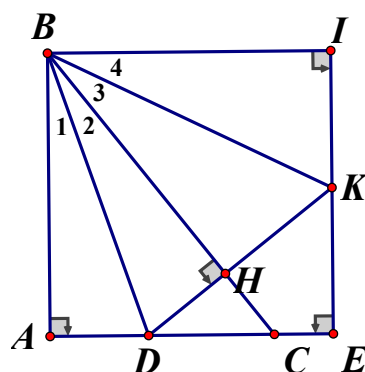


Câu 101. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành 2021 - 2022; trường Cự Khê 2016 - 2017; huyện Thanh Oai 2013 - 2014)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Tia phân giác góc B cắt AC ở D . Kẻ DH vuông góc với BC . Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt tia DH ở K . Chứng minh rằng:

- $BA = BH$
- $\angle BDK = 45^\circ$
- Cho $AB = 4$ cm, tính chu vi tam giác DEK

Lời giải



a) Xét hai tam giác vuông $\triangle ABD$ và $\triangle HBD$ có:

BC chung; $\angle B_1 = \angle B_2$ (BD là tia phân giác)
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle HBD$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 $\Rightarrow BA = BH$ (hai cạnh tương ứng)

b) Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với EK , cắt EK tại I
 Ta có $AB = BH$ (cmt); $AE = AB$ (gt); $AE = BI$ ($BA \parallel IE$) $\Rightarrow BH = BI$

$\triangle HBK = \triangle IBK$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)
 $\Rightarrow \angle B_3 = \angle B_4$ (hai góc tương ứng)

mà $\angle B_1 = \angle B_2$

Lại có $BI \parallel AE$ (Vì cùng vuông góc với IE)

mà $AB \perp AE$ suy ra $AB \perp BI$

$$\angle BDK = \angle B_2 + \angle B_3 = \frac{1}{2} \angle ABI = 90^\circ$$

Do đó:

$$\Rightarrow \angle BDK = 45^\circ$$

c) $\triangle ABD = \triangle HBD \Rightarrow AD = DH$

$$\triangle HBK = \triangle IBK \Rightarrow HK = KI$$

$$\Rightarrow KD = DH + HK = AD + KI$$

Chu vi tam giác DEK là:

$$DE + EK + KD = DE + KE + AD + KI = AE + IE = 2 \cdot AB = 2 \cdot 4 = 8(\text{cm})$$

Câu 102. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2017 - 2018)

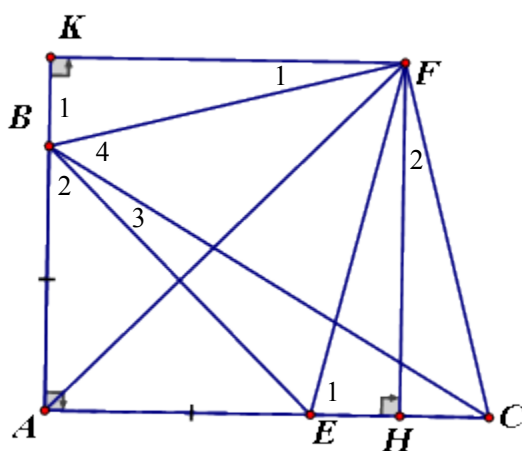
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

Tia phân giác của $\angle BAC$ cắt đường trung trực của CE tại F .

a) Chứng minh tam giác BFC cân.

b) Biết góc $\angle ACB = 30^\circ$. Chứng minh tam giác BFE đều.

Lời giải



a) Ta có FH là đường trung trực của đoạn EC nên $FC = FE$ (1).

Xét $\triangle ABF$ và $\triangle AEF$ có:

$$AB = AE \text{ (gt);}$$

$$\angle BAF = \angle EAF \text{ (gt)}$$

AF chung

Suy ra $\triangle ABF = \triangle AEF$ (c - g - c)

$$\Rightarrow FB = FE \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $FB = FC$ nên $\triangle BFC$ cân tại F .

b) Hạ $FK \perp AB \Rightarrow KF \parallel AC$

$$\Rightarrow \angle KFH = \angle FHC = 90^\circ \text{ (so le trong)}$$

Ta có $\triangle ABF = \triangle AEF \Rightarrow \angle ABF = \angle AEF$

$$\Rightarrow \angle B_1 = \angle HEF \Rightarrow \angle B_1 = \angle HCF \text{ (do } \triangle BFC \text{ cân tại } F \text{)}$$

Xét $\triangle FKB$ và $\triangle FHC$ có:

$$\angle BKF = \angle HCF = 90^\circ$$

$$FB = FC \quad (\text{cmt})$$

$$\angle B_1 = \angle HCF \quad (\text{cmt})$$

$$\text{Suy ra } \triangle FKB = \triangle FHC \quad (\text{ch - gn}) \Rightarrow \angle F_1 = \angle F_2$$

$$\Rightarrow \angle F_1 + \angle BFH = \angle F_2 + \angle BFH \Rightarrow \angle KFH = \angle BFC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BFC \text{ vuông cân} \Rightarrow \angle B_4 = 45^\circ \quad (3)$$

$$\text{Ta có } \angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$$

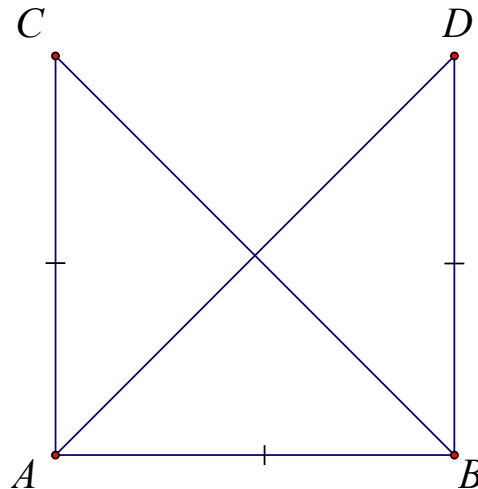
$$\Rightarrow \angle B_3 = 60^\circ - \angle B_2 = 15^\circ \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \angle FBE = \angle B_3 + \angle B_4 = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$$

Tam giác cân $\triangle BFE$ có $\angle FBE = 60^\circ$ nên tam giác BFE đều.

Câu 103. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trên cạnh AB ta vẽ tam giác ABD vuông cân tại B như hình vẽ.



1) Gọi E là trung điểm của BD . Đường thẳng qua C vuông góc với AE tại M cắt AB tại P . Chứng minh: $\triangle ABE = \triangle CAP$.

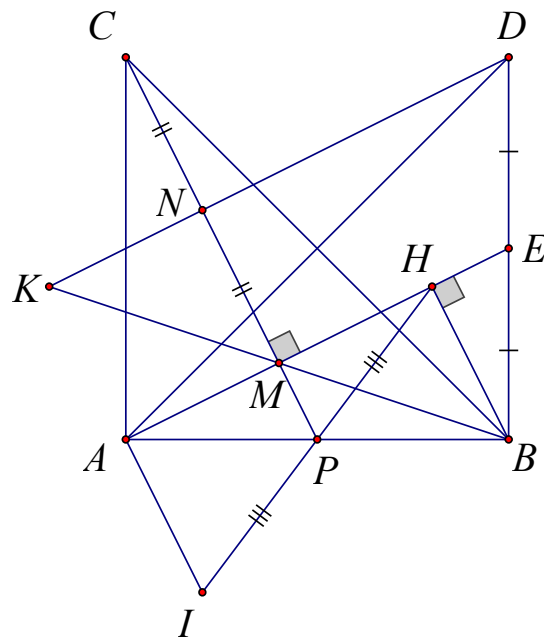
2) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AE tại H .

a) Chứng minh: $MA = MH$.

b) Chứng minh tam giác HBM vuông cân.

3) Gọi N là trung điểm của CM , đường thẳng BM cắt đường thẳng DN tại K . Tính số đo $\angle BKD$.

Lời giải



1) Chứng minh: $\triangle ABE = \triangle CAP$.

Ta có:

$$\angle EAB + \angle CAM = 90^\circ$$

$$\angle ACP + \angle CAM = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EAB = \angle ACP \text{ (cùng phụ với } \angle CAM \text{)}$$

+ Xét $\triangle ABE$ và $\triangle CAP$, có:

$$\angle ABE = \angle CAP (= 90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\angle EAB = \angle ACP \text{ (cmt)}$$

Vậy: $\triangle ABE = \triangle CAP$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề)

2) a) Chứng minh: $MA = MH$.

$$\text{Vì } \triangle ABE = \triangle CAP \text{ (cmt)} \Rightarrow AP = BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AP = BP$$

Trên tia đối của PH lấy điểm I sao cho $PI = PH$

Ta có $\triangle PAI = \triangle PBH$ (c.g.c) ($PI = PH$, $\angle API = \angle BPH$, $AP = BP$)

Nên $AI = HB$ (hai cạnh tương ứng)

và $\angle IAP = \angle HBP$ (hai góc tương ứng)

Suy ra $AI \parallel HB$ (cùng vuông góc với AH)

Mà $\angle AHB = 90^\circ$ nên $\angle IAH = 90^\circ$ (quan hệ giữa tính song song và vuông góc)

Xét $\triangle AHI$ và $\triangle HAB$ có

$$AI = HB$$

$$\angle AHB = \angle IAH = 90^\circ$$

AH là cạnh chung

Do đó $\triangle AHI = \triangle HAB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow HI = HB \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Mà $PA = PB$ và $PI = PH$ do đó suy ra $PA = PB = PI = PH$

Xét $\triangle MAP$ và $\triangle MHP$ có

$$PA = PH \text{ (cmt)}$$

$$\angle AMP = \angle HMP \text{ (} \angle PAI = \angle PBH \text{)}$$

Do đó $\triangle MAP = \triangle MHP$ (Cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $MA = MH$ (hai cạnh tương ứng)

b) Chứng minh tam giác HBM vuông cân.

Có $MA = MH$ (CM trên) (1)

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAM$, có:

$$\angle AHB = \angle CAM (= 90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\angle HAB = \angle MCA \text{ (cùng phụ với } \angle CAM \text{)}$$

Vậy: $\triangle ABH = \triangle CAM$ (ch - gn)

$$\Rightarrow HB = MA \text{ (hai cạnh tương ứng) (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow HB = HM$

$\Rightarrow \triangle HBM$ vuông cân tại H .

3) Tính số đo góc BKD .

+ $\triangle HBM$ vuông cân tại $H \Rightarrow \angle BME = 45^\circ$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAM$ có

$$\angle AMC = \angle AHB = 90^\circ$$

$$AB = CA$$

$$\angle ACM = \angle HAB \text{ (} \angle ABE = \angle CAP \text{)}$$

Do đó $\triangle ABH = \triangle CAM$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow AH = CM \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

+ Vì $MA = MH; NM = NC \Rightarrow MA = NC$

+ Xét $\triangle AMC$ và $\triangle CND$, có:

$$AC = CD \text{ (gt)}$$

$$MA = NC \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{CAM} = \widehat{DCN} \text{ (cùng phụ với } \widehat{ACM} \text{)}$$

Vậy: $\triangle AMC = \triangle CND \text{ (c-g-c)}$

$$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{CND} = 90^\circ \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\Rightarrow CP \perp DK$$

+ Mặt khác: $CP \perp EA \Rightarrow DK \parallel EA$

$$\Rightarrow \widehat{BKD} = \widehat{BME} = 45^\circ$$

Vậy $\widehat{BKD} = 45^\circ$.

Câu 104. (HSG 7 huyện Chương Mỹ năm học 2017 - 2018)

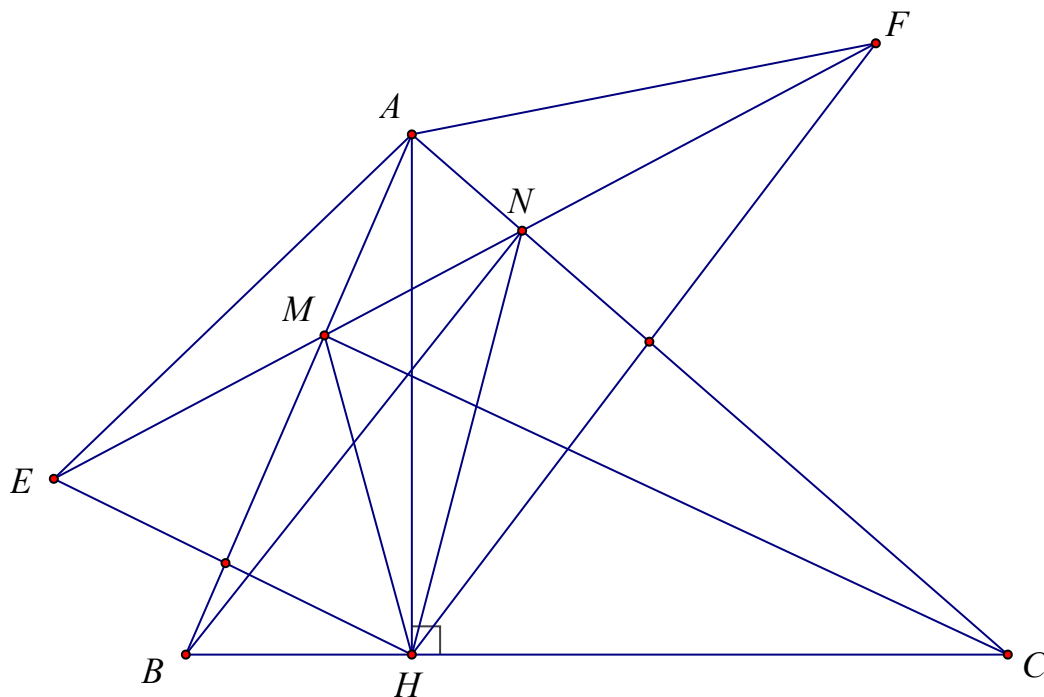
Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} < 90^\circ$, đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

a) $AE = AF$

b) HA là phân giác của $\widehat{MHN}$

c) $CM \parallel EH, BN \parallel FH$

Lời giải



a) Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH$ (1)

Vì AC là trung trực của HF nên ta có: $AH = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$

b) Vì $M \in AB$ nên MB là phân giác $\angle EMH$

MB là phân giác ngoài góc M của tam giác MNH

Vì $N \in AC$ nên NC là phân giác $\angle FNH$

$\Rightarrow NC$ là phân giác ngoài $\angle N$ của tam giác MNH

Do MB, NC cắt nhau tại A nên HA là phân giác trong góc H của tam giác MNH

Hay HA là phân giác của $\angle MHN$.

c) Ta có: $AH \perp BC$ (gt)

Mà HM là phân giác $\angle MHN$

$\Rightarrow HB$ là phân giác ngoài của $\angle H$ của tam giác MNH

MB là phân giác ngoài của $\angle M$ của tam giác HMN

$\Rightarrow NB$ là phân giác trong góc N của tam giác MNH

$\Rightarrow BN \perp AC$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau)

$\Rightarrow BN \parallel HF$ (cùng vuông góc với AC)

Chứng minh tương tự ta có: $EH \parallel CM$.

$$\angle FAG = \angle KAC = 22,5^\circ$$

Xét $\triangle IAE$ có AG là đường cao đồng thời là phân giác của $\angle IAE$

$\Rightarrow \triangle IAE$ cân tại $A \Rightarrow AI = AE$ (3)

Câu 105. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Kim Trung 2022 - 2023)

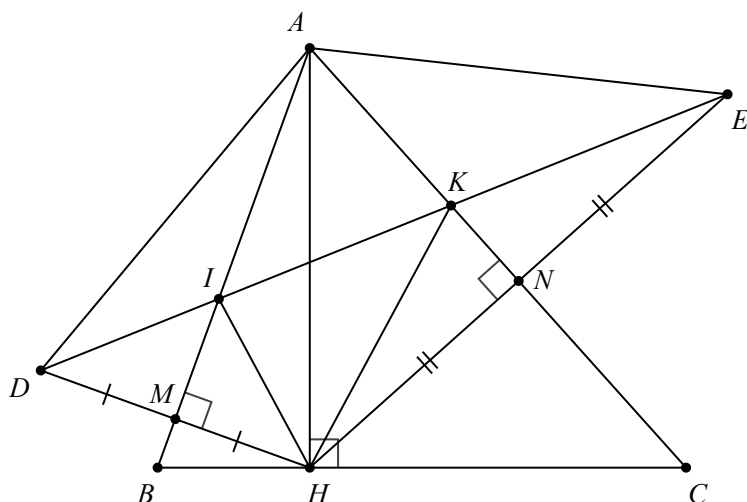
Cho $\triangle ABC$ nhọn, kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), lấy các điểm D và E ở ngoài tam giác sao cho AB là đường trung trực của HD và AC là đường trung trực của HE . Đoạn thẳng DE cắt cạnh AB ở I và cắt cạnh AC ở K ; HD cắt AB ở M và HE cắt AC ở N .

a) Chứng minh: $\triangle ADE$ cân.

b) Chứng minh: HA là tia phân giác của $\angle HK$.

c) Chứng minh: $\angle BAC = \angle HNC$.

