

HSG TOÁN 9 BÌNH PHƯỚC 2023-2024

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1 (5.0 điểm).

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} \right)$$

1. Cho biểu thức

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - \sqrt{48}}}$.

2. Cho x, y, z là ba số thực khác 0 , thoả mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

Chứng minh rằng: $\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$

Câu 2 (5.0 điểm).

1. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} + 1 - x = 0$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

3. Cho đường thẳng (d): $mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0$ (với m là tham số). Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi giá trị của m .

Câu 3 (5.0 điểm). Cho đường tròn (O R;) và dây cung BC cố định (BC $R < 2$). Điểm A di động trên đường tròn (O R;) sao cho tam giác ABC nhọn. Kẻ đường cao AD và trực tâm H của tam giác ABC .

- Đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại các điểm M, N. Chứng minh tam giác AMN cân.
- Các điểm E, F, lần lượt là hình chiếu của D trên các đường thẳng BH, CH. Các điểm P, Q lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, AC. Chứng minh 4 điểm P, E, F, Q thẳng hàng và $OA \perp PQ$.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K. Chứng minh đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4 (2.0 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A, điểm O là trung điểm của BC. Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Điểm H chạy trên

cung nhỏ EF của (O), tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của điểm H để diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (3.0 điểm).

1. Cho a, b, c là ba số thực dương, thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 \geq 2abc(a + b + c)$.

2. Giải phương trình sau với nghiệm nguyên: $x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y - 3 = 0$

ĐÁP ÁN

Câu 1 (5.0 điểm).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

1) a) P xác định

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} \right)$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$$

b) Ta có: $x = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \sqrt{13 - \sqrt{48}}} = \sqrt{3} - \sqrt{3 - (2\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = 1$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{1}+2}{\sqrt{1}} = 3$$

2) + Chứng minh được bài toán: Nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

+ Vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ và $x, y, z \neq 0$ nên suy ra được $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

Do đó $VT = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{1}{xyz} = 3 = VP$ (đpcm)

Câu 2 (5.0 điểm).

1) Điều kiện: $x \geq \frac{-1}{3}$

Ta có: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3} + 1 - x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} + 1 - x = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1(N) \\ \sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=2 \end{cases}$$

Giải phương trình: $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=2$

$$\Rightarrow 4x+4+2\sqrt{(3x+1)(x+3)}=4 \Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+3)}=-2x \quad (\text{Đk: } x \leq 0)$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+2\sqrt{7}(L) \\ x=5-2\sqrt{7}(N) \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x_1=1; x_2=5-2\sqrt{7}$.

2) Điều kiện: $x+y > 0$.

Biến đổi phương trình (1):

$$x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} - 1 = 0$$

Đặt $x+y=S, xy=P$ (với $S^2 \geq 4P$), ta có phương trình:

$$S^2 + \frac{2P}{S} - 2P - 1 = 0 \Leftrightarrow S^3 + 2P - 2SP - S = 0$$

$$\Leftrightarrow S(S^2 - 1) - 2P(S - 1) = 0 \Leftrightarrow (S - 1)(S^2 + S - 2P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ S^2 + S - 2P=0 \end{cases}$$

+ Với $x+y=1$ thay vào (2) ta được:

$$1 = (1-y)^2 - y \Leftrightarrow y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(1;0); (-2;3)\}$$

$$+ \text{ Với } S^2 + S - 2P = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + x+y - 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x+y = 0 \quad (\text{Loại vì } x+y > 0)$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)$ là $(1;0); (-2;3)$

3) Gọi $A(x_A; y_A)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi giá trị của m , ta có phương trình:

