

Câu 1 (1,5 điểm). Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x + 3$.

- Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

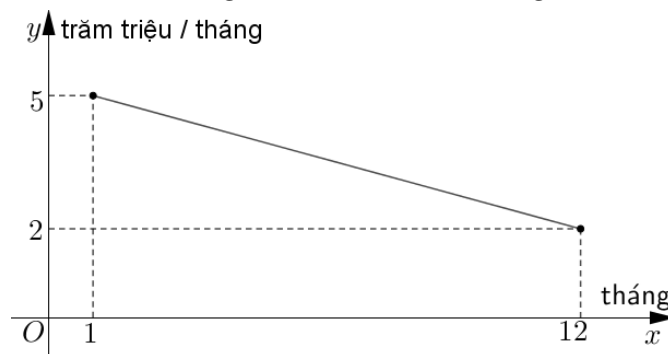
Câu 2 (1,0 điểm). Cho phương trình $2x^2 - 5x - 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $(2x_1 - x_2)(2x_2 - x_1) - 2023$.

Câu 3 (1,0 điểm). Công ty viễn thông có gói cước được tính như sau:

- Gói I: 2000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên; 1800 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo; 1200 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo nữa và 800 đồng/phút cho thời gian còn lại.
- Gói II: 1800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên; 1500 đồng/phút cho 60 phút tiếp theo và 1000 đồng/phút cho thời gian còn lại.

- Tính số tiền phải trả của gói I khi gọi 130 phút và gói II khi gọi 130 phút.
- Bác An nhận thấy rằng mỗi tháng trung bình gọi chưa đến 904 phút. Sau khi cân nhắc thì bác An chọn gói I vì sẽ tiết kiệm được 150000 đồng so với gói II. Hỏi trung bình bác An gọi bao nhiêu phút mỗi tháng?

Câu 4 (0,75 điểm). Do ảnh hưởng của tình hình dịch bệnh, thu nhập của một công ty bị giảm dần trong năm 2021. Các số liệu thống kê được thể hiện bằng đồ thị như hình vẽ.



- Tìm hàm số thể hiện sự liên quan của đại lượng y (trăm triệu/ tháng) theo đại lượng x (tháng).
- Biết một sản phẩm bán được thì công ty có lợi nhuận là 100 ngàn đồng, em hãy tính số sản phẩm mà công ty bán được trong tháng 9 năm 2021 (làm tròn đến hàng đơn vị).

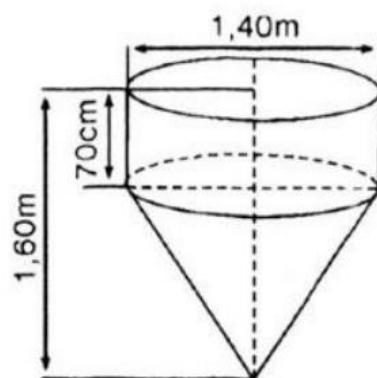
Câu 5 (1,0 điểm). Cửa hàng lấy một thùng nước ngọt (24 lon) của đại lý phân phối với giá 192000 đồng và bán lẻ với giá 10000 đồng một lon.

- a) Hỏi khi bán hết một thùng nước ngọt đó thì cửa hàng thu được lãi bao nhiêu phần trăm so với giá gốc?
- b) Trong đợt khuyến mãi, do đại lý phân phối giảm giá nên cửa hàng cũng giảm giá còn 9500 đồng một lon và thu được lãi suất như cũ. Hỏi trong đợt này cửa hàng đã mua một thùng nước ngọt với giá bao nhiêu?

Câu 6 (1,0 điểm). Một bể chứa nước có dạng như hình vẽ.