Lời giải



a) +) c/m: $\triangle AMH = \triangle AMD$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = AD$ (1)

+) c/m: $\triangle ANH = \triangle ANE$ (c.g.c) $\Rightarrow AH = AE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD = AE$

$\triangle ADE$ có $AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân ở A .

b) +) c/m: $\triangle AHI = \triangle AID$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AHI = \angle AID$ (3)

+) c/m: $\triangle AKH = \triangle AKE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AHK = \angle AEK$ (4)

+) $\triangle ADE$ cân ở A (cmt) $\Rightarrow \angle ADI = \angle AEK$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \angle AHI = \angle AHK \Rightarrow HA$ là tia phân giác của góc $\angle HKI$

c) Ta có: $\triangle AMH = \triangle AMD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle MAH = \angle MAD$

$\triangle ANH = \triangle ANE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle NAH = \angle NAE$

Do đó $\angle MAH + \angle NAH = \angle MAD + \angle NAE \Rightarrow \angle DAE = 2\angle MAN = 2\angle BAC$

Ta có: $\angle ADE + \angle DAE + \angle AED = 180^\circ \Rightarrow 2\angle BAC + 2\angle AED = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle BAC + \angle AED = 90^\circ$ (6)

Lại có $AH \perp BC$ nên $\angle CHK + \angle KHA = 90^\circ$ (7)

Mà $\triangle AKH = \triangle AKE$ nên $\angle AED = \angle AHK$ (2 góc tương ứng) (8)

Từ (6); (7); (8) $\Rightarrow \angle BAC = \angle CHK$

Câu 106. (HSG 7 huyện Tương Dương 2022 - 2023; huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Cho $\triangle ABC$ nhọn, AD vuông góc với BC tại D . Xác định $I; J$ sao cho AB là trung trực của DI , AC là trung trực của $DJ; IJ$ cắt $AB; AC$ lần lượt ở L và K . Chứng minh rằng:

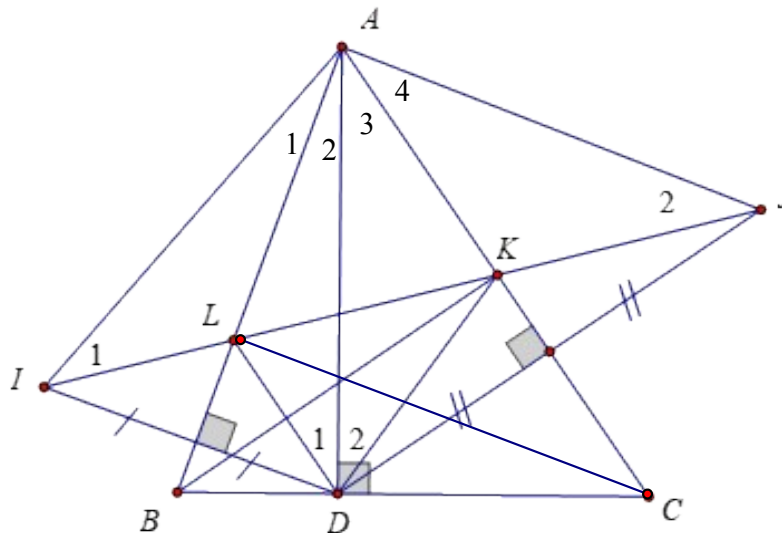
a) $\triangle AIJ$ cân

b) DA là tia phân giác của góc LDK

c) $BK \perp AC; CL \perp AB$

d) Nếu D là một điểm tùy ý trên cạnh BC . Chứng minh rằng góc IAJ có số đo không đổi và tìm vị trí điểm D trên cạnh BC để IJ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



a) Do AB là trung trực của DI ; AC là trung trực của DJ nên $AI = AD$, $AD = AJ$

Do đó $AI = AJ$. Suy ra $\triangle AIJ$ cân tại A .

b) Xét $\triangle ALI$ và $\triangle ALD$ có:

$AI = AD$, $LI = LD$ (do AB là trung trực của DI), cạnh AL chung

Do đó $\triangle ALI = \triangle ALD$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle I_1 = \angle D_1$ (hai góc tương ứng) (1)

Xét $\triangle AKJ$ và $\triangle AKD$ có:

$AJ = AD$, $KJ = KD$ (do AC là trung trực của DJ), cạnh AK chung

$\triangle AKJ = \triangle AKD$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle J_2 = \angle D_2$ (hai góc tương ứng) (2)

Mà $\triangle AIJ$ cân tại $A \Rightarrow \angle I_1 = \angle J_2$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2$

Vậy DA là tia phân giác của góc LDK .

c) Ta có KC là đường trung trực của $\triangle DKJ$ cân tại K do đó KC là phân giác ngoài tại đỉnh K của $\triangle DKL$.

DA là tia phân giác $\angle D_1$ của $\triangle DKL$, $DA \perp DC$ do đó DC là phân giác ngoài tại đỉnh D của $\triangle DKL$.

Suy ra LC là phân giác trong tại đỉnh L của $\triangle DKL$.

Mà $\angle AB$ cũng là phân giác ngoài tại đỉnh L của $\triangle DKL$.
 $\Rightarrow CL \perp AB$ tại L .

Tương tự: Ta có LB là đường trung trực của $\triangle DLI$ cân tại L do đó LB là phân giác ngoài tại đỉnh L của $\triangle DLI$.

DA là tia phân giác $\angle EDK$ của $\triangle DKL$, $DA \perp DC$ do đó DB là phân giác ngoài tại đỉnh D của $\triangle DKL$.

Suy ra KB là phân giác trong tại đỉnh K của $\triangle DKL$.

Mà $\angle AC$ cũng là phân giác ngoài tại đỉnh K của $\triangle DKL$.
 $\Rightarrow BK \perp AC$ tại K .

Vậy $BK \perp AC$, $CL \perp AB$.

d) Ta có $\angle A_1 = \angle A_2$ (vì $\triangle ALI = \triangle ALD$ chứng minh trên)

Chứng minh tương tự $\angle A_3 = \angle A_4$ (vì $\triangle AKJ = \triangle AKD$)

$$\angle IAJ = \angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 = 2(\angle A_2 + \angle A_3) = 2\angle BAC$$

Ta có

Vậy góc $\angle IAJ$ có số đo không đổi.

$\triangle AIJ$ cân tại A có $\angle IAJ$ có số đo không đổi nên cạnh đáy IJ nhỏ nhất nếu cạnh bên AI nhỏ nhất.

Ta có $AI = AD \geq AH$ (AH là đường vuông góc kẻ từ A đến BC)

Dấu bằng xảy ra tức là $AD = AH$ khi $D \equiv H$.

Vậy khi D là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC thì IJ nhỏ nhất.

Câu 107. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

Cho góc vuông $\angle Ay$, C là một điểm thuộc tia phân giác Az của $\angle Ay$. Từ C kẻ các đường thẳng vuông góc với Ax và Ay lần lượt tại B, D . Trên các đoạn thẳng AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho chu vi $\triangle AMN$ bằng $AB + AD$. Trên tia Bx lấy điểm E sao cho $BE = ND$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle CBE = \triangle CDN$

b) MC là tia phân giác của $\angle BMN$.

Lời giải

$\Rightarrow PC$ là tia phân giác của $\angle BMN$.

Câu 108. (HSG 7 huyện Ý Yên năm 2021 - 2022)

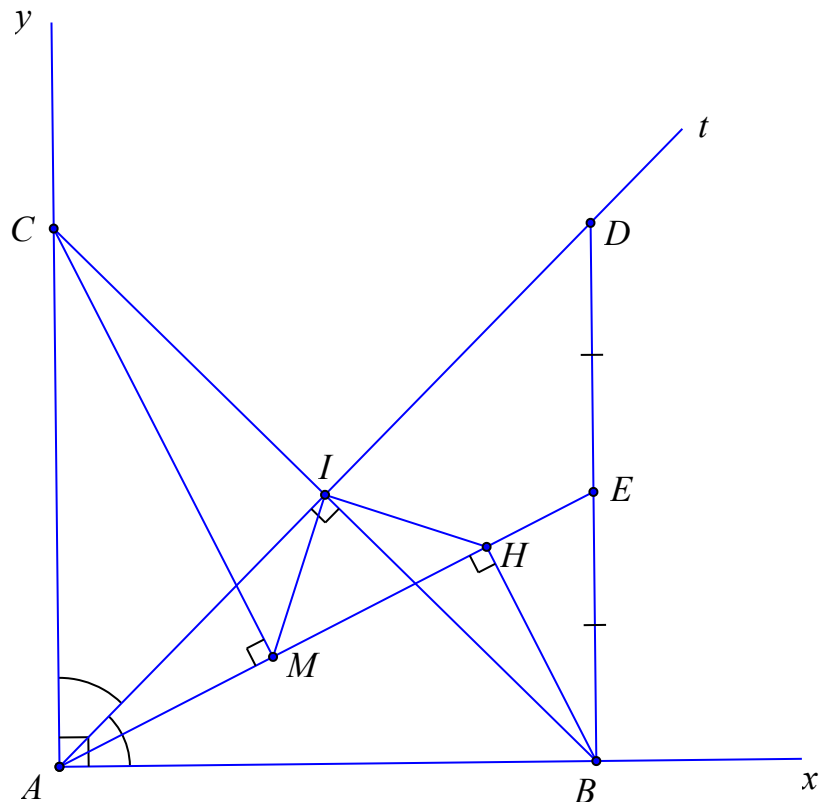
Cho góc $\angle xAy$ vuông, kẻ tia phân giác At của góc $\angle xAy$. Trên tia At lấy điểm I cố định, qua I kẻ đường thẳng vuông góc với At cắt Ax, Ay lần lượt tại B, C . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với Ax cắt tia At tại D . Gọi E là trung điểm của BD , gọi M, H lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C, B xuống AE .

1) Chứng minh $AM = BH$ và $BC = AD$

2) Chứng minh $IH > \frac{MH}{2}$ và tia phân giác của góc $\angle EMC$ luôn đi qua một điểm cố định

3) Gọi N là trung điểm của AC . Đường thẳng BM cắt DN tại K . Tính số đo $\angle BKN$.

Lời giải



1) Chứng minh $AM = BH$ và $BC = AD$

+ Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có đường phân giác AI đồng thời là đường cao nên $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Suy ra $AB = AC$ và $IB = IC$.

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H và $\triangle CMA$ vuông tại M có:

$AB = AC$ và $\angle HAB = \angle MCA$ (cùng phụ với $\angle MAC$)

Do đó $\triangle AHB = \triangle CMA$ (ch-gn),

suy ra $AM = BH$.

+ Xét $\triangle ABC$ và $\triangle BAD$ có

$$\angle CAB = \angle DBA = 90^\circ$$

AB chung

$$\angle ABC = \angle BAD = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle BAD \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BC = AD$$

2) Chứng minh $IH > \frac{MH}{2}$ và tia phân giác của góc EMC luôn đi qua một điểm cố định

+ Vì $\triangle IAB$ vuông cân tại I nên $\angle IAM + \angle MAB = 45^\circ$

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $\angle ABC = 45^\circ \Rightarrow \angle CBD = 90^\circ \Rightarrow \angle HBH + \angle HBE = 45^\circ$

Mà $\angle MAB = \angle HBE$ (cùng phụ $\angle HEB$) nên $\angle IAM = \angle HBH$

Từ đó ta có $\triangle IAM = \triangle IBH$ (c.g.c)

$$\Rightarrow IM = IH$$

Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có $IM + IH > MH$

$$\Rightarrow 2.IH > MH \Rightarrow IH > \frac{MH}{2} \text{ (đpcm)}$$

+ Theo chứng minh trên có $\triangle IAM = \triangle IBH \Rightarrow \angle AIM = \angle BIH$

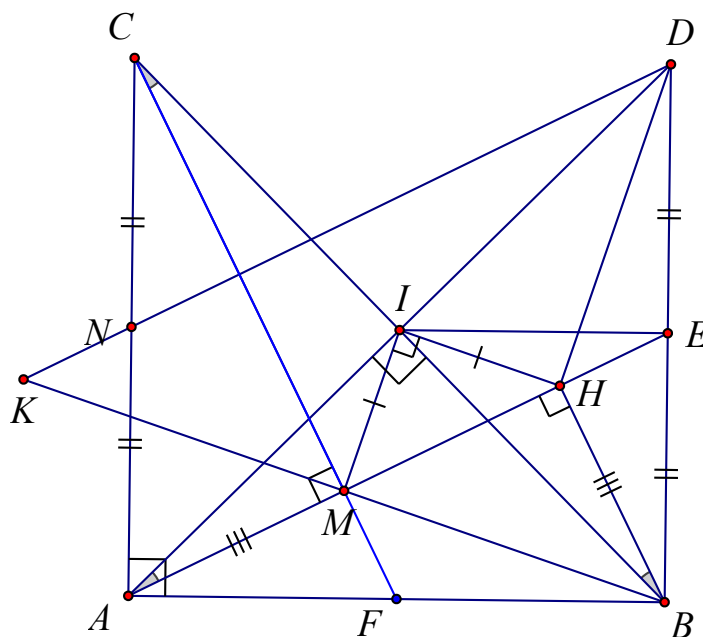
Ta lại có $\angle AIM$ phụ $\angle MIB$ nên $\angle BIH$ phụ $\angle MIB$, hay $\angle HIM = 90^\circ$

Do đó $\triangle IMH$ vuông cân tại $I \Rightarrow \angle HMI = 45^\circ$

Mà $\angle HMI + \angle HMC = 90^\circ \Rightarrow \angle HMC = 45^\circ \Rightarrow MI$ tia là phân giác của góc EMC

Do đó phân giác của góc EMC luôn đi qua điểm I cố định (đpcm)

3) Gọi N là trung điểm của AC . Đường thẳng BM cắt DN tại K . Tính số đo $\angle BKN$.