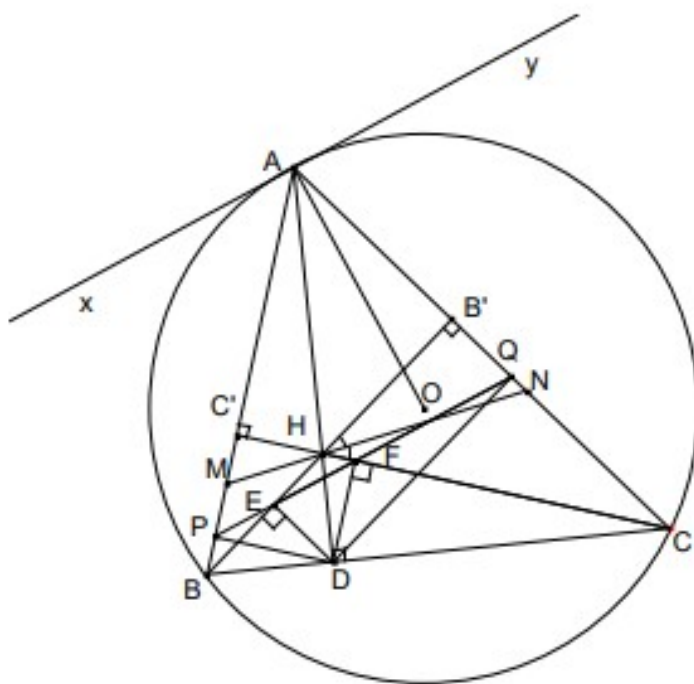
$$mx_A + (m-1)y_A - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_A + y_A - 2)m = y_A - 1 \quad \text{có nghiệm } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + y_A - 2 = 0 \\ y_A - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = 1 \end{cases}$$

Vậy đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(1;1)$ với mọi giá trị của m .

Câu 3 (5.0 điểm).

a)
Gọi
B
là



hình chiếu của điểm B trên AC, C' là hình chiếu của điểm C trên AB.

Ta có: $\angle HMC = \angle HNC (= \angle HNC)$

$$\Rightarrow \triangle C'HM \sim \triangle B'HN \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \angle AMN = \angle ANM \text{ (t/c)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMN \text{ cân tại A}$$

+ Ta có $\angle EBP = \angle DBP$ (Vì cùng chắn cung PB của đường tròn (BPED))

$$\angle DBP = \angle HCD \text{ (vì đồng vị } PD \parallel CC')$$

$$\angle HCD = \angle PDH \text{ (vì cùng phụ } \angle HCD)$$

$$\angle PDH = \angle FEH \text{ (vì cùng chắn cung FH của đường tròn (DEHF))}$$

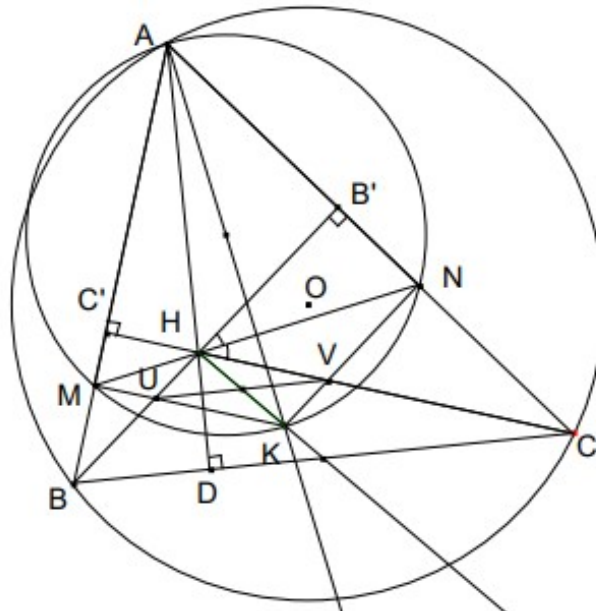
$$\Rightarrow \angle EBP = \angle FEH$$

Mà 3 điểm B, E, H thẳng hàng nên 3 điểm P, E, F thẳng hàng.

Tương tự chứng minh được 3 điểm E, F, Q thẳng hàng.

Do đó 4 điểm P, E, F, Q thẳng hàng.

+ Kẻ xy là tiếp tuyến tại A của (O),



Ta có $\angle AB = \angle ACB$ (cùng chắn cung AB của (O)) Mà $AP \cdot AB = AQ \cdot AC (= AD^2)$

$\Rightarrow$ Tứ giác BPQC nội tiếp $\Rightarrow \angle APQ = \angle ACB \Rightarrow \angle AB = \angle APQ \Rightarrow xy \parallel PQ$

Mà $xy \perp AO$ (t/c tiếp tuyến)

Do đó $OA \perp PQ$

b) Gọi U là giao điểm của BB' và KM, V là giao điểm của CC' và KN.

+ Ta có $\triangle AMN$ cân tại A nên đường phân giác AK của góc MAN cũng là đường trung trực của MN

$\Rightarrow AK$ là đường kính của (AMN).