- a) Tính thể tích của bể (kết quả không làm tròn).
- b) Ban đầu, bể không có nước. Sau đó người ta bơm nước vào bể với tốc độ 1 lít/giây. Hỏi sau 20 phút kể từ khi bắt đầu bơm thì mực nước trong hồ cách miệng hồ bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần trăm)? Biết thể tích hình trụ là

$$V = \pi r^2 h \text{ và thể tích hình nón là } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$



Câu 7 (1,0 điểm). Trước ngày kết thúc năm học tập thể các học sinh lớp 9A muốn mua quà tặng cho các giáo viên giảng dạy lớp mình trong suốt năm học để tỏ lòng tri ân, mỗi món quà tặng cho thầy với giá là 50 ngàn đồng, mỗi món quà tặng cho cô có giá là 65 ngàn đồng, biết lớp tặng quà cho 15 giáo viên và tổng số tiền mà lớp mua quà là 870 ngàn đồng. Em hãy tính số thầy giáo và số cô giáo lớp 9A dự định mua quà tặng.

Câu 8 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm S tùy ý trên tia đối của tia BA . Vẽ cát tuyến SMC của (O) . Vẽ dây cung CD của đường tròn (O) vuông góc với AB .

- a) Chứng minh tam giác SMA đồng dạng với tam giác SBC .
- b) Các dây cung AM, BC cắt nhau tại N ; các dây cung AB, DM cắt nhau tại P . Chứng minh rằng tứ giác $BMNP$ nội tiếp và NP song song với CD .
- c) Chứng minh $OP \cdot OS = OM^2$.

---- HẾT ----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1 (1,5 điểm). Cho parabol $P : y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d : y = \frac{1}{2}x + 3$.

a) Vẽ đồ thị P và d trên cùng hệ trục tọa độ.

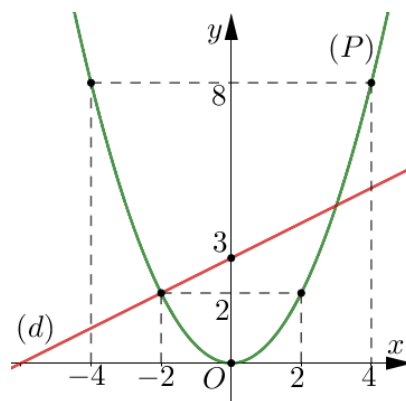
b) Tìm tọa độ giao điểm của P và d bằng phép tính.

Lời giải

a) Bảng giá trị:

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8

x	0	-2
$y = \frac{1}{2}x + 3$	3	2



b) Phương trình hoành độ giao điểm của P và d là $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 3.$$

Với $x = -2$ ta được $y = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 = 2$. Với $x = 3$ ta được $y = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{9}{2}$.

Vậy $-2; 2$ và $\left(3; \frac{9}{2}\right)$ là tọa độ của hai giao điểm cần tìm.

Câu 2 (1,0 điểm). Cho phương trình $2x^2 - 5x - 1 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $2x_1 - x_2 - 2x_2 - x_1 - 2023$.

Lời giải

Vì $a.c = 2 \cdot (-1) = -2 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Viète, ta có $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$ và $P = x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$. Khi đó

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2x_2 - x_1 - 2023 &= 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 - 2023 \\ &= 5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) - 2023 \\ &= 5x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 - 2023 \\ &= 9P - 2S^2 - 2023 \\ &= 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2023 = -2040. \end{aligned}$$

Câu 3 (1,0 điểm). Công ty viễn thông có gói cước được tính như sau:

- **Gói I** : 2000 đồng/phút cho 30 phút đầu tiên; 1800 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo; 1200 đồng/phút cho 30 phút tiếp theo nữa và 800 đồng/phút cho thời gian còn lại.

- **Gói II** : 1800 đồng/phút cho 60 phút đầu tiên; 1500 đồng/phút cho 60 phút tiếp theo và 1000 đồng/phút cho thời gian còn lại.

a) Tính số tiền phải trả của gói I khi gọi 130 phút và gói II khi gọi 130 phút.

b) Bác An nhận thấy rằng mỗi tháng trung bình gọi chưa đến 904 phút. Sau khi cân nhắc thì bác An chọn gói I vì sẽ tiết kiệm được 150000 đồng so với gói II. Hỏi trung bình bác An gọi bao nhiêu phút mỗi tháng?