+ Do $AC \parallel BD$ và $AC=BD$, mà N, E lần lượt là trung điểm của AC và BD nên ta chứng minh được $\triangle DNE = \triangle AEN$ (c.g.c), từ đó suy ra $DN \parallel AE \Rightarrow \angle K = \angle MA$ (so le trong)

Gọi N là giao điểm của CM và AB , ta có $\triangle ACF = \triangle BAE$ (g.c.g)
 $\Rightarrow AF = BE$

$$BE = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AB$$

Mà

$\Rightarrow F$ là trung điểm của AB

Có $CF \parallel BH$, F là trung điểm của AB

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AH

$$\Rightarrow AM = MH$$

$$\Rightarrow MH = HB$$

$\Rightarrow \triangle HMB$ vuông cân tại $H \Rightarrow \angle HMB = 45^\circ$

Mà $\angle HMI = 45^\circ$ (cmt) $\Rightarrow \angle BMI = 90^\circ$

$$\Rightarrow MI \perp KB$$

Xét cặp góc kề bù $\angle ME$ và $\angle MA$, ta có MI là phân giác của $\angle ME$ (theo câu b) và $MI \perp KB$ nên MK là phân giác của $\angle MA \Rightarrow \angle K = \angle MA = 45^\circ$.

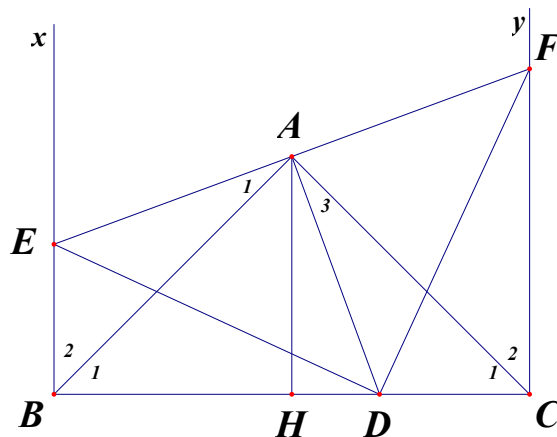
Câu 109. (HSG 7 Bắc Ninh - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Vẽ các tia Bx, Cy vuông góc với BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A . Gọi D là một điểm nằm giữa B và C . Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt Bx và Cy theo thứ tự tại E và F .

1) Chứng minh $\triangle AEB = \triangle ADC$;

- 2) Chứng minh tam giác EDF vuông cân;
 3) Xác định vị trí điểm D trên BC để EF có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



1) Ta có $\angle EAB + \angle BAD = 90^\circ$, $\angle CAD + \angle BAD = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle EAB = \angle DAC$$

$$\triangle ABC \text{ vuông cân} \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ; \angle EBA = \angle ACD = 45^\circ$$

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle ADC$ có

$$\angle EAB = \angle DAC \text{ (theo chứng minh trên)}$$

$$AB = AC \text{ (}\triangle ABC \text{ vuông cân)}$$

$$\angle EBA = \angle ACD = 45^\circ \text{ (theo chứng minh trên)}$$

Do đó $\triangle AEB = \triangle ADC$ (g. c. g)

2) Theo chứng minh phần a ta có $\triangle AEB = \triangle ADC \Rightarrow AE = AD$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow \triangle AED \text{ vuông cân} \Rightarrow \angle AED = \angle ADE = 45^\circ \quad (1)$$

Chứng minh tương tự $\triangle ABD = \triangle ACF \Rightarrow AF = AD$ (hai cạnh tương ứng)

$$\Rightarrow \triangle ADF \text{ vuông cân}$$

$$\Rightarrow \angle ADF = \angle AFD = 45^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EDF$ vuông cân.

3) Ta có: $\triangle AEB = \triangle ADC \Rightarrow AE = AD$ (hai cạnh tương ứng)

$$\triangle ABD = \triangle ACF \Rightarrow AD = AF \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Do đó } AE = AD = AF \Rightarrow EF = 2AD$$

Để EF nhỏ nhất thì AD nhỏ nhất. Mà A cố định nên AD nhỏ nhất khi $AD \perp BC$

Mặt khác $\triangle ABC$ vuông cân nên suy ra AD là trung trực của BC

$$\Rightarrow D \text{ là trung điểm của } BC \text{ hay } D \equiv H.$$

Vậy D là trung điểm của BC thì EF nhỏ nhất.

Câu 110. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thái Hòa 2022 - 2023)

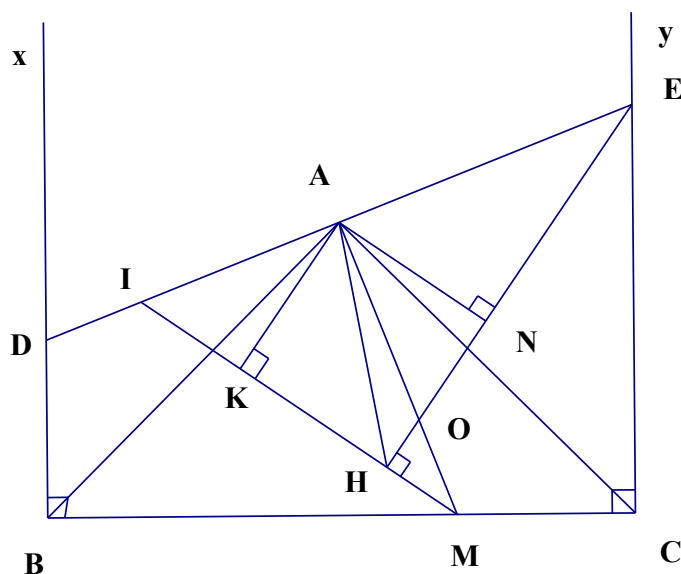
Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên cùng nửa mặt phẳng chứa A bờ BC kẻ các tia Bx và Cy vuông góc với BC . Gọi M là điểm thuộc cạnh BC (M không trùng B và C). Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt Bx và Cy theo thứ tự ở D và E .

a) Chứng minh : $AM = AE$

b) Tính số đo góc $\widehat{BME}$

c) Lấy I nằm giữa A và D . Kẻ HE vuông góc với MI . Chứng minh HA là tia phân giác của góc $\widehat{EHI}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle AEC$ có: $AB = AC$; $\widehat{ABM} = \widehat{ACE} = 45^\circ$; $\widehat{MAB} = \widehat{EAC}$ (Vì cùng phụ với $\widehat{MAC}$)

Suy ra: $\triangle AMB = \triangle AEC$. Do đó $AD = AM$

b) Vì $AE = AM$ và $AE \perp AM$ nên $\triangle AME$ vuông cân. Suy ra $\widehat{AME} = 45^\circ$

Chứng minh tương tự có $\widehat{AMD} = 45^\circ$. Do đó $\widehat{BME} = 90^\circ$

c) Từ A kẻ $AK \perp IM$ tại K và $AN \perp HE$ tại N

Gọi O là giao điểm của HE và AM .

Có $\widehat{AEN} = \widehat{EMK}$ (phụ với hai góc đối đỉnh $\widehat{AOE} = \widehat{HOM}$)

Chứng minh được $\triangle AKM = \triangle ANE$ (vì $AM = AE$ (gt); $\widehat{AKM} = \widehat{ANE} = 90^\circ$; $\widehat{KMA} = \widehat{AEN}$

(cùng phụ với $\widehat{HOM} = \widehat{AON}$)

Suy ra $AK = AN$. Hay HA là tia phân giác của $\widehat{EHI}$

Câu 111. (HSG 7 TP Trục Ninh 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , lấy điểm D bất kì thuộc cạnh BC (D khác B và

C). Trên nửa mặt phẳng chứa điểm A , kẻ tia Bx và Cy vuông góc với BC , đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt tia Bx và Cy lần lượt tại E và F . Chứng minh rằng:

1) $\triangle AEB = \triangle ADC$

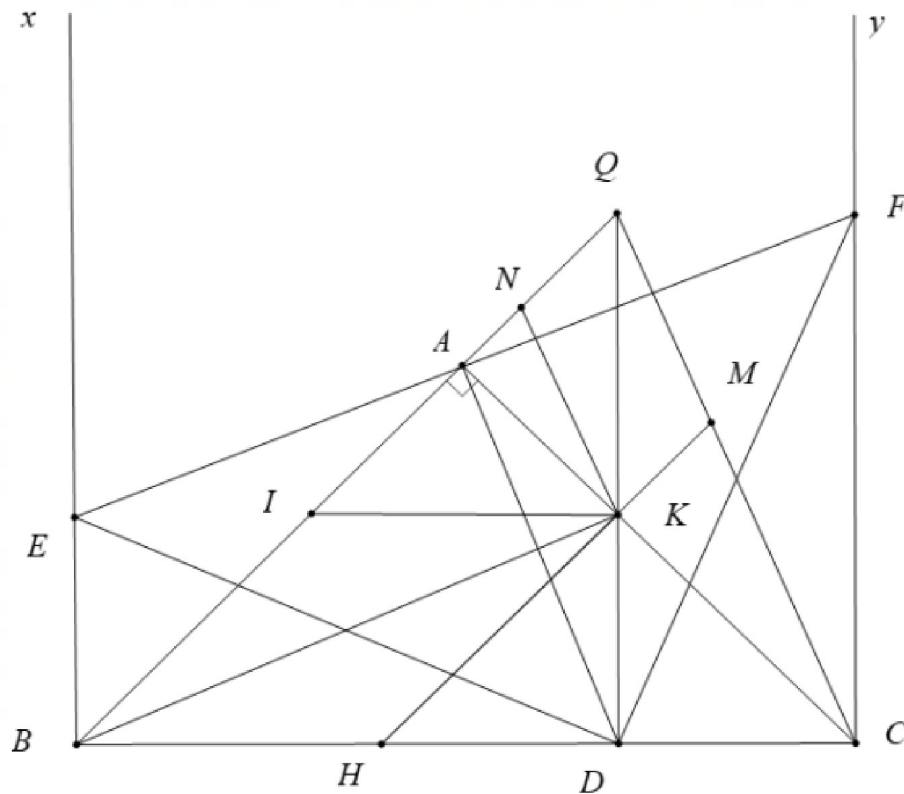
2) $\triangle DEF$ vuông cân.

3) Từ D kẻ đường thẳng song song với CF , đường thẳng này cắt AC và AB lần lượt tại K và Q . Chứng minh:

a) $BK \perp QC$.

b) $KQ + KB + KC < \frac{2}{3}(QB + QC + BC)$.

Lời giải



1) Ta có: $\triangle ABC$ vuông cân tại A

$\Rightarrow AB = AC$ và $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ$

Mà $Bx \perp BC \Rightarrow \angle ABE + \angle ABC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle ABE = 45^\circ$

Xét $\triangle AEB$ và $\triangle ADC$ có

$$\angle BAE = \angle DAC \text{ (vì cùng phụ với } \angle BAD)$$

$$AB = AC$$

$$\angle ABE = \angle ACD = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AEB = \triangle ADC \text{ (g.c.g)}(\text{đpcm}) \quad (*)$$

$$2) \text{ Từ } (*) \Rightarrow AE = AD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Xét } \triangle ADE \text{ có } AE = AD$$

$$\Rightarrow \triangle ADE \text{ cân tại } A$$

$$\text{mà } \angle DAE = 90^\circ \text{ (vì } AD \perp EF)$$

$$\Rightarrow \triangle ADE \text{ vuông cân tại } A$$

$$\Rightarrow \angle FED = \angle AED = 45^\circ \quad (1)$$

$$\text{Tương tự chứng minh được } \triangle ADF \text{ vuông cân tại } A.$$

$$\Rightarrow \angle EFD = \angle AFD = 45^\circ \quad (2)$$

$$\triangle DEF \text{ có } \angle EDF = 180^\circ - \angle DEF - \angle DFE = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$$

$$\triangle DEF \text{ vuông tại } D \text{ có } \angle FED = \angle DFE = 45^\circ \text{ (Theo (1) và (2))}$$

$$\Rightarrow \triangle DEF \text{ vuông cân tại } D \text{ (đpcm).}$$

$$3) \text{ a) Có } DQ \parallel CF \text{ (gt), } CF \perp BC \text{ (gt) nên } DQ \perp BC \text{ tại } D.$$

$$\text{Xét } \triangle BCQ \text{ có } QD, CA \text{ là hai đường cao (vì } DQ \perp BC, AC \perp BQ)$$

$$\text{mà } DQ \text{ cắt } CA \text{ tại } K \text{ nên } K \text{ là trực tâm của } \triangle BCQ$$

$$\Rightarrow BK \perp QC \text{ (Theo tính chất đồng quy của ba đường cao trong tam giác) (đpcm)}$$

$$\text{b) Từ } K \text{ vẽ } KM \parallel QB \text{ (} M \in QC), KN \parallel QC \text{ (} N \in QB).$$

$$\text{Chứng minh được } \triangle QNK = \triangle KMQ \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow QM = NK, KM = NQ \text{ (vì hai cạnh tương ứng)} \quad (3)$$

$$\text{Trong } \triangle QKM \text{ có } QK < QM + KM \text{ (bất đẳng thức trong tam giác)} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) } \Rightarrow QK < QM + QN \quad (5)$$

$$\text{Có: } KM \parallel BQ \text{ và } BQ \perp CK \text{ nên } KM \perp CK.$$

$$\triangle CKM \text{ vuông tại } K \Rightarrow CM \text{ là cạnh huyền nên là cạnh lớn nhất } \Rightarrow KC < CM \quad (6)$$

$$\text{Tương tự (6) ta có } BK < BN \quad (7)$$

$$\text{Từ (5) (6) (7) ta có } KQ + KC + KB < QM + QN + CM + BN$$

$$\Rightarrow KQ + KC + KB < QB + QC$$

Tương tự $KQ + KC + KB < BQ + BC$; $KQ + KC + KB < BC + QC$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có

$$3(KQ + KC + KB) < 2(QB + QC + BC)$$

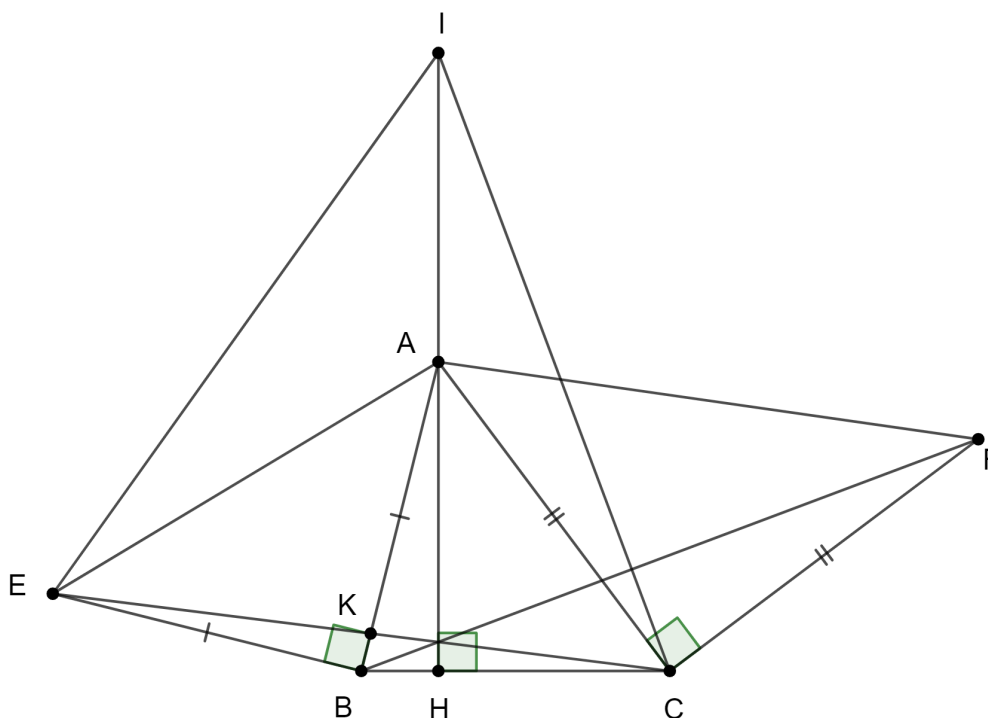
$$\Rightarrow (KQ + KC + KB) < \frac{2}{3}(QC + BC + BQ) \quad (\text{đpcm})$$

Câu 112. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC nhọn, AH là đường cao. Vẽ về phía ngoài của tam giác ABC các tam giác ABE vuông cân ở B và tam giác ACF vuông cân ở C . Trên tia đối của tia AH lấy điểm I sao cho $AI = BC$. Chứng minh:

- $\triangle ABI = \triangle BEC$.
- $BI = CE$ và $BI \perp CE$.
- AH, CE, BF cắt nhau tại một điểm.

