \frac{8n + 193}{4n + 3}$ rút gọn được thì $n = 11k + 2 \ (k \in \mathbb{N})$ và $n \neq 17m - 5 \ (m \in \mathbb{N}^*)$

Vì $150 < n < 170$ nên:

TH1: $150 < 11k + 2 < 170 \Rightarrow 148 < 11k < 168 \Rightarrow k \in \{14; 15\}$

Với $k = 14$ thì $n = 156$

Với $k = 15$ thì $n = 167$

TH2: $150 < 17m - 5 < 170 \Rightarrow 155 < 17m < 175 \Rightarrow m = 10$

Với $m = 10$ thì $n = 165$

Vậy $n \in \{156; 165; 167\}$ thì phân số $A = \frac{8n + 193}{4n + 3}$ rút gọn được.

Bài 9: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ có thể rút gọn được.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Gọi d là ước nguyên tố của $18n + 3$ và $21n + 7$ thì:

$$\begin{cases} 18n + 3 : d \\ 21n + 7 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n + 3) : d \\ 6(21n + 7) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 126n + 21 : d \\ 126n + 42 : d \end{cases} \Rightarrow [(126n + 42) - (126n + 21)] : d \Rightarrow 21 : d$$

$\Rightarrow d \in \{3; 7\}$ với $n \in \mathbb{N}$ và d là số nguyên tố.

Với $d=3$ mà $18n+3:3 \forall n \in \mathbb{N}$ nên để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ có thể rút gọn được thì $21n+7:3$

Mà $21n+7 \not\vdots 3 \forall n \in \mathbb{N}$ (vì $21n:3$ và $7 \not\vdots 3$) $\Rightarrow d \neq 3$

Với $d=7$ thì $21n+7:7 \forall n$ nên để phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ rút gọn được thì

$$18n+3:7 \Rightarrow 21n - (3n-3):7 \Rightarrow 3(n-1):7 \Rightarrow n-1:7 \Rightarrow n-1=7k \Rightarrow n=7k+1 (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy với $n=7k+1 (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{18n+3}{21n+7}$ rút gọn được.

Bài 10: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên thì

$$(4n+5):(2n-1) \quad (4n-2+7):(2n-1) \Rightarrow [2(2n-1)+7]:(2n-1)$$

hay

$$2(2n-1):(2n-1) \Rightarrow 7:(2n-1) \Rightarrow (2n-1) \in (7)$$

Mà

U

$$(7) = \{ \pm 1; \pm 7 \}$$

U

Ta có bảng sau:

$2n-1$	-1	1	-7	7
n	0	1	-3	4
A	-5	9	1	7

Vậy $n \in \{0; 1; -3; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên.

Bài 11: Cho biểu thức : $A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3}$. Tìm giá trị của n để:

a) $\frac{A}{n-3}$ là một phân số.

b) $\frac{A}{n-3}$ là một số nguyên.

Lời giải:

$$A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3} = \frac{2n+1+3n-5-(4n-5)}{n-3} = \frac{n+1}{n-3}$$

Ta có:

a) Để $\frac{n+1}{n-3}$ là phân số thì $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 3 \end{cases}$

b) Để $\frac{n+1}{n-3}$ là số nguyên thì

$$(n+1):(n-3) \quad (n-3+4):(n-3) \quad \text{hay} \quad [(n-3)+4]:(n-3)$$

$$(n-3):(n-3) \Rightarrow 4:(n-3) \Rightarrow (n-3) \in (4)$$

Mà

U

$$(4) = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 4 \}$$

U

Ta có bảng sau:

$n-3$	1	-1	2	-2	4	-4
n	4	2	5	1	7	-1
A	5	-3	3	-1	2	0

Vậy $n \in \{ -1; 1; 2; 4; 5; 7 \}$ thì $\frac{n+1}{n-3}$ là số nguyên.

Bài 12: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì :

a) $\frac{8a+19}{4a+1}$ có giá trị nguyên

b) $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Điều kiện: $a \in \mathbb{N}$

a) Để $\frac{8a+19}{4a+1}$ là số nguyên thì

$$(8a+19):(4a+1) \quad (8a+2+17):(4a+1) \quad [2(4a+1)+17]:(4a+1)$$

hay hay

Mà $2(4a+1):(4a+1) \Rightarrow 17:(4a+1) \Rightarrow (4a+1) \in (17)$

U

U $(17) = [\pm 1; \pm 17]$.