Lời giải

a) Số tiền phải trả của gói I khi gọi 130 phút là

$$2000 \times 30 + 1800 \times 30 + 1200 \times 30 + 800 \times (130 - 90) = 182000 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền phải trả của gói II khi gọi 130 phút là

$$1800 \times 60 + 1500 \times 60 + 1000 \times (130 - 120) = 208000 \text{ (đồng)}.$$

b) Gọi x (phút) là thời gian trung bình mà bác An gọi mỗi tháng và y (nghìn đồng) là số tiền chênh lệch giữa gói I và gói II. Nhận xét rằng $60 < x \leq 904$.

- Nếu $60 < x \leq 90$ thì

$$y = [1,8 \times 60 + 1,5(x - 60)] - [2 \times 30 + 1,8 \times 30 + 1,2(x - 60)] = 0,3(x - 60) - 6,$$

do đó $y = 150 \Leftrightarrow x = 580$ (không thỏa mãn).

- Nếu $90 < x \leq 120$ thì

$$y = [1,8 \times 60 + 1,5(x - 60)] - [2 \times 30 + 1,8 \times 30 + 1,2 \times 30 + 0,8 \times (x - 90)] = 0,7x - 60,$$

do đó $y = 150 \Leftrightarrow x = 300$ (không thỏa mãn).

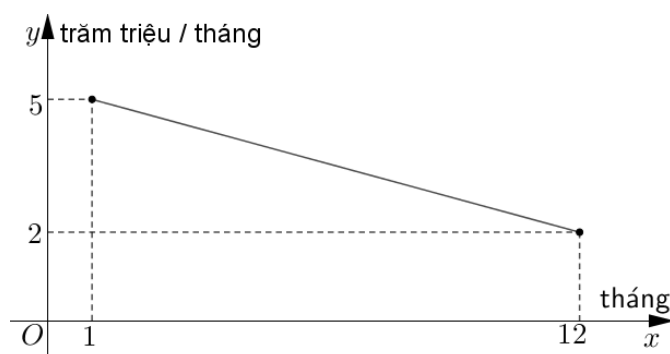
- Nếu $x > 120$ thì

$$y = [1,8 \times 60 + 1,5 \times 60 + (x - 120)] - [2 \times 30 + 1,8 \times 30 + 1,2 \times 30 + 0,8(x - 90)] = 0,2x,$$

do đó $y = 150 \Leftrightarrow x = 750$ (thỏa mãn).

Vậy trung bình mỗi tháng bác An gọi 750 phút.

Câu 4 (0,75 điểm). Do ảnh hưởng của tình hình dịch bệnh, thu nhập của một công ty bị giảm dần trong năm 2021. Các số liệu thống kê được thể hiện bằng đồ thị như hình vẽ.



- a) Tìm hàm số thể hiện sự liên quan của đại lượng y (trăm triệu/ tháng) theo đại lượng x (tháng).
- b) Biết một sản phẩm bán được thì công ty có lợi nhuận là 100 ngàn đồng, em hãy tính số sản phẩm mà công ty bán được trong tháng 9 năm 2021 (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

- a) Gọi $y = ax + b$ $a, b \in \mathbb{R}$ là hàm số bậc nhất thể hiện sự liên quan giữa đại lượng y theo x .

Vì các điểm $(1;5)$ và $(12;2)$ thuộc đồ thị hàm số trên nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 12a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{11} \\ b = \frac{58}{11} \end{cases}.$$

Vậy hàm số cần tìm có dạng $y = -\frac{3}{11}x + \frac{58}{11}$.

- b) Thu nhập của công ty trong tháng 9 là $-\frac{3}{11}.9 + \frac{58}{11} = \frac{31}{11}$ (trăm triệu).

Số sản phẩm bán được trong tháng 9 là $\frac{31}{11} : 0,001 \approx 2818$ (sản phẩm).

Câu 5 (1,0 điểm). Cửa hàng lấy một thùng nước ngọt (24 lon) của đại lý phân phối với giá 192000 đồng và bán lẻ với giá 10000 đồng một lon.

- a) Hỏi khi bán hết một thùng nước ngọt đó thì cửa hàng thu được lãi bao nhiêu phần trăm so với giá gốc?
- b) Trong đợt khuyến mãi, do đại lý phân phối giảm giá nên cửa hàng cũng giảm giá còn 9500 đồng một lon và thu được lãi suất như cũ. Hỏi trong đợt này cửa hàng đã mua một thùng nước ngọt với giá bao nhiêu?