Lời giải



a) Ta có $\angle BAI + \angle BAH = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\angle CBE + \angle BAH = 90^\circ + \angle ABH + \angle BAH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAI = \angle CBE$$

Xét $\triangle ABI$ và $\triangle BEC$ có:

$$AB = BE \quad (\text{giả thiết})$$

$$\angle BAI = \angle EBC \quad (\text{chứng minh trên})$$

$$AI = BC \text{ (giả thiết)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABI = \triangle BEC \text{ (c-g-c)}$$

$$\triangle ABI = \triangle BEC \text{ (cmt)} \Rightarrow BI = CE; \angle ABI = \angle BEC$$

b)

$$\triangle BEC \text{ có: } \angle EBC + \angle ECB + \angle BEC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 90^\circ + \angle ABH + \angle ECB + \angle IBA = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABH + \angle ECB + \angle IBA = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KBC + \angle ECB = 90^\circ$$

Suy ra $\triangle BCK$ vuông tại $K \Rightarrow CE \perp BI$.

Chứng minh tương tự $BF \perp CI$.

c) Xét $\triangle BIC$ có $IH \perp BC; CE \perp BI; BF \perp IC$

$$\Rightarrow IH; CE; BF$$

là ba đường cao của tam giác.

Vậy $IH; CE; BF$ đồng quy.

Câu 113. (HSG 7 Kim Thành 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A và có ba góc đều là góc nhọn. Vẽ trung tuyến AH .

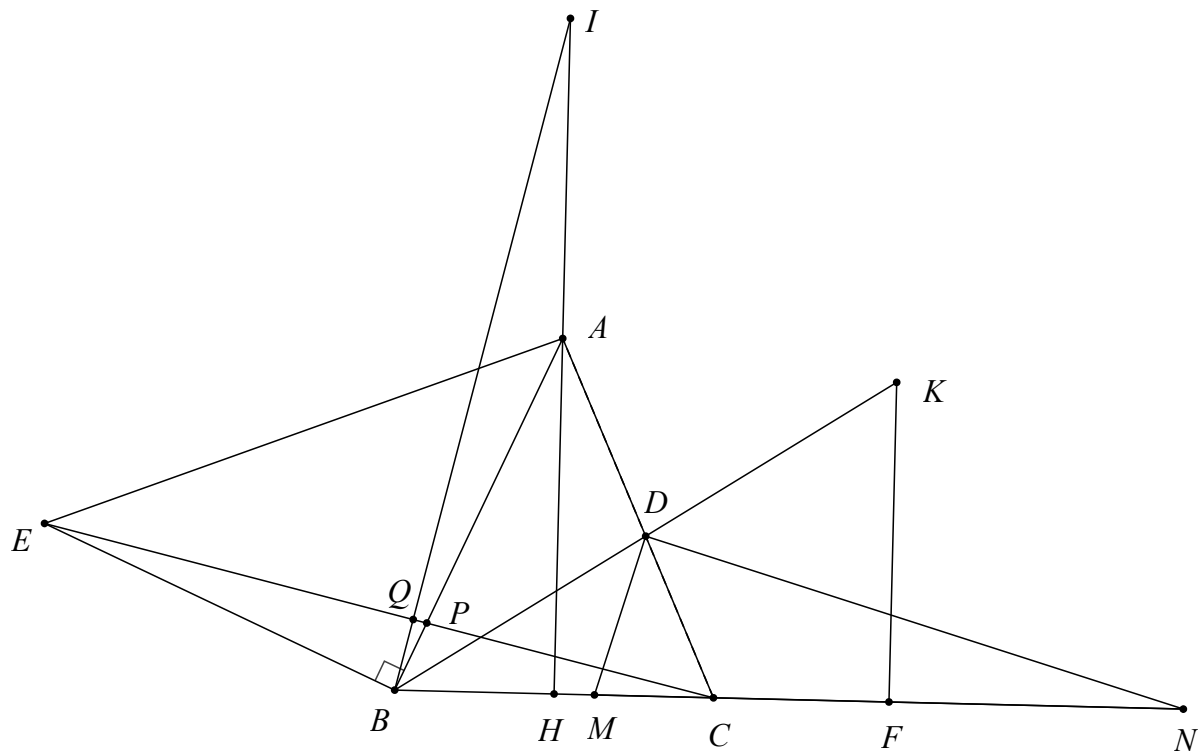
a) Chứng minh: AH vuông góc với BC .

b) Vẽ $BE = BA$, BE vuông góc với BA (E và C nằm khác phía so với đường thẳng AB).

Qua B vẽ đường thẳng vuông góc với EC cắt tia HA tại điểm I . Chứng minh: $BC = AI$.

c) Đường phân giác của $\angle ABC$ cắt AC tại D , đường phân giác của $\angle BDC$ cắt BC tại M , đường phân giác của $\angle ADB$ cắt BC tại N . Gọi F là trung điểm của MN . Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DK = DB$. Chứng minh: $\triangle BFK$ là tam giác vuông.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ACH$ có:

$$AB = AC \text{ (} \triangle ABC \text{ cân tại } A \text{);}$$

$$BH = CH \text{ (gt);}$$

AH chung;

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC$$

$$\text{Mà } \angle AHB + \angle AHC = 180^\circ \text{ (Kề bù)}$$

$$\Rightarrow \angle AHB = 180^\circ : 2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AH \perp BC \text{ (đpcm).}$$

b) Xét $\triangle BCE$ và $\triangle AIB$ có

$$BE = AB \text{ (gt)} \quad (1)$$

$$\angle IAB = \angle ABH + \angle AHB = \angle ABH + 90^\circ \text{ (Tính chất góc ngoài } \triangle ABH \text{)}$$

$$\angle CBE = \angle ABE + \angle ABH = 90^\circ + \angle ABH$$

$$\Rightarrow \angle CBE = \angle IAB \text{ (} = 90^\circ + \angle ABH \text{)} \quad (2)$$

Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của AB và IB với CE .

$$\triangle PBE \text{ vuông tại } B \text{ có } \angle BEC = 90^\circ - \angle BPQ$$

$$\triangle PBQ \text{ vuông tại } Q \text{ có } \angle ABI = 90^\circ - \angle BPQ$$

$$\Rightarrow \angle EEC = \angle ABI (=90^\circ - \angle PQ) \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow \triangle BCE = \triangle AIB$ (g.c.g)

$$\Rightarrow BC = AI \text{ (đpcm)}$$

c) DN là đường phân giác của $\angle ADB$ nên DN là phân giác của $\angle EDK$.

DM và DN lần lượt là hai tia phân giác của hai góc $\angle BDC$ và $\angle KDC$

Mà $\angle BDC + \angle KDC = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

nên $DM \perp DN$.

$\triangle MDN$ vuông tại D có DF là trung tuyến

$$\Rightarrow FM = FD = FN \text{ (học sinh phải chứng minh)}$$

$$\angle PMD = \angle MBD + \angle BDM \text{ (tính chất góc ngoài } \triangle BDM)$$

$$\angle PMD = \angle MBD + \angle EDM \text{ (} \angle BDM = \angle EDM)$$

$$\angle MDF = \angle EDF + \angle EDM$$

Mà $\triangle FDM$ cân tại F nên $\angle PMD = \angle MDF$

$$\Rightarrow \angle MBD = \angle EDF \text{ hay } \angle EBD = \angle EDF \quad (4)$$

$\triangle ABC$ cân tại A nên $\angle MCD = \angle ABC$

Mà $\angle MCD = 2\angle EBD$ (Do $\angle ABC = 2\angle EBD$)

$$\Rightarrow \angle MCD = 2\angle EDF \text{ (Do } \angle EBD = \angle EDF)$$

Mà $\angle MCD = \angle EDF + \angle FCD$ (tính chất góc ngoài $\triangle MCD$)

$$\Rightarrow 2\angle EDF = \angle EDF + \angle FCD \Rightarrow \angle EDF = \angle FCD \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có $\angle EBD = \angle FCD$

$\Rightarrow \triangle BDF$ cân tại D

$$\Rightarrow BD = FD$$

$$\Rightarrow FD = \frac{1}{2} BK$$

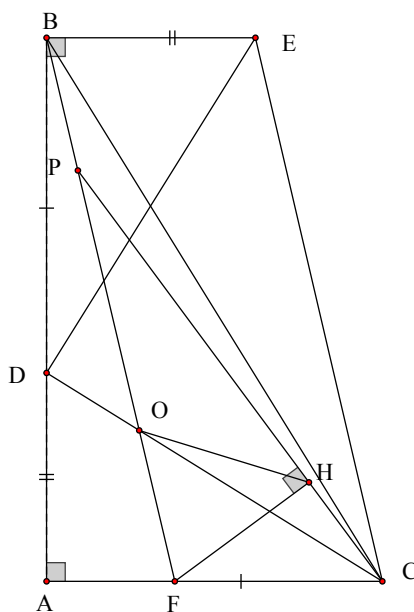
$\Rightarrow \triangle BKF$ vuông tại F .

Câu 114. (HSG 7 huyện Trữc Ninh, tỉnh Nam Định 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $BD = AC$. Trên đường vuông góc với AB tại B lấy điểm E sao cho $BE = AD$ (E và C nằm trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB)

- 1) Tam giác CDE là tam giác gì.
- 2) Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CF = AD$. Gọi giao điểm của BF và CD là O . Chứng minh $\angle EOF = 45^\circ$.
- 3) Trên BF lấy điểm P sao cho $\angle PCO = \angle BCP$. Kẻ $FH \perp CP (H \in CP)$. Chứng minh: HO là tia phân giác của $\angle FHP$.

Lời giải



- 1) Tam giác CDE là tam giác gì.

Xét $\triangle DBE$ và $\triangle CAD$ có:

$$BE = AD$$

$$\angle DBE = \angle DAC = 90^\circ$$

$$BD = AC.$$

$$\Rightarrow \triangle DBE = \triangle CAD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = DC \quad (1) \quad \angle BDE = \angle ACD; \angle DEB = \angle CDA$$

Mặt khác: $\triangle DBE$ vuông tại B có $\angle BDE + \angle DEB = 90^\circ$

Do đó: $\angle BDE + \angle CDA = 90^\circ \Rightarrow \angle EDC = 90^\circ$ vuông tại D (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle CDE$ vuông cân tại D.

- 2) Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $CF = AD$. Gọi giao điểm của BF và CD là O . Chứng minh $\angle EOF = 45^\circ$.

Ta có: $\triangle CDE$ vuông cân tại D $\Rightarrow \angle DEC = \angle DCE = 45^\circ$

Có $BE \perp AB$, $AC \perp AB$

$\Rightarrow BE \parallel AC \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{FCB}$ (so le trong).

Xét $\triangle BEC$ và $\triangle CFB$ có

$$\widehat{EBC} = \widehat{FCB}$$

$$BE = CF \text{ (cùng bằng } AD)$$

BC là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BEC = \triangle CFB \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{CBF} \text{ (góc tương ứng)} \Rightarrow BF \parallel CE$$

Khi đó $\widehat{BCE} = \widehat{EOF}$ (vì hai góc so le trong) mà $\widehat{BCE} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EOF} = 45^\circ$

Vậy $\widehat{EOF} = 45^\circ$.

3) Trên BF lấy điểm P sao cho $\widehat{PCO} = \widehat{BCP}$. Kẻ $FH \perp CP (H \in CP)$. Chứng minh: HO là tia phân giác của $\widehat{FHP}$.

Ta có: $\widehat{AFH}$ là góc ngoài tại đỉnh F của $\triangle HFC$ nên:

$$\widehat{AFH} = \widehat{FHC} = 90^\circ + 2\widehat{OCF} = 2(45^\circ + \widehat{OCF})$$

Mà $\widehat{AFO}$ là góc ngoài tại đỉnh F của $\triangle OFC$

$$\Rightarrow \widehat{AFO} = \widehat{EOF} + \widehat{PCO} = 45^\circ + \widehat{PCO},$$

Do đó $\widehat{AFO} = \frac{1}{2} \widehat{AFH}$, hay FO là tia phân giác của $\widehat{AFH}$.

$\triangle CFH$ có đường phân giác của góc C và đường phân giác của góc ngoài tại F cắt nhau tại O , nên đường phân giác của góc ngoài tại đỉnh H của $\triangle CHF$ cũng phải đi qua O .

$\Rightarrow HO$ là tia phân giác của $\widehat{FHP}$.

Câu 115. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

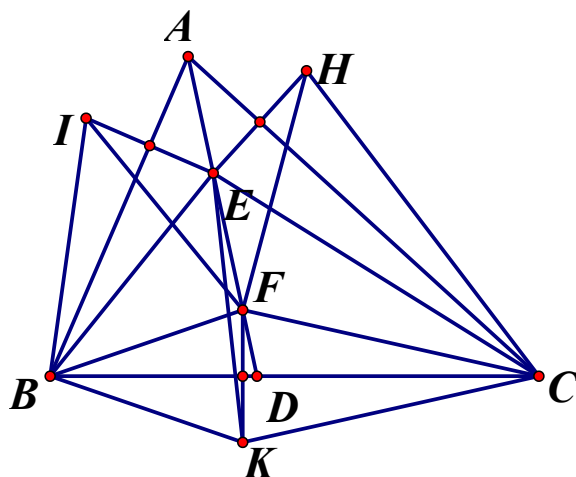
Cho tam giác ABC có đường phân giác AD . Trên đoạn thẳng AD lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{CBF}$. Vẽ các điểm H, K, I sao cho AC, BC, AB theo thứ tự là đường trung trực của các đoạn thẳng EH, FK, EI .

a) Chứng minh rằng: AD là đường trung trực của IH .

b) Chứng minh rằng: $\triangle FBI = \triangle KBE$.

c) Chứng minh rằng: $\widehat{ACE} = \widehat{BCF}$.