Ta có bảng sau:

$4a+1$	1	- 1	17	- 17
a	0	$-\frac{1}{2}$ (loại vì $a \in \mathbb{N}$)	4	$-\frac{9}{2}$ (loại vì $a \in \mathbb{N}$)
A	19		3	

Vậy $a \in \{0, 4\}$ thì $\frac{8a+19}{4a+1}$ là số nguyên.

a) Ta có:
$$\frac{5a-17}{4a-23} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4a-17}{4a-23} = \frac{5}{4} \cdot \frac{(4a-23)+4}{4a-23} = \frac{5}{4} + \frac{4}{4(4a-23)}$$

Để $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất thì $4a-23$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $a \in \mathbb{N}$ nên $4a-23=1 \Rightarrow 4a=24 \Rightarrow a=6$.

Vậy $a=6$ thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Bài 13: Tìm x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{6}{y} = \frac{z}{10}$ và $x+z=7+y$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{z}{10} \Rightarrow x = \frac{3}{10}z$

$$\frac{y}{6} = \frac{z}{10} \Rightarrow y = \frac{6}{10}z = \frac{3}{5}z$$

Theo đề:

$$x + z = 7 + y$$

$$\frac{3}{10}z + z = 7 + \frac{3}{5}z$$

$$\frac{3}{10}z + z - \frac{3}{5}z = 7$$

$$\frac{7}{10}z = 7$$

$$z = 10$$

Suy ra $x = \frac{3}{10} \cdot 10 = 3; y = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$

Vậy $x = 3; y = 6; z = 10$.

Bài 14: Tìm các số nguyên x, y sao cho $\frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$.

Lời giải: Ta có:

$$\frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{y}{3}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{2y}{6}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{5 - 2y}{6}$$

Do đó: $x(5 - 2y) = 18 = 2 \cdot 3^2$.

Do x, y là các số nguyên nên $5 - 2y$ là ước của 18, mặt khác $5 - 2y$ là số lẻ. Ước lẻ của 18 là: 1; -1; 3; -3; 9; -9. Ta có:

$5 - 2y$	1	-1	3	-3	9	-9
$2y$	4	6	2	8	-4	14
y	2	3	1	4	-2	7
x	18	-18	6	-6	2	-2

Vậy có sáu cặp số x, y ở bảng trên thỏa mãn bài toán.

Bài 15: Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{2+3}$.

Lời giải:

Ta luôn có:

$$\frac{a}{2} \geq \frac{a}{5} \quad (\text{xảy ra dấu bằng với } a=0)$$

$$\frac{b}{3} \geq \frac{b}{5} \quad (\text{xảy ra dấu bằng với } b=0)$$

Do đó: $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \geq \frac{a}{5} + \frac{b}{5} = \frac{a+b}{5}$.

Xảy ra $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{5}$ chỉ trong trường hợp $a=b=0$.

Dạng 2: Tìm phân số biết mối liên hệ giữa tử và mẫu

Một số điều kiện cho trước thường gặp:

- ① Biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.
- ② Viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu).
- ③ Liên hệ về phép chia giữa phân số cần tìm với phân số đã cho.
- ④ Biết phân số bằng phân số nào đó và biết quan hệ ƯCLN(Tử, Mẫu) hoặc tổng (hiệu) của tử và mẫu.
- ⑤ Cộng một số vào tử hoặc mẫu được một phân số mới....

Phương pháp giải:

- Nếu bài toán cho tử số (mẫu số), biến đổi sao cho ba phân số đồng tử (đồng mẫu) rồi so sánh các phân số ta tìm được mẫu số (tử số) còn thiếu.
- Ở dạng toán viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu) ta phải tìm được bộ số thuộc các ước của mẫu sao cho tổng của chúng bằng tử. Khi đó ta tìm được bộ phân số có tổng bằng phân số ban đầu, các phân số này có tử số là ước của mẫu nên khi viết dưới dạng tối giản đều có tử số bằng 1.
- Từ các dữ kiện bài toán ta vận dụng linh hoạt các tính chất của phân số tối giản với tính chia hết để giải toán.