Lời giải

- a) Số tiền thu được khi bán hết thùng nước ngọt là $10000 \times 24 = 240000$ (đồng).

Phần trăm lãi so với giá gốc cửa hàng thu được là $\frac{240000 - 192000}{192000} \cdot 100\% = 25\%$.

- b) Số tiền thu được khi bán hết thùng nước ngọt với giá giảm là $9500 \times 24 = 228000$ (đồng).

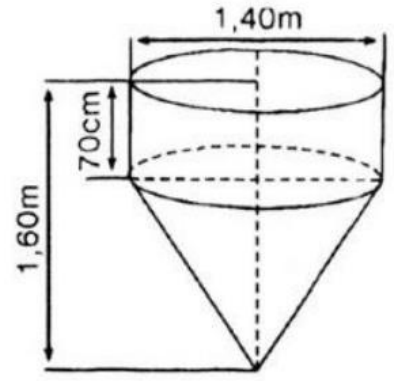
Gọi x (đồng) là số tiền cửa hàng đã mua của đại lý trong đợt này ($x > 0$). Ta có phương trình

$$\frac{228000 - x}{x} = 0,25 \Leftrightarrow 228000 = 1,25x \Leftrightarrow x = 182400.$$

Vậy trong đợt này cửa hàng đã mua của đại lý 182400 đồng.

Câu 6 (1,0 điểm). Một bể chứa nước có dạng như hình vẽ.

- a) Tính thể tích của bể (kết quả không làm tròn).
 b) Ban đầu, bể không có nước. Sau đó người ta bơm nước vào bể với tốc độ 1 lít/giây. Hỏi sau 20 phút kể từ khi bắt đầu bơm thì mực nước trong hồ cách miệng hồ bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần trăm)? Biết thể tích hình trụ là $V = \pi r^2 h$ và thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.



Lời giải

- a) Thể tích phần khối nón là $\frac{1}{3} \pi \cdot 0,7^2 \cdot (1,6 - 0,7) = 0,147\pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Thể tích phần khối trụ là $\pi \cdot 0,7^2 \cdot 0,7 = 0,343\pi \text{ (m}^3\text{)}.$

Vậy thể tích của bể là $0,147\pi + 0,343\pi = 0,49\pi \text{ (m}^3\text{)}.$

- b) Sau 20 phút thì thể tích nước trong bể là $1 \times 20 \times 60 = 1200 \text{ (lít)} = 1,2 \text{ (m}^3\text{)} > 0,147\pi \text{ (m}^3\text{)}.$
 Do đó phần nước trong bể đầy kín khối nón và thể tích nước trong khối trụ là $1,2 - 0,147\pi \text{ (m}^3\text{)},$
 suy ra chiều cao của mực nước trong hồ là $\frac{1,2 - 0,147\pi}{\pi \cdot 0,7^2} \text{ (m)}.$

Vậy mực nước trong hồ cách miệng hồ một khoảng là $0,7 - \frac{1,2 - 0,147\pi}{\pi \cdot 0,7^2} \approx 0,22 \text{ (m)}.$

Câu 7 (1,0 điểm). Trước ngày kết thúc năm học tập thể các học sinh lớp 9A muốn mua quà tặng cho các giáo viên giảng dạy lớp mình trong suốt năm học để tỏ lòng tri ân, mỗi món quà tặng cho thầy với giá là 50 ngàn đồng, mỗi món quà tặng cho cô có giá là 65 ngàn đồng, biết lớp tặng quà cho 15 giáo viên và tổng số tiền mà lớp mua quà là 870 ngàn đồng. Em hãy tính số thầy giáo và số cô giáo lớp 9A dự định mua quà tặng.