Lời giải



a) Ta có $AE = AI, AH = AE$ (tính chất đường trung trực)

$$\Rightarrow AI = AH$$

$\Rightarrow \triangle AIH$ cân tại A

mà AD là tia phân giác của $\angle A$

$\Rightarrow AD$ là đường trung trực của IH

b) Ta có: $BI = BE, \angle BFI = \angle BKE, BF = BK$

$$\Rightarrow \triangle FBI = \triangle KBE (\text{c.g.c})$$

c) Ta có: $CH = CE, CF = CK, EH = EK = EI$

$$\Rightarrow \triangle FHC = \triangle KEC (\text{c.c.c})$$

$$\Rightarrow \angle HCF = \angle ECK$$

$$\Rightarrow \angle ACE = \angle BCF$$

Câu 116. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

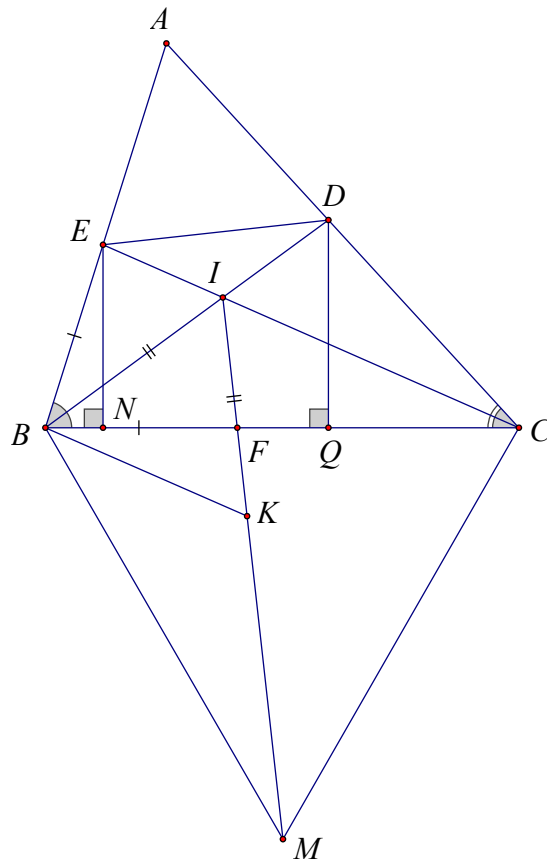
Cho tam giác ABC có $\angle A = 60^\circ$ (góc B và góc C nhọn). Tia phân giác của góc B cắt AC tại D , tia phân giác của góc C cắt AB tại E . BD cắt CE tại I . Trên cạnh BC lấy F sao cho $BF = BE$. Trên tia IF lấy M sao cho $IM = IB + IC$.

a) Tính góc $\angle BIC$ và chứng minh $ID = IF$.

b) Chứng minh tam giác BCM là tam giác đều.

c) Tìm điều kiện của tam giác $\triangle ABC$ để D và E cách đều đường thẳng BC .

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có $\angle A = 60^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = 120^\circ$

Vì BD và CE lần lượt là tia phân giác của $\angle B$ và $\angle C$ nên:

$$\Rightarrow \angle B + \angle C = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

Trong $\triangle BIC$ ta có:

$$\angle B + \angle C + \angle BIC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 60^\circ + \angle BIC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BIC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

* Xét $\triangle BIF$ và $\triangle BIE$ có:

$$BF = BE$$

$$\angle BIF = \angle BIE \text{ (Vì } BD \text{ là tia phân giác của } \angle B \text{)}$$

BI là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle BIF = \triangle BIE \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \angle BIF = \angle BIE = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle FIC = \angle DIC = 60^\circ$$

Xét $\triangle FIC$ và $\triangle DIC$ có:

$$\angle FIC = \angle DIC = 60^\circ$$

IC là cạnh chung

$$\widehat{FCI} = \widehat{DCI} \text{ (Vì } CE \text{ là tia phân giác của } \widehat{C} \text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta FIC = \Delta DIC \text{ (g-c-g)} \Rightarrow ID = IF \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Trên đoạn thẳng IM lấy K sao cho $IK = IB \Rightarrow \Delta IBK$ là tam giác đều $\Rightarrow IB = BK$.
 $\Delta IBC = \Delta KBM \text{ (c-g-c)} \Rightarrow BC = BM \text{ (1)}$

$$\Delta IBK \text{ là tam giác đều} \Rightarrow \widehat{IBK} = 60^\circ \text{ mà } \widehat{IBC} = \widehat{KBM} \Rightarrow \widehat{KBM} = 60^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta BCM$ là tam giác đều

c) $\Delta BIF = \Delta BIE \Rightarrow IF = IE$, mà $ID = IF \Rightarrow ID = IE$

$$\Rightarrow \Delta IDE \text{ cân tại } I, \text{ mà } \widehat{DIE} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{IDE} = 30^\circ$$

Kẻ $EN \perp BC$ và $DQ \perp BC \Rightarrow EN \parallel DQ$

(vì $\widehat{IDE} = 30^\circ$)

$$EN = DQ \Leftrightarrow ED \parallel BC \Leftrightarrow \widehat{EDC} = 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Vậy, để D và E cách đều đường thẳng BC thì tam giác ΔABC phải là tam giác đều.

Câu 117. (HSG 7 huyện Thảo Lâm, 2022 - 2023)

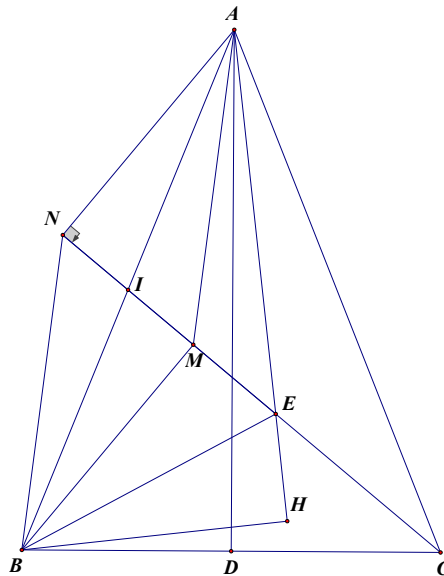
Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). Gọi I là trung điểm của AB , các điểm N, M lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ $A; B$ đến đường thẳng CI . Trên đoạn thẳng CI lấy điểm E sao cho $\widehat{EAB} = \widehat{ECA}$. Kẻ $BH \perp AE$ (H thuộc đường thẳng AE).

a) Chứng minh rằng $\Delta ANI = \Delta BMI$, rồi từ đó suy ra $AM \parallel BN$.

b) Chứng minh rằng BE là phân giác của $\widehat{MBH}$

c) Chứng minh rằng $\widehat{ECA} = \widehat{EBC}$

Lời giải



a) *) Xét $\triangle ANI$ và $\triangle BMI$ có

$$\angle ANI = \angle BMI (=90^\circ)$$

$$AI = BI \quad (I \text{ là trung điểm của } AB)$$

$$\angle AIN = \angle BIM \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$\Rightarrow \triangle ANI = \triangle BMI \quad (\text{ch-gn})$$

Suy ra $IN = IM$ (hai cạnh tương ứng).

*) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle BNI$ có

$$IN = IM \quad (\text{cm trên})$$

$$\angle AIM = \angle BIN \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$AI = BI \quad (I \text{ là trung điểm của } AB)$$

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle BNI \quad (\text{c-g-c})$$

$$\Rightarrow \angle AMI = \angle BNI$$

Mà hai góc ở vị trí so le trong

Vậy $AM \parallel BN$.

b) Xét $\triangle NAC$ và $\triangle HBA$ có

$$\angle ANC = \angle BHA (=90^\circ)$$

$$AC = AB \quad (\triangle ABC \text{ cân tại } A)$$

$$\angle ACN = \angle BAH \quad (\text{gt})$$

Suy ra $\triangle NAC = \triangle HBA$ (ch-gn)

Suy ra $AN = BH$ (Hai cạnh tương ứng)

Mà $AN = BM$ ($\triangle ANI = \triangle BMI$)

Suy ra $BH = BM$.

*) Xét $\triangle MBE$ và $\triangle HBE$ có

$$\angle BME = \angle BHE (=90^\circ)$$

BE là cạnh chung

$$BH = BM \text{ (cm trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle MBE = \triangle HBE \text{ (ch-cgv)}$$

$$\Rightarrow \angle MBE = \angle HBE$$

Vậy BE là phân giác của $\angle MBH$.

c) Ta có $\angle ECA = \angle EAB$ (gt);

$$\text{Nên } \angle HEA = \angle EAC + \angle ECA = \angle EAC + \angle EAB = \angle BAC$$

$$\angle BEH = \angle BEM \text{ (} \triangle MBE = \triangle HBE \text{)}$$

Mặt khác

$$\text{Mà } \angle BEM + \angle BEH + \angle HEA = 180^\circ; \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ; \angle ABC = \angle ACB$$

$$\text{Suy ra } \angle BEM = \angle ABC$$

$$\text{Ta lại có } \angle BEM = \angle EBC + \angle ECB; \angle ABC = \angle ACE + \angle ECB$$

$$\text{Suy ra } \angle ECA = \angle EBC.$$

Câu 118. (HSG 7 huyện Quế Võ 2022-2023)

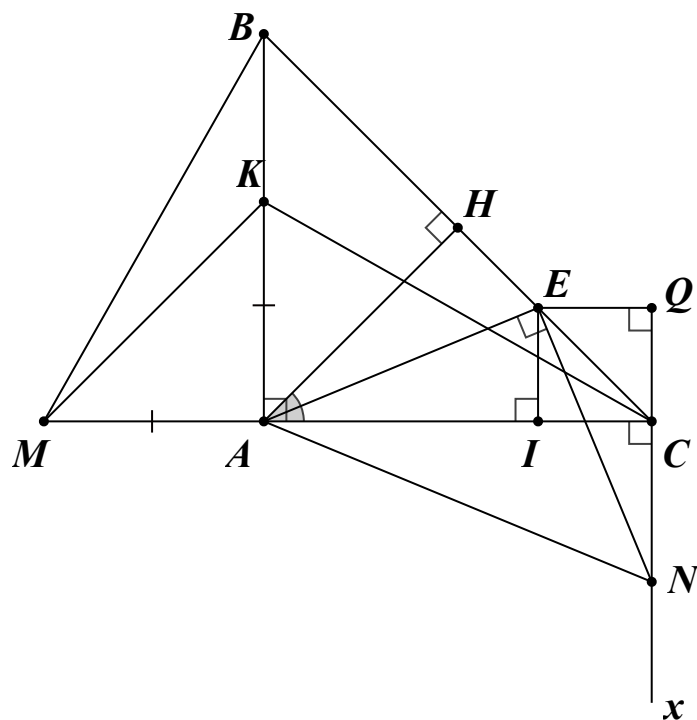
Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , đường cao AH , AE là phân giác của $\angle HAC$ ($E \in HC$)

a) Kẻ EI vuông góc với AC . Chứng minh rằng $HE = EI$. So sánh HE và EC .

b) Trên cạnh AB lấy điểm K , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $AK = AM$. Chứng minh rằng $CK \perp BM$.

c) Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Cx vuông góc với AC . Qua E kẻ EN vuông góc với AE ($N \in Cx$). Chứng minh rằng $AE = EN$.

Lời giải



a) * Chứng minh rằng $HE = EI$.

Xét $\triangle HAE$ và $\triangle IAE$, ta có:

$$\angle AHE = \angle AIE = 90^\circ$$

AE là cạnh huyền chung

$$\angle HAE = \angle IAE \text{ (vì } AE \text{ là tia phân giác)}$$

Vậy $\triangle HAE = \triangle IAE$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$$\Rightarrow HE = EI \quad (1) \quad \text{(Cạnh tương ứng)}$$

* So sánh HE và EC .

Trong tam giác vuông $\triangle EIC$ có EC là cạnh huyền, EI là cạnh góc vuông nên $EI < EC$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $HE < EC$

b) Chứng minh rằng $CK \perp BM$.

Ta có: $\angle BAH = 45^\circ$ (vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên AH là đường cao cũng là đường phân giác)

Lại có $\angle AMK = 45^\circ$ (vì $\triangle AMK$ vuông cân tại A do $\angle MAK = 90^\circ, AM = AK$)

Do đó: $\angle BAH = \angle AMK$ (mà ở vị trí đồng vị) $\Rightarrow MK \parallel AH$

Mà $AH \perp BC$ nên suy ra $MK \perp BC$

* Xét $\triangle MBC$ có hai đường cao MK và BA cắt nhau tại K nên K là trực tâm của tam giác $\Rightarrow CK \perp BM$

c) Chứng minh rằng $AE = EN$.

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle AMN$ có:

$$\widehat{BAN} = \widehat{MAN} \text{ (do } AH \text{ là tia phân giác của góc } A)$$

AN cạnh chung;

$$\widehat{BNA} = \widehat{MNA} = 90^\circ$$

$$\triangle ABN = \triangle AMN \text{ (g.c.g)}$$

Suy ra

$$\Rightarrow AB = AM \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABM \text{ cân tại } A$$

b) Chứng minh tương tự ta được $\triangle AEH = \triangle AFH \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AE = AF$

$$AB = AM \Rightarrow AE - AB = AF - AM \Rightarrow BE = MF \text{ (1)}$$

Mà

$$BK \parallel AC \text{ (} K \in EF \text{)}$$

Vẽ

Xét $\triangle BDK$ và $\triangle CDF$ có:

$$\widehat{KBD} = \widehat{FCD} \text{ (so le trong),}$$

$$DB = DC \text{ (gt),}$$

$$\widehat{BDK} = \widehat{FDC} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\triangle BDK = \triangle CDF \text{ (g.c.g)}$$

Suy ra

$$\Rightarrow BK = FC \text{ (hai cạnh tương ứng) (2)}$$

Ta có $\widehat{BKE} = \widehat{AFE}$ (hai góc đồng vị $BK \parallel AC$) và $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ ($\triangle AEF$ cân tại A)

$$\Rightarrow \widehat{BEK} = \widehat{BKE} \Rightarrow \triangle BEK \text{ cân tại } B \Rightarrow BE = BK \text{ (3)}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $MF = FC = BE$

c) Nói IB, IC

Xét $\triangle IBD$ và $\triangle ICD$ có:

$$DB = DC \text{ (gt),}$$

$$\widehat{BDI} = \widehat{CDI} = 90^\circ,$$

ID cạnh chung

Suy ra $\triangle IBD = \triangle ICD$ (c.g.c) suy ra $IB = IC$

Xét $\triangle IAE$ và $\triangle IAF$ có:

$$AE = AF \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{EAI} = \widehat{FAI} \text{ (cmt)}$$

AI chung

Suy ra $\Delta AIE = \Delta AIF$ (c.g.c) $\Rightarrow IE = IF, \angle AEI = \angle AFI$ (4)

Xét ΔIEB và ΔIFC có:

$$IB = IC \text{ (cmt)}$$

$$BE = CF \text{ (cmt)}$$

$$IE = IF \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta IEB = \Delta IFC \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \angle BEI = \angle IFC \text{ hay } \angle AEI = \angle IFC \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $\angle IFC = \angle AFI$

mà $\angle IFC + \angle AFI = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

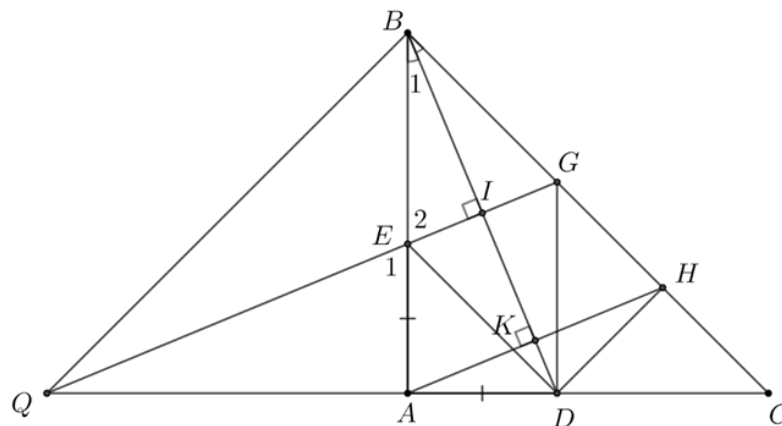
$$\Rightarrow \angle IFC = \angle AFI = 90^\circ \Rightarrow IF \perp AC$$

Câu 120. (HSG 7 Thái Thụy 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D , Trên cạnh AB lấy E sao cho $AE = AD$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại K và cắt BC ở H . Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại I và cắt BC tại G . Đường thẳng EG cắt AC tại Q .