- *Dạng toán: Tìm phân số bằng phân số $\frac{a}{b}$ ($a, b > 0$), biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là c , ta tìm phân số tối giản của $\frac{a}{b}$ sau đó nhân cả tử và mẫu phân số tối giản với c ta được số cần tìm.*

Bài 1: Tìm phân số có tử là 5, biết rằng phân số đó lớn hơn $-\frac{11}{12}$ và nhỏ hơn $-\frac{11}{15}$.

Phân tích:

Do phân số có tử số bằng 5 nên ta có thể gọi dạng phân số cần tìm là $\frac{5}{x}$, sau đó ta biến đổi cả ba phân số trên có cùng tử số. Khi so sánh hai phân số cùng tử, phân số nào có mẫu số lớn hơn thì nhỏ hơn. Khi đó ta tìm được khoảng giá trị của x và chọn được giá trị x phù hợp.

Lời giải:

Gọi mẫu phân số cần tìm là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

Ta có: $-\frac{11}{12} < \frac{5}{x} < -\frac{11}{15} \Rightarrow \frac{55}{-60} < \frac{55}{11x} < \frac{55}{-75} \Rightarrow -75 < 11x < -60 \Rightarrow x = -6$.

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$.

Bình luận: Bài toán thuộc dạng biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.

Bài 2: Tìm phân số có mẫu là 12 , biết rằng phân số đó lớn hơn $\frac{7}{13}$ và nhỏ hơn $\frac{11}{5}$.

Lời giải:

Gọi tử phân số cần tìm là x

Ta có: $\frac{7}{13} < \frac{x}{12} < \frac{11}{5} \Rightarrow \frac{420}{780} < \frac{65x}{780} < \frac{1716}{780} \Rightarrow 420 < 65x < 1716 \Rightarrow x \in \{7; 8; 9; \dots; 25; 26\}$.

Vậy các phân số cần tìm là: $\frac{7}{12}; \frac{8}{12}; \frac{9}{12}; \dots; \frac{25}{12}; \frac{26}{12}$.

Bài 3: Hãy viết phân số $\frac{11}{15}$ dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng 1 và có mẫu số khác nhau.

Phân tích: Nhận thấy nếu mẫu số bằng 15, $U^{(15)} = \{1; 3; 5; 15\}$ ta không tìm được bộ ba số nào có tổng bằng 11. Lắp lại cách thử này đối với mẫu và tử của phân số khi nhân cả tử và mẫu của phân số với cùng một số cho đến khi tìm được bộ số thỏa mãn. Dễ thấy khi nhân cả tử và mẫu phân số với 4 ta được phân số $\frac{44}{60}$, $U^{(60)} = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; 15; 20; 30; 60\}$ khi đó ta tìm được bộ ba số cộng với nhau bằng 44 là $\{4; 10; 30\}$.

Lời giải:

$$\frac{11}{15} = \frac{44}{60} \Rightarrow U^{(60)} = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; 15; 20; 30; 60\}$$

$$30 + 10 + 4 = 44 \Rightarrow \frac{44}{60} = \frac{10}{60} + \frac{30}{60} + \frac{4}{60} \Rightarrow \frac{11}{15} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{15}$$

Bài 4: Hãy viết phân số $\frac{5}{3}$ dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng 1 và có mẫu số khác nhau.

Lời giải:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} \Rightarrow U^{(6)} = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$6 + 3 + 1 = 10 \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

Bài 5: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất (với $\frac{a}{b} > 0$) biết khi chia $\frac{a}{b}$ cho $\frac{7}{15}$ và $\frac{12}{25}$ được thương là các số nguyên.

Phân tích:

Do tính chất chia hết ta có: $\frac{a}{b}$ chia hết cho $\frac{7}{15}$ nên $\frac{15a}{7b}$ là số nguyên, vậy a chia hết cho 7, 15 chia hết cho b . Tương tự, $\frac{a}{b}$ chia hết cho $\frac{12}{25}$ nên $\frac{25a}{12b}$ là số nguyên, vậy a chia hết cho 12, 25 chia hết cho b . Do tính chất của phân số tối giản và lớn hơn 0 nên ta có $a = \text{BCNN}(7, 12)$ và $b = \text{UCLN}(15, 25)$.