Lời giải

Gọi số thầy giáo và số cô giáo của lớp 9A dự định mua quà tặng lần lượt là $x, y \text{ (} x, y \in \mathbb{N}^* \text{)}.$

Vì lớp tặng quà cho 15 giáo viên và tổng số tiền mà lớp mua quà là 870 ngàn đồng nên từ đề bài ta có hệ phương trình

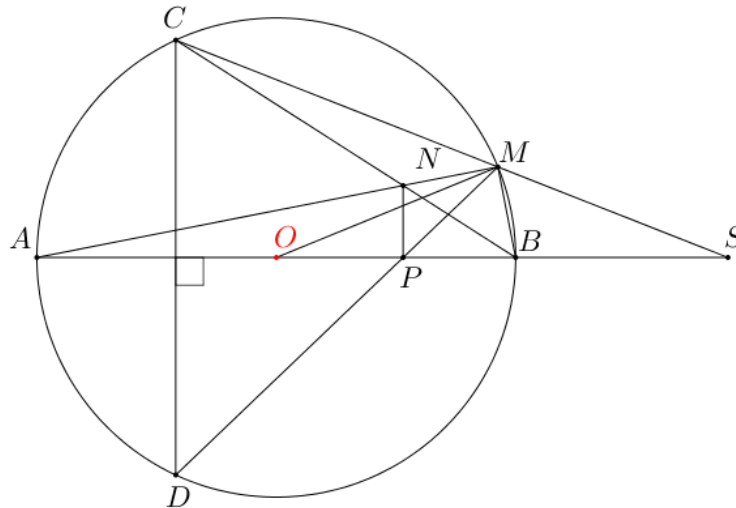
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 50x + 65y = 870 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Vậy lớp 9A dự định mua quà tặng cho 7 thầy giáo và 8 cô giáo.

Câu 8 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm S tùy ý trên tia đối của tia BA . Vẽ cát tuyến SMC của (O) . Vẽ dây cung CD của đường tròn (O) vuông góc với AB .

- a) Chứng minh tam giác SMA đồng dạng với tam giác SBC .
 b) Các dây cung AM, BC cắt nhau tại N ; các dây cung AB, DM cắt nhau tại P . Chứng minh rằng tứ giác $BMNP$ nội tiếp và NP song song với CD .
 c) Chứng minh $OP \cdot OS = OM^2$.

Lời giải



a) Xét ΔSMA và ΔSBC ta có

S là góc chung và $SAM = SCB$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn BM).

Dẫn đến $\triangle SMA$ đồng dạng $\triangle SBC$ (góc-góc).

b)

- Chứng minh $BMNP$ là tứ giác nội tiếp.

Xét đường tròn (O) đường kính AB có dây cung $CD \perp AB$, nên A là điểm chính giữa CD .

Dẫn đến $AC = AD$, do đó $ABC = AMD$ (hai góc nội tiếp (O) chắn hai cung bằng nhau).

Vì thế tứ giác $BMNP$ nội tiếp (do hai đỉnh kề B, M cùng nhìn NP dưới hai góc bằng nhau).

- Chứng minh NP song song CD.

Vì tứ giác $BMNP$ nội tiếp nên $BMD = BNP$ (hai góc nội tiếp cùng chắn BP).

Mặt khác, $BMD = BCD$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn BD).

Suy ra $BNP = BCD$, mà hai góc này ở vị trí đồng vị, nên NP song song CD .

c) Xét (O) , có $S = \frac{sđAC - sđBM}{2}$ (góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn).

Cũng xét (O) , lại có

$$OMP = AMP - AMO = \frac{\text{s}\mathfrak{d}AD}{2} - MAO = \frac{\text{s}\mathfrak{d}AD}{2} - \frac{\text{s}\mathfrak{d}BM}{2} = \frac{\text{s}\mathfrak{d}AD - \text{s}\mathfrak{d}BM}{2}.$$

(với lưu ý rằng ΔAMO cân tại O).

Mà $AC = AD$ (chứng minh trên), nên $S = OMP$.

Xét $\triangle OSM$ và $\triangle OMP$ có MOS là góc chung và $S = OMP$.

Dẫn đến $\triangle OSM$ đồng dạng với $\triangle OMP$ (góc-góc), suy ra $\frac{OS}{OM} = \frac{OM}{OP} \Leftrightarrow OP^2 = OS \cdot OM$.

--- HẾT ---