$\Rightarrow \angle AMK = 90^\circ \Rightarrow MK \parallel CC$ hay $UK \parallel HV$

Tương tự $KV \parallel UH$ nên tứ giác HVKU là hình bình hành

$\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm của UV (1)

+ Ta có $MU \parallel C'H \Rightarrow \frac{UB}{UH} = \frac{MB}{MC'}$ (ta lét), tương tự $\frac{VC}{VH} = \frac{NC}{NB'}$

Mà $\frac{MB}{MC'} = \frac{HB}{HC'}$ (t/c đường phân giác của góc $\angle BHC'$),

tương tự $\frac{NC}{NB'} = \frac{HC}{HB'}$

Mà $\frac{HB}{HC'} = \frac{HC}{HB'}$ (vì $\triangle C'HB \sim \triangle B'HC$)

$\Rightarrow \frac{UB}{UH} = \frac{VC}{VH} \Rightarrow UV \parallel BC$ (Ta lét đảo) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm của BC

Mà BC cố định nên HK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4 (2.0 điểm).

+ Ta có OM ON, lần lượt là phân giác $\angle EOM, \angle FOH$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau của (O))

$$\Rightarrow \angle MON = \frac{\angle EOF}{2} = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = \angle ABC$$

$$\Rightarrow \triangle MBO \sim \triangle MON \text{ (g.g)}$$

$$\text{Cmtt } \triangle OCN \sim \triangle MON$$

$$\Rightarrow \triangle MBO \sim \triangle OCN \Rightarrow \frac{MB}{OC} = \frac{BO}{CN}$$

$$\Rightarrow BM \cdot CN = OB \cdot OC = \frac{BC^2}{4} = \text{const} \quad (1)$$

$$+ \text{ Lại có: } S_{AMN} = S_{ABC} - S_{BMNC}$$

S_{AMN} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{BMNC} đạt giá trị nhỏ nhất. Gọi R là bán kính của đường tròn (O), ta có:

$$\begin{aligned} S_{BMNC} &= S_{BOM} + S_{MON} + S_{NOC} = \frac{1}{2} R(BM + MN + NC) \\ &= \frac{1}{2} R(BM + NC + EM + FN) = \frac{1}{2} R(2BM + 2CN - 2BE) \\ &= R(BM + CN - BE) \end{aligned}$$

(Vì BE = CF, ME = MH, NF = NH; MH + NH = MN)

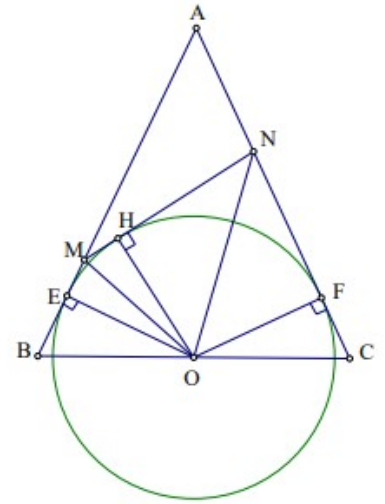
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, từ (1) và (2) suy ra:

$$S_{ABC} \geq R(\sqrt{BM \cdot CN} - BE) = R\left(\frac{BC}{2} - BE\right) = \text{const}$$

(Vì $\triangle ABC$ cố định nên BC và BE không đổi)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $BM = CN \Leftrightarrow MN \parallel BC$ khi và chỉ khi H là giao điểm của đường trung trực của BC với đường tròn (O).

Vậy diện tích tam giác AMN đạt giá trị lớn nhất khi H là giao của đường trung trực của BC với đường tròn (O).



Câu 5 (3.0 điểm)

1) + Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương ta có:

$$\begin{cases} a^4b^2 + \frac{1}{3}abc^2 + \frac{1}{9}ca \geq a^2bc \\ b^4c^2 + \frac{1}{3}a^2bc + \frac{1}{9}ab \geq b^2ac \\ c^4a^2 + \frac{1}{3}ab^2c + \frac{1}{9}bc \geq c^2ba \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết ta được:

$$a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + \frac{1}{9} \geq \frac{2}{9}abc(a+b+c) \quad (1)$$

Áp dụng đẳng thức phụ dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$$

ta được $abc(a+b+c) = ab.bc + bc.ba + ca.cb \leq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 = \frac{1}{3}$

Hay $\frac{1}{3} \geq abc(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{4}{9} \geq \frac{4}{3}abc(a+b+c) \quad (2)$

Cộng theo vế (1) và (2) ta có (đpcm).

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) + Biến đổi đưa được về pt: $(x+y+2)(x+2y+1)=5$

+ Tìm ra được các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình là: (-6;5), (0;-3), (6;-3), (-12;5)