- 1) Chứng minh: $\angle AEQ = \angle ADB$ và $\Delta ABD = \Delta AQE$.
- 2) Chứng minh: A là trung điểm của QC và ΔQBC vuông cân.
- 3) Chứng minh: DH vuông góc với BC .
- 4) Chứng minh: $GB = GD$.

Lời giải



- 1) Chứng minh $\angle AEQ = \angle ADB$ và $\Delta ABD = \Delta AQE$.

Vì $\Delta ABD, \Delta ABE$ là các tam giác vuông tại A và I nên $\angle ADB + \angle B_1 = 90^\circ$; $\angle E_2 + \angle B_1 = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle E_2 = \angle ADB$

Mà $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (Hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{ADB}$$

Hay $\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEQ$ có:

$$AD = AE \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{QAE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AQE \text{ (g - c - g)}$$

2) Chứng minh: A là trung điểm của QC và $\triangle QBC$ vuông cân.

Từ $\triangle ABD = \triangle AQE$ (câu 1) $\Rightarrow AB = AQ$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AB = AC \Rightarrow AC = AQ \Rightarrow A$ là trung điểm của QC .

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABQ$ có:

$$AC = AQ \text{ (câu 1)}$$

AB là cạnh chung

$$\widehat{BAQ} = \widehat{BAC} = 90^\circ$$

Do đó $\triangle ABC = \triangle ABQ$ (c - g - c)

Suy ra $BC = BQ$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle QBC$ cân tại B (1)

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABQ} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{EBQ} = \widehat{EBA} + \widehat{ABQ} = \widehat{EBA} + \widehat{EBA} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle QBC$ vuông cân tại B .

3) Chứng minh: DH vuông góc với BC .

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle HBK$ có:

BK là cạnh chung

$$\widehat{BKA} = \widehat{BKH} = 90^\circ$$

$$\widehat{ABK} = \widehat{HBK} \text{ (vì } BD \text{ là tia phân giác của } \widehat{ABC} \text{)}$$

Do đó $\triangle ABK = \triangle HBK$ (g - c - g)

$$\Rightarrow BA = BH \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle HBD$ có:

$$BA = BH \text{ (cmt)}$$

BD là cạnh chung

$$\angle ABD = \angle HBD \text{ (vì } BD \text{ là tia phân giác của } \angle ABC)$$

Do đó $\triangle ABD = \triangle HBD$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle BHD = 90^\circ \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Suy ra DH vuông góc với BC .

4) Chứng minh: $GB = GD$.

Xét $\triangle EBI$ và $\triangle GBI$ có:

BI là cạnh chung

$$\angle EBI = \angle GBI \text{ (vì } BD \text{ là tia phân giác của } \angle ABC)$$

$$\angle BIE = \angle BIG = 90^\circ$$

Do đó $\triangle EBI = \triangle GBI$ (g - c - g) $\Rightarrow EI = IG$ (2 cạnh tương ứng)

$\triangle AED$ có $\angle AED = 90^\circ$ và $AE = AD$ nên $\triangle AED$ vuông cân tại A

Suy ra $\angle AED = \angle ABC = 45^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị

Nên $ED \parallel BC \Rightarrow \angle BGI = \angle FED$ (2 góc so le trong)

Xét $\triangle EDI$ và $\triangle GBI$ có:

$$EI = IG \text{ (cmt)}$$

$$\angle FED = \angle BGI \text{ (cmt)}$$

$$\angle EID = \angle BIG \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

Do đó $\triangle EDI = \triangle GBI$ (g - c - g)

Suy ra $ED = GB$ (2 cạnh tương ứng) (3)

Xét $\triangle EDI$ và $\triangle GDI$ có:

DI là cạnh chung

$$EI = IG \text{ (cmt)}$$

$$\angle EID = \angle GID = 90^\circ$$

Do đó $\triangle EDI = \triangle GDI$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = DE$ (4)

Từ (3); (4) suy ra $GB = GD$.

Câu 121. (HSG 7 huyện Thanh Trì, Thành phố Hà Nội năm học 2021 - 2022)

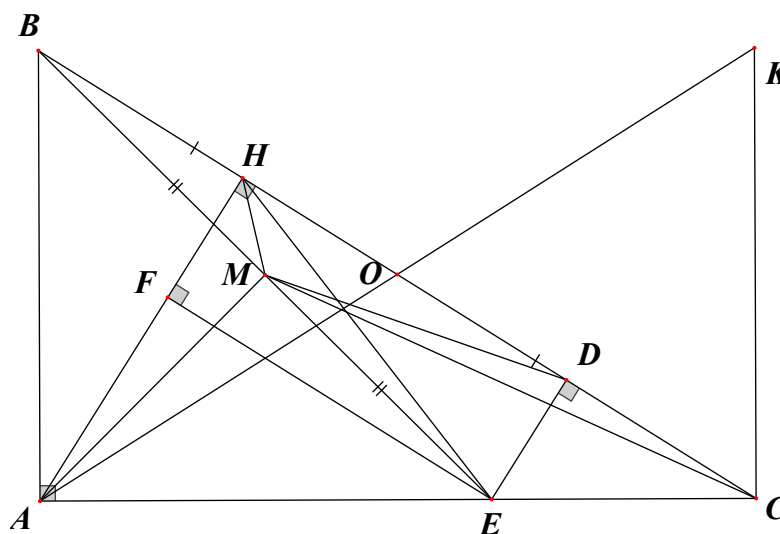
Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), gọi O là trung điểm của đoạn thẳng BC . Trên tia đối của tia OA lấy điểm K sao cho $OA = OK$.

a) Chứng minh $\triangle ABC = \triangle CKA$

b) Vẽ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Qua điểm D vẽ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại E . Gọi F là hình chiếu của điểm E trên AH . Chứng minh $AF = HB$.

c) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BE . Tính số đo $\angle HM$.

Lời giải



a) Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OKC$ có
 $OB = OC$ (O là trung điểm BC)

$$\angle BOA = \angle COK$$

$$OA = OK \text{ (GT)}$$

Do đó $\triangle OAB = \triangle OKC$ (c.g.c)

suy ra $AB = CK$ và $\angle ABO = \angle CKO$ nên $\angle ACK = \angle OCK + \angle BCA = \angle KCA = 90^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CKA$ có AC chung, $\angle BAC = \angle KCA = 90^\circ$ và $AB = CK$ (cmt)

Suy ra $\triangle ABC = \triangle CKA$ (c.g.c).

b) Ta có $EF \parallel HD$ cùng vuông góc với AH nên $\angle AEF = \angle CHD = \angle BAH$ (cặp góc đồng vị).

Xét $\triangle HEF$ và $\triangle EHD$ có

$$\angle FHE = \angle HED \text{ (so le trong)}$$

HE là cạnh chung

$$\angle HEF = \angle EHD \text{ (so le trong)}$$

Do đó $\triangle HEF = \triangle EHD$ (g.c.g) nên $EF = HD$ mà $HD = AH$ nên $AH = EF$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle EAF$ có $\angle AHB = \angle EFA = 90^\circ$, $AH = EF$ (cmt) và $\angle BAH = \angle AEF$ (cmt)
suy ra $\triangle ABH = \triangle EAF$ (g.c.g) suy ra $BH = AF$ (hai cạnh tương ứng)

c) Vì các tam giác ABE và BDE vuông tại A và D nên $AM = DM = \frac{1}{2}BE$.

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle DHM$ có

HM là cạnh chung

$AM = DM$ (cmt)

$AH = DH$ (gt)

Suy ra $\triangle AHM = \triangle DHM$ (c.c.c) nên $\angle AHM = \angle DHM = \frac{1}{2}\angle AHD = 45^\circ$

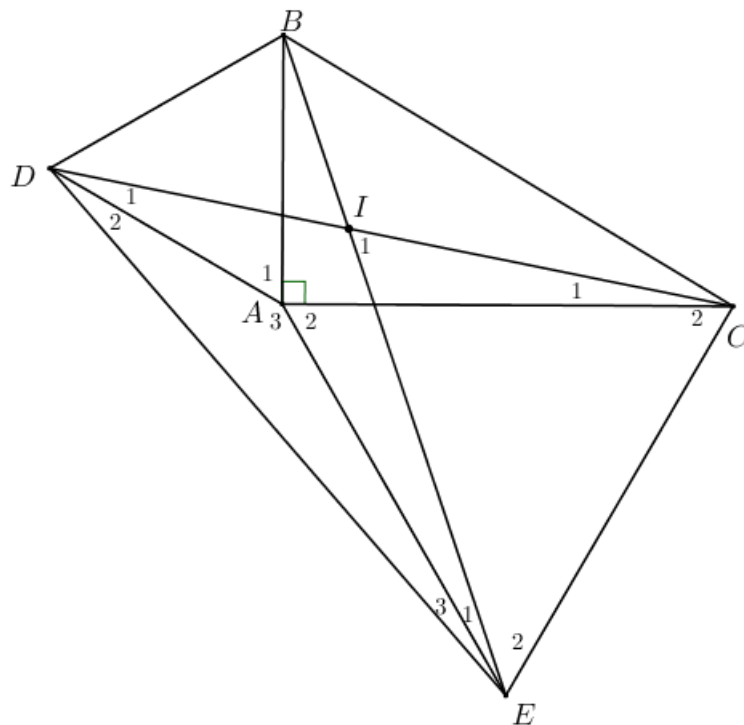
Vậy $\angle EHM = 45^\circ$.

Câu 122. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2022 - 2023; huyện Thạch Thành 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm BE và CD . Chứng minh rằng:

- 1) $\triangle ADC = \triangle ABE$.
- 2) $DE = BE$.
- 3) $\angle EIC = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\angle DIE$.

Lời giải



- 1) Ta có:
$$\begin{cases} \angle BAC = \angle A_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \angle BAE = \angle A_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle BAC = \angle BAE$$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có:

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c - g - c).

$$2) \text{Ta có: } \widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{BAC} + \widehat{A_2} = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A_3} = 150^\circ = \widehat{BAC} = 150^\circ$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có:

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{A_3} = \widehat{BAC} \text{ (Chứng minh trên)}$$

AE : Cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c - g - c).}$$

$$\Rightarrow DE = BE \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

3) * Ta có: $\triangle ADC = \triangle ABE$ (theo câu 1)) suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{E_1}$ (hai góc tương ứng)

Lại có: $\widehat{F_1} + \widehat{E_2} + \widehat{FEC} = 180^\circ$ (Tổng 3 góc trong $\triangle ICE$)

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} + (\widehat{AEC} - \widehat{E_1}) + (\widehat{E_1} + \widehat{E_2}) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} + 60^\circ - \widehat{E_1} + \widehat{E_1} + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} + 120^\circ = 180^\circ \text{ (Vì } \widehat{E_1} = \widehat{E_1} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} = 60^\circ$$

* Vì $\triangle DAE = \triangle BAE$ (chứng minh câu b) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_3}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow EA$ là tia phân giác của $\widehat{DEI}$ (1)

Vì $\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{BAE} \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (Hai góc tương ứng) $\Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\widehat{EDC}$ (2)

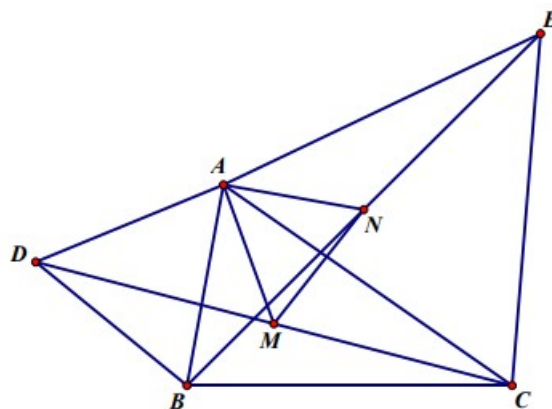
Từ (1) và (2) $\Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ ba trong $\triangle DIE$ hay IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB \neq AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE .

a) Chứng minh rằng $DC = BE$

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

Lời giải



a) Có $\triangle ADB$ đều suy ra $\angle DAB = 60^\circ$ tương tự $\angle EAC = 60^\circ$

Ta có: $AB = AD$ (gt), $\angle DAC = \angle BAE (= \angle BAC + 60^\circ)$ và $AC = AE$ (gt)

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c) suy ra $DC = BE$

b) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle AEN$ có: $CM = EN$ (cmt), $\angle ACM = \angle AEN$ (cmt), $CA = EA$ (gt)

Và $\angle CAM = \angle EAN \Rightarrow \angle MAN = \angle MAC + \angle CAN = \angle EAN + \angle CAN = \angle CAE = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AMN$ đều

Câu 124. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương; huyện Kim Thành 2018 - 2019; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

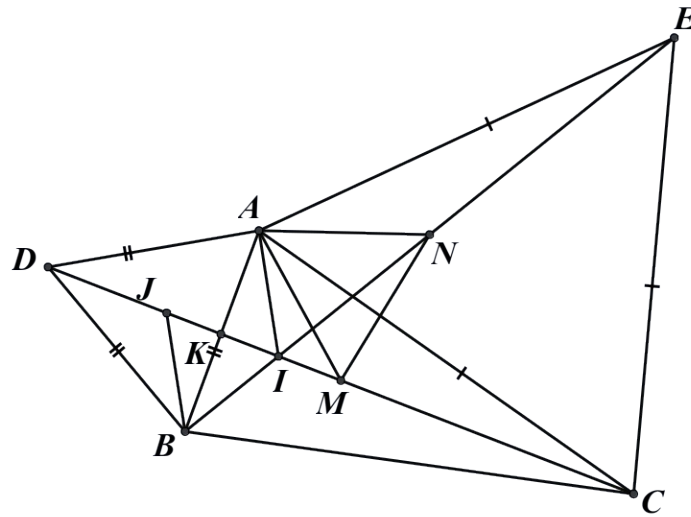
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB , DC .

1) Chứng minh rằng: $DC = BE$.

2) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Tính số đo $\angle BIK, \angle AMN$.

3) Chứng minh rằng IA là phân giác của $\angle BIE$.