Lời giải:

Vì $\frac{a}{b}$ tối giản nên $a = \text{ƯCLN}(a, b) = 1$. và $\frac{a.15}{b.7}; \frac{a.25}{b.12}$ là các số nguyên nên a chia hết cho 7 và 12 còn 15 và 25 chia hết cho b .

Do đó $a \in \text{BC}(7, 12)$ và $b \in \text{ƯC}(15, 25)$.

Vì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn 0 nên $a = \text{BCNN}(7, 12)$ và $b = \text{ƯCLN}(15, 25)$ nên $a = 84; b = 5$ Do đó phân số cần tìm là $\frac{84}{5}$.

Bài 6: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất (với $\frac{a}{b} > 0$) biết khi chia $\frac{a}{b}$ cho $\frac{9}{10}$ và $\frac{11}{15}$ được thương là các số nguyên.

Lời giải:

Vì $\frac{a}{b}$ tối giản nên $a = \text{ƯCLN}(a, b) = 1$. và $\frac{a.10}{b.9}; \frac{a.15}{b.11}$ là các số nguyên nên a chia hết cho 9 và 11 còn 10 và 15 chia hết cho b .

Do đó $a \in \text{BC}(9, 11)$ và $b \in \text{ƯC}(10, 15)$.

Vì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn 0 nên $a = \text{BCNN}(9, 11)$ và $b = \text{ƯCLN}(10, 15)$ nên $a = 99; b = 5$ Do đó phân số cần tìm là $\frac{99}{5}$.

Bài 7: Tìm phân số bằng phân số $\frac{20}{39}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 36.

Lời giải:

Ta thấy $\text{ƯCLN}(20, 39) = 1$. Suy ra phân số $\frac{20}{39}$ là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 36.

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{20}{39}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 36. Vậy phân số cần tìm là $\frac{20.36}{39.36} = \frac{720}{1404}$.

Bài 8: Tìm phân số bằng phân số $\frac{15}{20}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 14.

Lời giải:

Ta thấy ƯCLN $(15, 20) = 5$. Suy ra $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ và $\frac{3}{4}$ là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 14.

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{3}{4}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 14. Vậy phân số cần tìm là $\frac{3.14}{4.14} = \frac{42}{56}$.

Bài 9: Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu ?

Lời giải:

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số ta được phân số $\frac{a+b}{b+b} = \frac{a+b}{2b}$.

Để $\frac{a+b}{2b}$ gấp 2 lần phân số lúc đầu thì $a+b$ phải bằng 4 lần a

$\Rightarrow$ Mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{1}{3}$.

Bình luận: Từ giả thiết bài toán ta tìm được mối liên hệ giữa tử và mẫu. Từ đó tìm được phân ban đầu.

Bài 10: Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng tử số vào tử số và cộng tử số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, giảm 6 lần phân số ban đầu ?

Lời giải:

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng tử số vào tử số và cộng tử số vào mẫu số ta được phân số

$$\frac{a+a}{b+a} = \frac{2a}{a+b}.$$

Để $\frac{2a}{a+b}$ giảm 6 lần phân số ban đầu thì $a+b$ phải bằng 12 lần b

$\Rightarrow$ Tử số a phải gấp 11 lần mẫu số b .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{11}{1}$.

Bài 11: Tìm các số tự nhiên a và b biết rằng: $\frac{a}{b} = \frac{15}{35}$; $(a,b).BCNN(a,b) = 3549$
UCLN

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \Rightarrow a = 3k; b = 7k (k \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

$$(a,b).BCNN(a,b) = 3549 \Rightarrow a.b = 3549 \quad (2)$$

UCLN

Từ (1) và (2) suy ra $21k^2 = 3549 \Rightarrow k^2 = 169 \Rightarrow k = 13$ (Vì $k \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow a = 3.13 = 39; b = 7.13 = 91$$

Bài 12: Tìm các số tự nhiên a và b biết rằng:

$$\frac{a}{b} = \frac{132}{143}; BCNN(a,b) = 1092$$

a)

$$\frac{a}{b} = \frac{21}{35}; (a,b) = 30$$

b) UCLN

Lời giải:

a) Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{132}{143} = \frac{12}{13} \text{ nên } a = 12k; b = 13k (k \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \text{ƯCLN}(12, 13) = 1 \Rightarrow \text{ƯCLN}(12k, 13k) = k \text{ và } \text{BCNN}(12k, 13k) = 12.13.k \quad (2)$$

$$\text{Theo đề bài thì: } \text{BCNN}(a, b) = 1092 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3)

$$\Rightarrow 12.13.k = 1092$$

$$\Leftrightarrow 156k = 1092$$

$$\Leftrightarrow k = 1092 : 156 = 7$$

Khi đó $a = 12.7 = 84; b = 13.7 = 91$.

