

Câu 1

1. Chứng minh rằng $B = x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$ chia hết cho 105 với mọi số nguyên x 2. Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6. \text{ Chứng minh } A = abcd \text{ là số chính phương}$$

3. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} = 2$$

4. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$.Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \leq 1 + ab$

5.

Bài 2. (3 điểm)

Để tham gia ngày chạy Olympic vì sức khỏe toàn dân, trường A đã nhận được một số chiếc áo và chia đều cho các lớp. Biết rằng theo thứ tự, lớp thứ nhất nhận được 4 áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại, rồi đến lớp thứ n ($n = 2; 3; 4; \dots$) nhận được $4n$ áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại. Cứ như thế các lớp đã nhận hết số áo.

Hỏi trường A đã nhận được bao nhiêu chiếc áo?

Bài 3. (3 điểm)Tìm tất cả các số nguyên dương n để $(1 + n^{2017} + n^{2018})$ là số nguyên tố.**Bài 4. (3 điểm)**

Một giải bóng chuyền có 9 đội bóng tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kì chỉ thi đấu với nhau một trận). Biết đội thứ nhất thắng a_1 trận và thua b_1 trận, đội thứ hai thắng a_2 trận và thua b_2 trận, ..., đội thứ 9 thắng a_9 trận và thua b_9 trận.

Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_9^2$.

6.

Bài 6. (2 điểm)

Hình vuông có 3×3 ô (như hình bên) chứa 9 số mà tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều bằng nhau gọi là hình vuông kì diệu. Chứng minh rằng số ở tâm (x) của một hình vuông kì diệu bằng trung bình cộng của hai số còn lại cùng hàng, hoặc cùng cột, hoặc cùng đường chéo.

	X	

$$\begin{aligned}
 B &= n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = n[n^2(n^2 - 7)^2 - 6^2] = n[n(n^2 - 7)]^2 - 6^2 \\
 &= n[n(n^2 - 7) - 6][n(n^2 - 7) + 6] = n(n^3 - 7n - 6)(n^3 - 7n + 6) \\
 &= n(n^3 - n - 6n - 6)(n^3 - n - 6n + 6) \\
 &= n[n(n-1)(n+1) - 6(n+1)][n(n-1)(n+1) - 6(n-1)] \\
 &= n[(n+1)(n^2 - n - 6)][(n-1)(n^2 + n - 6)] \\
 &= n[(n+1)(n^2 - 3n + 2n - 6)][(n-1)(n^2 + 3n - 2n - 6)] \\
 &= n(n+1)(n-3)(n+2)(n-1)(n+3)(n-2) \\
 &= (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)
 \end{aligned}$$

Là tích của 7 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3, cho 5, cho 7

Mà $(3, 5, 7) = 1$ nên tích trên chia hết cho $3.5.7=105$

2)

a) $\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6$ $\Leftrightarrow 1 + \frac{a}{a+b} + 1 + \frac{b}{b+c} + 1 + \frac{c}{c+d} + 1 + \frac{d}{d+a} = 6$ $\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2$ $\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b+c} + 1 - \frac{c}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} - \frac{b}{b+c} + \frac{d}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)} = 0$ $\Leftrightarrow b(c+d)(d+a) - d(a+b)(b+c) = 0 \Leftrightarrow abc - acd + bd^2 - b^2d = 0$ $\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0$	0,25 0,25 0,25
---	-------------------------------------

$\Leftrightarrow ac - bd = 0 \Leftrightarrow ac = bd$ (vì $b \neq d$)	
Vậy $A = abcd = (ac)^2$ là số chính phương	0,25
	0,25
	0,25
	0,25
	0,25

3.

+) Với a, b, c, d dương, ta có $F = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b}$ $= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a} \right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} \right) = \frac{a(d+a) + c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b) + d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \geq$ $\geq \frac{a^2 + c^2 + ad + bc}{\frac{1}{4}(b+c+d+a)^2} + \frac{b^2 + d^2 + ab + cd}{\frac{1}{4}(c+d+a+b)^2} = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd)}{(a+b+c+d)^2}$ (theo bất đẳng thức $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$) +) Mặt khác: $\frac{2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd)}{(a+b+c+d)^2} - (a+b+c+d) = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd) - (a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2} \geq 0$ Suy ra $F \geq 2$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = c; b = d$ +) Áp dụng với $a = 2016, b = x, c = y, d = 2015$ ta có: $\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} \geq 2$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y = 2016; x = 2015$	0,5 0,25 0,25
---	------------------------------------

4.

Với 2 số a, b dương:	
Xét: $a^2 + b^2 \leq 1 + ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \leq 1$	0,5
$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \leq (a+b)$ (vì $a+b > 0$)	
$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \leq a+b$	
$\Leftrightarrow (a^3 + b^3)(a^3 + b^3) \leq (a+b)(a^5 + b^5)$ (vì $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$)	0,5
$\Leftrightarrow a^6 + 2a^3b^3 + b^6 \leq a^6 + ab^5 + a^5b + b^6$	0,5

$\Leftrightarrow 2a^3b^3 \leq ab^5 + a^5b$	
$\Leftrightarrow ab(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) \geq 0$	0,25
$\Leftrightarrow ab(a^2 - b^2)^2 \geq 0$ đúng $\forall a, b > 0$.	
Vậy: $a^2 + b^2 \leq 1 + ab$ với a, b dương và $a^3 + b^3 = a^5 + b^5$	0,25

5.

Bài 2. Gọi số lớp của trường A được nhận áo là x .

Vì lớp thứ x nhận áo cuối cùng và số áo được phát hết nên số áo lớp thứ x nhận được là $4x$.

Lớp thứ $x - 1$ nhận số áo là $4(x - 1) + \frac{1}{8} \cdot 4x = 4,5x - 4$.

Vì số áo các lớp nhận được như nhau nên ta có phương trình $4,5x - 4 = 4x \Leftrightarrow x = 8$.

$\Rightarrow$ Số áo mỗi lớp nhận được: $4 \cdot 8 = 32$ (áo)

Suy ra số áo trường A nhận được: $32 \cdot 8 = 256$ (áo).

6.

Bài 4. Mỗi đội bóng lần lượt thi đấu với 8 đội bóng khác và hai đội bất kì chỉ gặp nhau 1 trận nên mỗi đội sẽ thi đấu 8 trận $\Rightarrow a_i + b_i = 8$ (với $i = 1, 2, 3, \dots, 8$).

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_9^2 = (8 - a_1)^2 + (8 - a_2)^2 + (8 - a_3)^2 + \dots + (8 - a_9)^2$$

$$\Leftrightarrow 16(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9) = 576 \quad (1)$$

Mặt khác, tổng số trận thắng của các đội bằng tổng số trận đấu nên:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36 \quad (2)$$

7.

Bài 6. Giả sử hình vuông kì diệu điền các số $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ như hình vẽ.

Đặt $S = a + b + c + d + e + f + g + h + i$.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\text{Suy ra } d+e+f=b+e+h=a+e+i=c+e+g=\frac{S}{3} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra } (d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+i)+(c+e+g)=\frac{4S}{3}$$

$$\Rightarrow (d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+i)+(c+e+g)=\frac{4S}{3}$$

$$\Rightarrow S+3e=\frac{4S}{3} \Rightarrow e=\frac{S}{9} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow d+f=b+h=a+i=c+g=\frac{2S}{9}=2e. \quad \text{đpcm}$$