Lời giải



1) Ta có $\angle DAC = 60^\circ + \angle BAC = \angle EAB$ (1)

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có: $AD = AB$ ($\triangle ABD$ đều); $\angle DAC = \angle EAB$ (cmt)
 $AC = AE$ ($\triangle EAC$ đều) $\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE$ (c.g.c) $\Rightarrow DC = BE$

2) $\triangle ADC = \triangle ABE$ (cm câu a) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$

Lại có trong $\triangle BIK$: $\angle KBI + \angle BKI + \angle KIB = 180^\circ$

Ta có trong $\triangle DAK$: $\angle ADK + \angle DKA + \angle DAK = 180^\circ$; $\angle BKI = \angle DKA$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle BIK = \angle DAK$ mà $\angle DAK = 60^\circ$ ($\triangle ABD$ đều) $\Rightarrow \angle BIK = 60^\circ$

$\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \angle ACM = \angle AEN$

Có $DC = BE$ (câu a) $\Rightarrow \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}BE \Rightarrow CM = EN \Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) (1)

$\Rightarrow \angle CAM = \angle EAN \Rightarrow \angle CAM + \angle CAN = \angle EAN + \angle CAN \Rightarrow \angle MAN = \angle EAC$

Mà $\triangle EAC$ đều $\Rightarrow \angle EAC = 60^\circ \Rightarrow \angle MAN = 60^\circ$

(1) $\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ cân tại $A \Rightarrow \triangle AMN$ đều $\Rightarrow \angle AMN = 60^\circ$

3) Trên tia ID lấy T sao cho $IT = IB \Rightarrow \triangle BIT$ cân tại I mà $\angle BIK = 60^\circ$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle BIT$ đều $\Rightarrow BT = BI$; $\angle BKT = 60^\circ$

Do đó $\angle FBI = \angle DBA$ (cùng bằng 60°)

$\Rightarrow \angle FBI - \angle FBK = \angle DBA - \angle FBK \Rightarrow \angle IBA = \angle KBD$

Lại có $BA = BD, BT = BI \Rightarrow \triangle IBA = \triangle KBD$ (c.g.c)

Mà $\angle AIB = \angle KTB = 120^\circ$, lại có $\angle BID = 60^\circ \Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle BID = \angle DIA \Rightarrow IA$ là tia phân giác của $\angle DIE$.

Câu 125. (HSG 7 trường Duyên Hải, huyện Hưng Hà; trường Tây Đô; trường Phạm Đôn Lễ, huyện Hưng Hà; huyện Văn Lâm; huyện Hậu Lộc; huyện Cẩm Thủy 2022 - 2023; huyện Ứng Hòa 2021 - 2022; huyện Sơn Trà 2018 - 2019; huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài $\triangle ABC$ các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của CD và BE , K là giao của AB và CD .

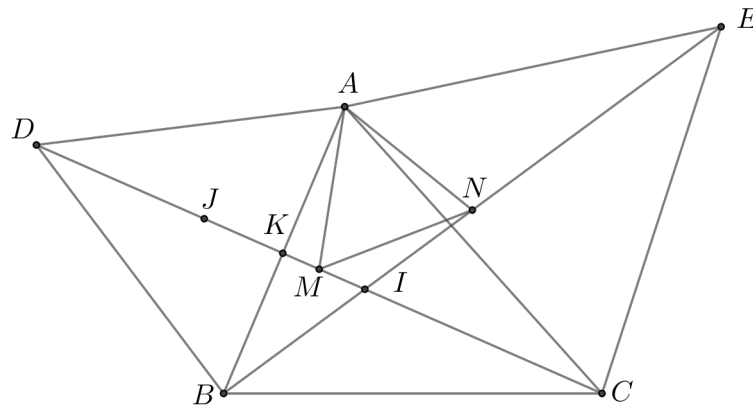
a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$

b) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$

c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

d) Chứng minh rằng AI là phân giác của góc DIE .

Lời giải



1) Ta có : $AD = AB$; $\angle DAC = \angle BAE$ và $AE = AC$ suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)

2) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$ mà $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh)

Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra $\angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (đpcm)

3) Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$
 $\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$

$\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều

4) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$ và

$\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ$ suy ra $\angle JBA = \angle JBD$, kết hợp $BA = BD$

$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AIB = \angle JCB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ \Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$

Từ đó suy ra AI là phân giác của góc DIE

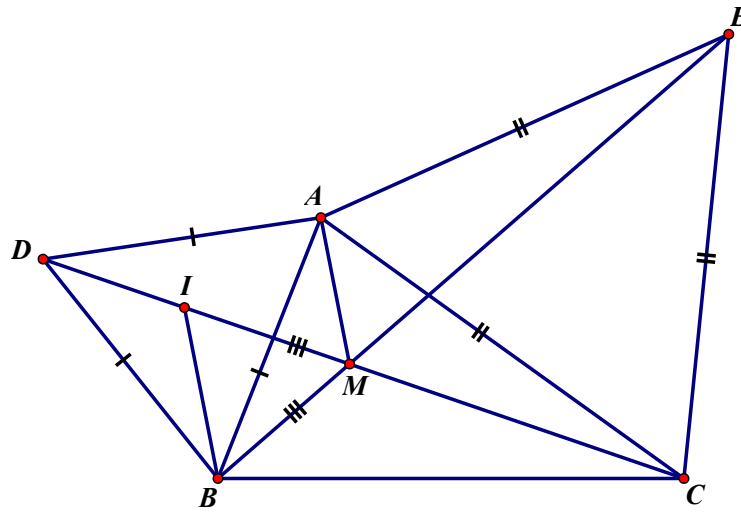
Câu 126. (HSG 7 Thị xã Bỉm Sơn 2022-2023)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD, ACE .

a) Chứng minh rằng $\triangle ADC = \triangle ABE$

- b) Gọi M là giao điểm của BE, CD . Tính $\angle BMC$ và chứng minh $MD = MA + MB$.
- c) Chứng minh rằng $\angle AMC = \angle BMC$.

Lời giải



- a) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có
 $AD = AB$ (vì $\triangle ABD$ đều)
 $\angle DAC = \angle BAE$ (vì $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = 60^\circ + \angle BAC$; $\angle BAE = \angle BAC + \angle ACE = 60^\circ + \angle BAC$)
 $AC = AE$ (vì $\triangle ACE$ đều)
 Nên $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c - g - c)
 Suy ra $\angle AEB = \angle ACD$ (góc tương ứng)
- b) Gọi M là giao điểm của BE, CD . Ta có $\angle BMC$ là góc ngoài của $\triangle EMC$ nên
 $\angle BMC = \angle MEC + \angle MCE = \angle MEC + \angle MCA + \angle ACE = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$
 Suy ra $\angle EMC = 60^\circ$ (kề bù với $\angle BMC$)
 Trên MD lấy I sao cho $MI = MB$ và $\angle IMB = 60^\circ$ (đối đỉnh $\angle EMC$)
 Nên $\angle IMB = \angle IBA = 60^\circ$
 Xét $\triangle MBA$ và $\triangle IBD$ có
 $MI = IB (= MI)$
 (do tam giác MIB đều)
 $BA = BD$
 $\angle MBA = \angle IBD$ (vì $\angle MBA + \angle ABI = 60^\circ = \angle IBD + \angle ABI$)
 Nên $\triangle MBA = \triangle IBD$ (c - g - c)
 $DI = MA$ (cạnh tương ứng)
 Ta có $MD = MI + ID = MB + AM$.

c) Ta có $\triangle MBA = \triangle IDB$ nên $\angle MBA = \angle IDB = 120^\circ$

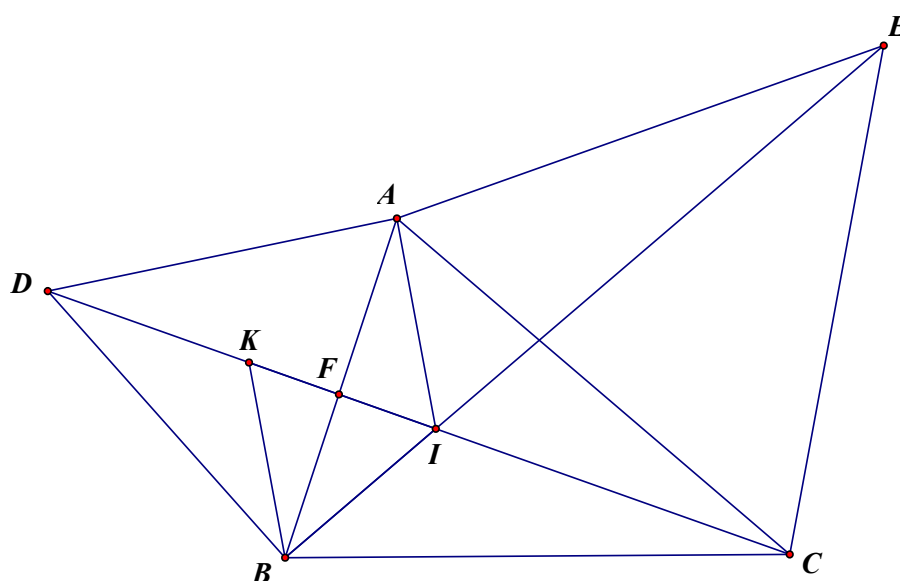
Suy ra $\angle AMC = \angle BMC$.

Câu 127. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm 2021 - 2022)

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Vẽ về phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD .

- 1) Chứng minh $BE = CD$.
- 2) Tính $\angle BIC$.
- 3) Chứng minh rằng $IA + IB = ID$.

Lời giải



- 1) Chứng minh $BE = CD$.

Ta có $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow \angle CAE = 60^\circ$; $\triangle ABD$ đều $\Rightarrow \angle BAD = 60^\circ$

Suy ra

$$\angle BAE = \angle BAC + \angle CAE = \angle BAC + 60^\circ \quad (\text{vì tia } AC \text{ nằm giữa hai tia } AB \text{ và } AE)$$

$$\angle DAC = \angle BAC + \angle BAD = \angle BAC + 60^\circ \quad (\text{vì tia } AB \text{ nằm giữa hai tia } AD \text{ và } AC)$$

$$\angle BAE = \angle DAC \quad (\text{vì cùng bằng } \angle BAC + 60^\circ)$$

Xét $\triangle BAE$ và $\triangle DAC$ có

$$BA = DA \quad (\triangle ABC \text{ đều})$$

$$\angle BAE = \angle DAC$$

$$AE = AC \quad (\triangle ACE \text{ đều})$$

$$\Rightarrow \triangle BAE = \triangle DAC \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow BE = CD \quad (\text{vì 2 cạnh tương ứng})$$

2) Tính góc BIC.

Gọi F là giao điểm của AB và DC, ta có:

$$\triangle BAE = \triangle DAC \Rightarrow \angle ABE = \angle ADC \text{ hay } \angle FBI = \angle FDA$$

Xét $\triangle FBI$ và $\triangle FDA$, lập luận sau ra được $\angle FIB = \angle FAD$

$$\triangle ABD \text{ đều} \Rightarrow \angle BAD = 60^\circ \text{ hay } \angle FIB = 60^\circ$$

$$\angle BIC + \angle FIB = 180^\circ \text{ (vì 2 góc kề bù), mà } \angle FIB = 60^\circ \Rightarrow \angle BIC = 120^\circ$$

3) Chứng minh rằng $IA + IB = ID$.

$$\triangle BID \text{ có } \angle IDB = 60^\circ$$

$$\angle DBI > 60^\circ \text{ do } \angle DBI > \angle DBA = 60^\circ$$

Trên cạnh ID lấy K sao cho $IK = IB$

Suy ra $IK < ID$ suy ra K nằm giữa I và D

Xét $\triangle BIK$ có:

$$\begin{cases} IK = IB \\ \angle KIB = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle BIK \text{ là tam giác đều} \begin{cases} BK = BI \\ \angle KBI = 60^\circ \end{cases}$$

$$\angle BIK = \angle ABI$$

$$\Rightarrow \triangle DBK = \triangle ABI \text{ (c.g.c)} \Rightarrow DK = AI$$

Vì K nằm giữa I và D nên $IK + KD = ID$ mà $IK = IB$, $KD = IA$

$$\text{Suy ra } IB + IA = ID$$

$$\text{Kết luận: } IB + IA = ID$$

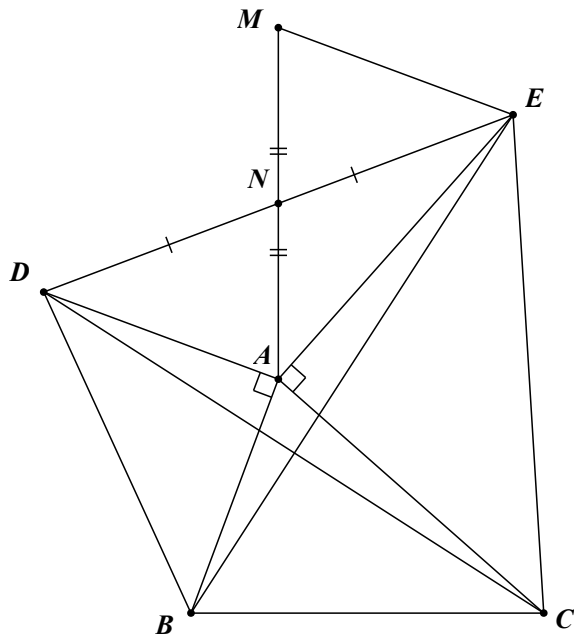
Câu 128. (HSG 7 huyện 2017- 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle A < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB ; AE vuông góc và bằng AC .

a) Chứng minh $DC = BE$.

b) Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME$, $\triangle ABC = \triangle EMA$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BAE$ ta có

$$DA = BC \quad (\text{gt})$$

$$AE = AC \quad (\text{gt})$$

$$\angle DAC = \angle BAE (=90^\circ + \angle BAC)$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow DC = BE$$

Xét $\triangle AIE$ và $\triangle TIC$ có:

$$\angle I_1 = \angle I_2 \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$\angle E_1 = \angle C_1 \quad (\triangle DAC = \triangle BAE)$$

$$\Rightarrow \angle EAI = \angle CTI$$

$$\Rightarrow \angle CTI = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DC \perp BE$$

b) Ta có: $\triangle MNE = \triangle AND \quad (\text{c.g.c})$

$$\Rightarrow \angle D_1 = \angle MEN, \quad AD = ME$$

mà $AD = AB \quad (\text{gt})$

$$\Rightarrow AB = ME \quad (\text{đpcm}) \quad (1)$$

Vì $\angle D_1 = \angle MEN \Rightarrow DA \parallel ME$

$$\Rightarrow \angle BAE + \angle AEM = 180^\circ \quad (\text{trong cùng phía})$$

Mà $\angle BAC + \angle DAE = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle BAC = \angle AEM \quad (2)$$

Ta lại có $AC = AE \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\triangle ABC = \triangle EMA$ (đpcm).

Câu 129. (Đề minh họa HSG 7 trường Thái Phương- Hưng Hà năm học 2022 - 2023)

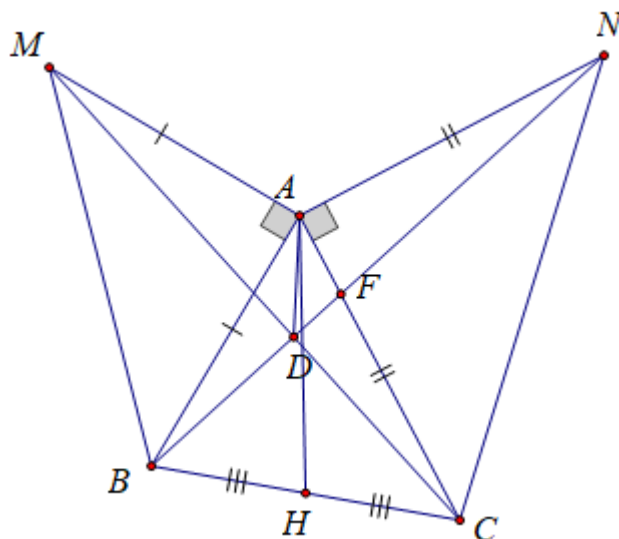
Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABM , ACN vuông cân tại A ; BN và MC cắt nhau tại D .

a) Chứng minh: $\triangle AMC = \triangle ABN$; $BN \perp CM$.

b) Gọi H là trung điểm của BC . Chứng minh: $AH = \frac{1}{2}MN$.

c) Chứng minh rằng DA là phân giác của góc MDN .

