# BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

## 1. BÀI TẬP VỀ KHÔNG GIAN VECTOR

**Bài 1.1** Giả sử $A$ là một ma trận vuông cấp n, và $C(A) = \{B \mid BA = AB\}$ là tập hợp tất cả các ma trận vuông phức cấp $n$ giao hoán được với $A$. Chứng minh rằng: $C(A)$ là không gian vector con của không gian vector $M_{n\times n}$ và $\dim C(A) \geq n$.

**Bài 1.2** Cho $S$ là không gian con của không gian các ma trận vuông phức cấp $n$ $M_{n\times n}$ sinh bởi tập tất cả các ma trận có dạng $AB - BA$. Chứng minh rằng: $\dim S = n^2 - 1$.

**Bài 1.3** Cho $A, B$ là các không gian vector con của không gian vector hữu hạn chiều $V$ sao cho $A + B = V$. Gọi $n = \dim V, a = \dim A, b = \dim B$. Lấy $S$ là tập tất cả các tự đồng cấu $f$ của $V$ mà $f(A) \subset A, f(B) \subset B$. Chứng minh rằng $S$ là không gian con của không gian tất cả các tự đồng cấu của $V$ và hãy biểu thị số chiều của $S$ qua $a, b, n$.

**Bài 1.4** Cho $T$ là tự đồng cấu của không gian vector $V$. Giả sử $x \in V$ mà $T^m x = 0, T^{m-1}x \neq 0$ với $m$ là số nguyên nào đó. Chứng minh rằng: $x, Tx, T^2x, \ldots, T^{m-1}x$ độc lập tuyến tính.

**Bài 1.5** Cho $E$ là một không gian Euclide $n$ chiều. Chúng ta nói hai cơ sở $(a_i)$ và $(b_i)$ cùng hướng nếu ma trận chuyển từ cơ sở $(a_i)$ sang cơ sở $(b_i)$ có định thức dương. Giả sử $(a_i)$ và $(b_i)$ là hai cơ sở trực chuẩn cùng hướng. Chứng minh rằng $(a_i + 2b_i)$ cũng là một cơ sở của $E$ cùng hướng với $(a_i)$.

**Bài 1.6** Cho $\varphi$ là ánh xạ tuyến tính từ $V$ vào $W$, trong đó $V$ và $W$ là các không gian vector hữu hạn chiều. Gọi $L, Z$ là không gian vector con của $V$ và $W$. Chứng minh rằng:

a) $\dim \varphi(L) + \dim(\ker \varphi \cap L) = \dim L$

b) $\dim L - \dim \ker \varphi \leq \dim \varphi(L) \leq \dim L$

c) $\dim Z \leq \dim \varphi^{-1} Z \leq \dim Z + \dim \ker \varphi$

**Bài 1.7** Cho các đồng cấu của các $\mathbb{K}$-không gian vector hữu hạn chiều $\varphi : V \longrightarrow W, \psi : W \longrightarrow Z$. Chứng minh rằng:

a) $\dim \ker(\psi.\varphi) = \dim \ker \varphi + \dim(\operatorname{Im} \varphi \cap \ker \psi)$

b) $\dim \ker(\psi.\varphi) \leq \dim \ker \varphi + \dim \ker \psi$

c) $\operatorname{rank}(\psi.\varphi) = \operatorname{rank} \varphi - \dim(\ker \psi \cap \operatorname{Im} \varphi)$

d) $\operatorname{rank}(\psi.\varphi) \geq \operatorname{rank} \varphi + \operatorname{rank} \psi - \dim W$

**Bài 1.8** Giả sử $P, Q, R$ là các ma trận vuông cấp $n$. Chứng minh rằng:

$\operatorname{rank}(PQ) + \operatorname{rank}(QR) \leq \operatorname{rank} Q + \operatorname{rank}(PQR)$.

**Bài 1.9** Cho $V$ và $W$ là các không gian vector hữu hạn chiều. $T : V \longrightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính, $X$ là không gian vector con của không gian vector $W$ Chứng minh: $\dim(T^{-1}X) \geq \dim V - \dim W + \dim X$. Hơn nữa nếu $T$ toàn ánh thì ta có đẳng thức.

**Bài 1.10** Cho $A$ và $B$ là các ma trận vuông cấp $n$. Chứng minh rằng không gian nghiệm của hai phương trình $AX = 0$ và $BX = 0$ bằng nhau khi và chỉ khi tồn tại ma trận $C$ khả nghịch sao cho $A = CB$.

**Bài 1.11** Cho $A$ là ma trận vuông phức cấp $n$ sao cho tr$A^k = 0$ với $k = 1, \ldots, n$. Chứng minh rằng $A$ là ma trận luỹ linh.

**Hint** Giả sử $A$ có dạng chéo hoá Jordan với các khối Jordan tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ phân biệt. Khi đó $A^k$ là ma trận có các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng $\lambda_i^k$. Từ giả thuyết $tr(A^k) = 0, 1 \leq k \leq m$ ta có hệ phương trình:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k = 0, \forall k = 1, ..., n.$$

Từ hệ này ta suy ra $\lambda_i = 0, 1 \leq i \leq m$. Vậy $A$ sẽ là ma trận luỹ linh.