Vậy $a = 84; b = 91$.

b) Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \text{ nên } a = 3k; b = 5k (k \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \text{ƯCLN}(3, 5) = 1 \Rightarrow \text{ƯCLN}(3k, 5k) = k \quad (2)$$

$$\text{Theo đề bài thì: } \text{ƯCLN}(a, b) = 30 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow k = 30$.

Khi đó $a = 3.30 = 90; b = 5.30 = 150$.

Vậy $a = 90; b = 150$.

Bài 13: Cho ba phân số $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$. Biến đổi ba phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai, mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba.

Lời giải:

Vì mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai nên ta có: $\frac{49}{56} = \frac{7}{8} = \frac{42}{48}$

Vì mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba nên ta có: $\frac{36}{51} = \frac{12}{17} = \frac{48}{68}$

Vậy ba phân số cần tìm là: $\frac{15}{42}, \frac{42}{48}, \frac{48}{68}$.

Bài 14: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là 68 . Cộng thêm vào tử số của phân số đó

4 đơn vị thì ta được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Tìm phân số ban đầu.

Lời giải:

Tổng của tử số và mẫu số là: $68.2 = 136$

Nếu cộng thêm vào tử số 4 đơn vị thì ta được tổng mới là: $136 + 4 = 140$

Ta có sơ đồ:

Tử số: |---|---|---|

Mẫu số: |---|---|

Tử số mới là: $140 : (3 + 2).3 = 84$

Tử số ban đầu là: $84 - 4 = 80$

Mẫu số ban đầu là: $136 - 80 = 56$

Vậy phân số ban đầu là: $\frac{80}{56}$.

Bài 15: Cho hai số a và b thỏa mãn: $a - b = 2(a + b) = \frac{a}{b}$. Chứng minh $a = -3b$. Tính $\frac{a}{b}$. Tìm a, b .

Lời giải:

$$a - b = 2(a + b)$$

$$a - b = 2a + 2b$$

$$a - 2a = 2b + b$$

$$-a = 3b$$

Ta có: $a = -3b$

Thay $a = -3b$ vào $a - b = \frac{a}{b}$ ta được:

$$-3b - b = \frac{a}{b}$$

$$-4b = -3$$

$$b = \frac{3}{4}$$

$$\text{Suy ra } a = -3 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$\text{Vậy } a = -3b, \frac{a}{b} = -3; a = -\frac{9}{4}; b = \frac{3}{4}.$$

Bài 16: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$.

Lời giải:

$$\text{Theo đề bài ta có: } 8b - 9a = 31 \Rightarrow b = \frac{31 + 9a}{8} = \frac{32 - 1 + 8a + a}{8} = \frac{(32 + 8a) + a - 1}{8} = 4 + a + \frac{a - 1}{8}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \text{ nên } 4 + a + \frac{a-1}{8} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{a-1}{8} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a-1):8 \Leftrightarrow a = 8k+1 (k \in \mathbb{N})$$

Khi đó:

$$b = \frac{31+9(8k+1)}{8} = \frac{40+72k}{8} = 9k+5$$

$$\text{Lại có: } \frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29} \Leftrightarrow \frac{11}{17} < \frac{8k+1}{9k+5} < \frac{23}{29}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11(9k+5) < 17(8k+1) \\ 29(8k+1) < 23(9k+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{38}{37} \\ k < \frac{86}{25} \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ nên } k \in \{2; 3\}$$

$$\text{Với } k=2 \text{ thì } \begin{cases} a = 8k+1 = 8.2+1 = 17 \\ b = 9k+5 = 9.2+5 = 23 \end{cases}$$

$$\text{Với } k=3 \text{ thì } \begin{cases} a = 8k+1 = 8.3+1 = 25 \\ b = 9k+5 = 9.3+5 = 32 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a=17; b=23 \text{ hoặc } a=25; b=32.$$

! HẾT □

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>