Lời giải



a) Chứng minh được $\angle MAC = \angle BAN$ (Cùng bằng $90^\circ + \angle BAC$).

$MA = AB$ ($\triangle MAB$ vuông cân tại A)

$AC = AN$ (tam giác NAC vuông cân tại A)

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c)

Gọi giao điểm của BN với AC là F .

Chỉ ra được $\angle AFN = \angle BFC$ (vì $\triangle AMC = \triangle ABN$)

$\angle ANF = \angle BCD$ (vì $\triangle AMC = \triangle ABN$)

Từ đó suy ra $\angle FDC = \angle FAN = 90^\circ$

Do đó: $BN \perp CM$.

b) Trên tia đối của tia HA lấy điểm K sao cho $AH = HK$

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2} AK \quad (1)$$

Xét $\triangle AHC$ và $\triangle KHB$ có:

$$AH = HK \text{ (cách vẽ); } \angle AHC = \angle KHB \text{ (đối đỉnh); } HC = BH \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHC = \triangle KHB \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \angle ACH = \angle KBH \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Xét $\triangle ABC$ có $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ (đ/l)

$$\Rightarrow \angle ABC + \angle KBH = 180^\circ - \angle BAC$$

$$\Rightarrow \angle ABK = 180^\circ - \angle BAC \quad (*)$$

$$\text{Mà } \angle MAN = 180^\circ - \angle BAC \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \Rightarrow \angle ABK = \angle MAN$$

Xét $\triangle MAN$ và $\triangle ABK$ có

$$MA = AB \text{ (cmt), } \angle ABK = \angle MAN \text{ (cmt); } AN = AC \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle MAN = \triangle ABK \text{ (c - g - c)} \Rightarrow MN = AK \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } AH = \frac{1}{2} MN \text{ (đpcm).}$$

c) Trên tia BN lấy điểm E , sao cho $BE = MD$

$$\text{Ta chứng minh được } \triangle AMD = \triangle ABE \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \angle MAD = \angle BAE \Rightarrow \angle DAE = \angle MAB = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADE \text{ vuông tại } A \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \angle ADE = 45^\circ \Rightarrow \angle ADE = \frac{1}{2} \angle MDN$$

$$\Rightarrow DA \text{ là phân giác của } \angle MDN.$$

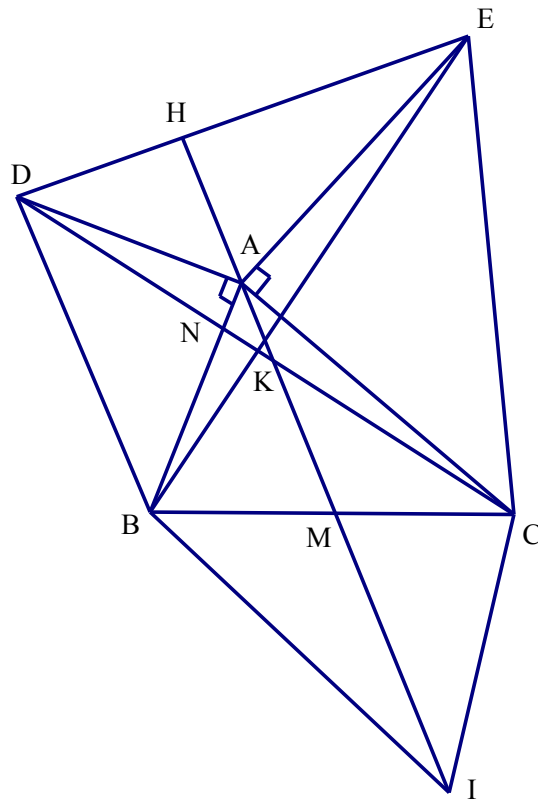
Câu 130. (HSG 7 huyện Bá Thước 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC nhọn; vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là tam giác ABD và tam giác ACE .

a) Chứng minh $DC = BE$ và $DC \perp BE$.

b) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến ED và M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh A, M, H thẳng hàng.

Lời giải



a)* Chứng minh $DC = BE$?

Ta có $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = 90^\circ + \angle BAC$

Tương tự $\angle BAE = 90^\circ + \angle BAC \Rightarrow \angle DAC = \angle BAE$

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có: $AD = AB$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A), $\angle DAC = \angle BAE$ (cmt) và $AC = AE$ ($\triangle ACE$ vuông cân tại A) $\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE$ ((c-g-c))

Suy ra $DC = BE$.

* Chứng minh $DC \perp BE$?

Gọi K, N lần lượt là giao điểm của DC với BE và AB

$\triangle AND$ và $\triangle KNB$ có: $\angle AND = \angle KNB$ (đối đỉnh); $\angle ADN = \angle KBN$ ($\angle DAC = \angle BAE$)

$\Rightarrow \angle DAN = \angle BKN$ (định lý tổng 3 góc trong tam giác)

Mà $\angle DAN = 90^\circ$ ($\triangle ABD$ vuông cân tại A)

$\Rightarrow \angle BKN = 90^\circ \Rightarrow DC \perp BE$ tại K

b) Chứng minh A, H, M thẳng hàng?

Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho $MI = MA$

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle IMC$ có: $MI = MA$ (vẽ thêm), $\angle AMB = \angle IMC$ (đối đỉnh); $MB = MC$ (cmt)

Suy ra $\triangle AMB = \triangle IMC$ (c.g.c) $\Rightarrow CI = AB$ và $CI \parallel AB$

Có $CI = AB$ (cmt) mà $AD = AB \Rightarrow CI = AD$

Có $\angle DAE + \angle EAC + \angle DAB + \angle BAC = 360^\circ$ mà $\angle DAB = 90^\circ$ và $\angle EAC = 90^\circ$ suy ra

Có $CI \parallel AB$ suy ra $\angle ABC = \angle ICB$

Có $\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 180^\circ$ mà $\angle ABC = \angle ICB$ suy ra $\angle BAC + \angle BCA + \angle ICB = 180^\circ$ hay $\angle BAC + \angle ACI = 180^\circ$

Suy ra $\angle ACI = \angle DAE$ (cùng bù $\angle BAC$)

Xét $\triangle ACI$ và $\triangle EAD$ có: $CI = AD$ (cmt), $\angle ACI = \angle DAE$ (cmt), $CA = AE$ (cmt)

Suy ra $\triangle ACI = \triangle EAD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle CAI = \angle AED$ mà $\angle AED + \angle EAH = 90^\circ$ ($\triangle AHE$ vuông tại H)

$\Rightarrow \angle CAI + \angle EAH = 90^\circ \Rightarrow \angle MAH = 180^\circ \Rightarrow M, A, H$ thẳng hàng.

Câu 131. (HSG 7 thị trấn Càng Nàng; trường Nguyễn Tông Quai, huyện Hưng Hà; trường Nguyệt Ân, huyện Ngọc Lặc; huyện Tiên Du 2022 - 2023; huyện Bồ Trạch 2017 - 2018)

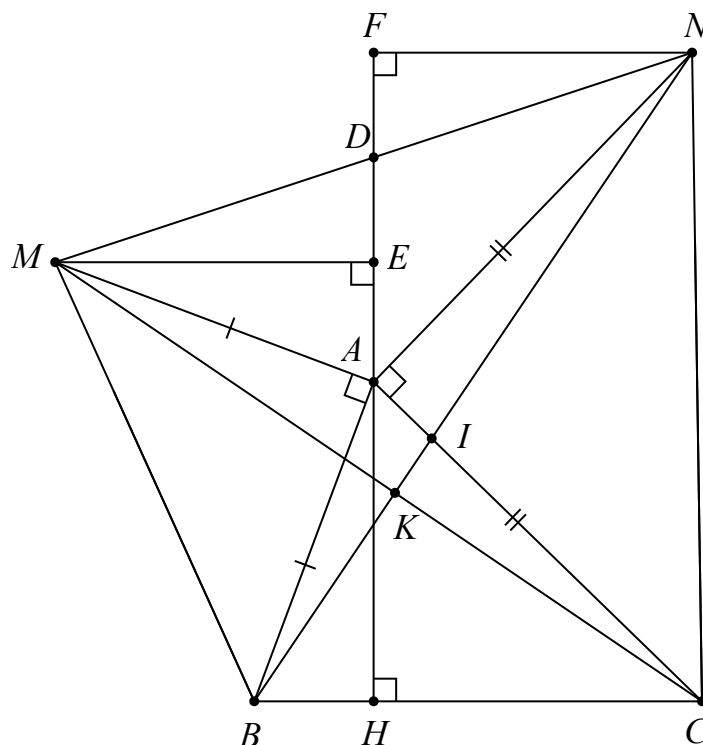
Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$.

a) Chứng minh rằng: $MC = BN$.

b) Chứng minh: $BN \perp CM$.

c) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$, có:

$$AM = AB \text{ (} \triangle AMB \text{ vuông cân)}$$

$$\angle MAC = \angle BAN \text{ (} = 90^\circ + \angle BAC \text{)}$$

$$AC = AN \text{ (} \triangle ACN \text{ vuông cân)}$$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c) $\Rightarrow MC = BN$ (2 cạnh tương ứng)

b) Gọi I là giao điểm của BN với AC , K là giao điểm của BN với MC .

$$\text{Vì } \triangle AMC = \triangle ABN \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \angle ANI = \angle KCI$$

$$\text{Mà } \angle AIN = \angle KIC \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \angle KCI + \angle KIC = \angle ANI + \angle AIN = 90^\circ$$

Do đó: $MC \perp BN$

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E , $NF \perp AH$ tại F . Gọi D là giao điểm của MN và AH .

$$\text{Ta có: } \angle BAH + \angle MAE = 90^\circ \text{ (vì } \angle MAB = 90^\circ \text{)} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \angle MAE + \angle AME = 90^\circ \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \angle AME = \angle BAH$$

Xét $\triangle MAE$ vuông tại E và $\triangle ABH$ vuông tại H có:

$$\angle AME = \angle BAH \text{ (chứng minh trên)}$$

$$MA = AB \text{ (} \triangle AMB \text{ vuông cân)}$$

Suy ra $\triangle MAE = \triangle ABH$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow ME = AH$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle AFN = \triangle CHA$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow FN = AH$

Ta có $ME \parallel NF$ (cùng vuông góc với AH) $\Rightarrow \angle EMD = \angle FND$ (hai góc so le trong)

Xét $\triangle MED$ vuông tại E và $\triangle NFD$ vuông tại F , có:

$$ME = NF (= AH); \angle EMD = \angle FND$$

$$\Rightarrow \triangle MED = \triangle NFD \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow MD = ND \text{ (hai cạnh tương ứng)} \Rightarrow D \text{ là trung điểm của } MN$$

Vậy AH đi qua trung điểm của MN .

Câu 132. (HSG 7 huyện Thái Thụy năm 2021 - 2022)

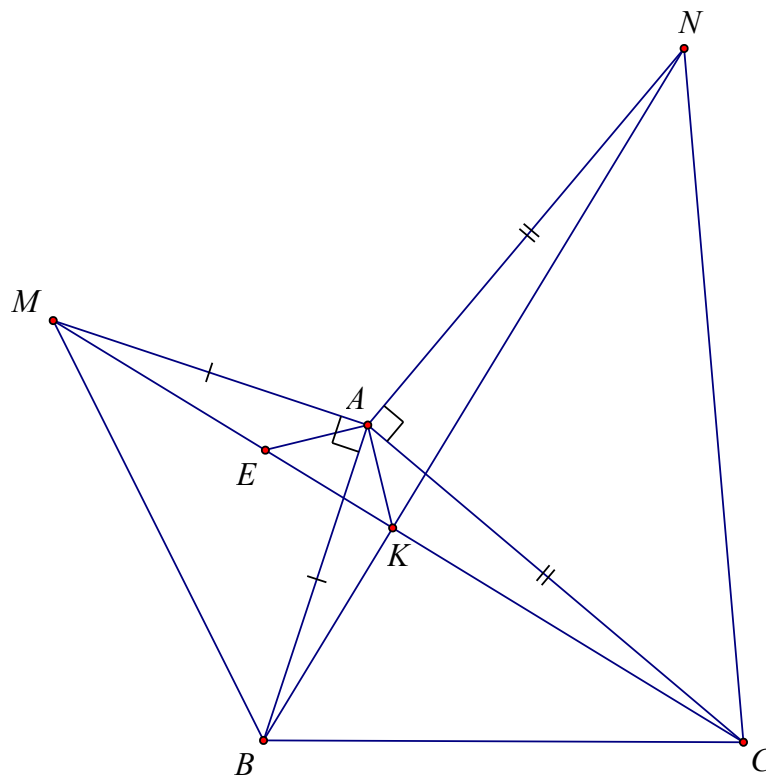
Cho $\triangle ABC$ có góc A nhỏ hơn 90° . Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm M sao cho $\triangle ABM$ vuông cân tại A . Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B lấy điểm N sao cho $\triangle ACN$ vuông cân tại A . Gọi K là giao điểm của BN và CM .

1. Chứng minh $\triangle AMC = \triangle ABN$.

2. Chứng minh $BN \perp CM$.

3. Tính $\angle KAC$

Lời giải



1) Chứng minh $\triangle AMC = \triangle ABN$.

Ta có $\angle MAC = \angle MAB + \angle BAC = 90^\circ + \angle BAC$

$\angle NAB = \angle NAC + \angle CAB = 90^\circ + \angle BAC$

Nên $\angle MAC = \angle NAB$

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có:

+ $AM = AB$ (vì $\triangle AMB$ vuông cân tại A)

+ $AC = AN$ (vì $\triangle ACN$ vuông cân tại A)

+ $\angle MAC = \angle NAB$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c)

2) Chứng minh $BN \perp CM$.

Gọi I là giao điểm của BN với AC

$\angle ANI = \angle KCI$ (vì $\triangle AMC = \triangle ABN$)

$\angle AIN = \angle KIC$ (đối đỉnh)

Xét $\triangle KIC$ có: $\angle KCI + \angle KIC + \angle CKI = 180^\circ \Rightarrow \angle CKI = 180^\circ - (\angle KCI + \angle KIC)$

Xét $\triangle AIN$ có: $\angle ANI + \angle AIN + \angle AN = 180^\circ \Rightarrow \angle AN = 180^\circ - (\angle ANI + \angle AIN)$

Nên $\Rightarrow \angle KNC = \angle NAI = 90^\circ$, do đó: $BN \perp CM$ tại K

3) Tính $\angle AKC$

Trên cạnh MC lấy điểm E sao cho $ME = BK$

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle AME$ ta có:

$$BK = ME, \angle ABK = \angle AME, AB = AM$$

Nên $\triangle ABK = \triangle AME$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = AK$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle AEK$ vuông cân tại A và $\angle EKA = 45^\circ$

Mà $\angle EKA + \angle AKC = 180^\circ$

Nên $\angle AKC = 135^\circ$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>