**Bài 1.12** Cho $A$ là ma trận phức cấp $m$ sao cho dãy $(A^n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đến ma trận $B$. Chứng minh rằng $B$ đồng dạng với ma trận đường chéo mà các phần tử trên đường chéo chính bằng 0 hoặc 1.

Hint: Do $A^{2n} = A^n.A^n$ suy ra $B^2 = B$. Vậy ta có điều cần chứng minh.

**Bài 1.13** Cho $W$ là không gian vector $n$-chiều, $U$ và $V$ là các không gian con của $W$ sao cho $U \cap V = \{0\}$. Giả sử $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ và $v_1, v_2, \ldots, u_k \in V$ với $k > \dim U + \dim V$. Chứng minh rằng tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0.$$

Khẳng định trên còn đúng không nếu $k \leq \dim U + \dim V$.

**Hint** Chú ý rằng ta có đơn cấu $U \times V \longrightarrow W$ nên số chiều của $U \times V$ không quá $n$.

## 2. DẠNG CHÍNH TẮC

**Bài 2.1** Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng: mỗi ma trận $B$ sao cho $AB = BA$ có dạng:

$$B = aI + bA + cA^2,$$

với $a, b, c$ là các số thực nào đó.

**Bài 2.2** Cho $A$ là ma trận cấp $n$ có $n$ giá trị riêng phân biệt. Chứng minh rằng: mỗi ma trận $B$ giao hoán được với ma trận $A$ có dạng: $B = f(A)$, với $f$ là một đa thức hệ số thực, bậc không quá $n - 1$.

**Bài 2.3** Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hãy biểu thị $A^{-1}$ như là một đa thức của $A$ với hệ số thực.

**Bài 2.4** Với $x \in \mathbb{R}$, đặt

$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

a) Chứng minh rằng $\det A_x = (x-1)^3(x+3)$.
b) Chứng minh rằng nếu $x \neq 1, 3$, thì $A_x^{-1} = (x-1)^{-1}(x+3)^{-1}A_{-x-2}$.

**Bài 2.5** Tính $A^{10}$ với

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 2.6** Chứng minh hoặc đưa ra phản ví dụ: Với mọi ma trận vuông phức $A$ cấp 2, tồn tại ma trận vuông phức $B$ cấp 2 sao cho $A = B^2$.

**Bài 2.7** Cho

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Với số nguyên $n$ nào thì sẽ tồn tại ma trận vuông phức $X$ cấp 4 sao cho $X^n = A$.

**Bài 2.8** Khẳng định sau đúng hay không:

Tồn tại ma trận vuông thực $A$ cấp $n$ sao cho

$$A^2 + 2A + 5I = 0,$$

nếu và chỉ nếu $n$ là số chẵn.

**Bài 2.9** Phương trình nào có nghiệm là một ma trận vuông thực (không nhất thiết phải chỉ ra nghiệm):

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2X^5 + X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & & 0 \\ 5 & 1 & 9 & \\ 0 & 9 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$X^6 + 2X^4 + 10X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Bài 2.10** Cho $x$ là số thực dương. Hỏi có tồn tại hay không một ma trận vuông thực cấp 2 sao cho

$$A^{2004} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-x \end{pmatrix}.$$

## 3. VECTOR RIÊNG VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG

**Bài 3.1** Cho $M$ là ma trận vuông thực cấp 3, $M^3 = I$ và $M \neq I$.

a) Tìm các giá trị riêng của $M$.

b) Cho một ma trận có tính chất như thế.

**Bài 3.2** Cho $F$ là một trường, $n$ và $m$ là các số nguyên và $A$ là một ma trận vuông cấp $n$ với các phần tử trong $F$ sao cho $A^m = 0$. Chứng minh rằng: $A^n = 0$.

**Bài 3.3** Cho $V$ là không gian vector hữu hạn chiều trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, $M$ là một tự đồng cấu của $V$, $M(x) \neq x$, $\forall x \in V \setminus 0$. Giả sử $M^p = Id_V$, với $p$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng số chiều của $V$ chia hết cho $p-1$.

**Bài 3.4** Chứng minh rằng ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,00001 & 1 \\ 1,00001 & 1 & 1.00001 \\ 1 & 1,00001 & 1 \end{pmatrix}.$$

có một giá trị riêng dương và một giá trị riêng âm.

**Bài 3.5** Cho $a, b, c$ là các phần tử bất kì của trường $F$, hãy tính đa thức tối tiểu của ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

**Bài 3.6** Giả sử $A, B$ là các tự đồng cấu của không gian vector hữu hạn chiều $V$ trên trường $F$. Đúng hay sai các khẳng định sau:

a) Mỗi vector riêng của $AB$ là một vector riêng của $BA$.

b) Mỗi giá riêng của $AB$ là một giá riêng của $BA$.

**Bài 3.7** Cho

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

là một ma trận thực với $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng $A$ có một vector riêng

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2,$$

với $x, y > 0$.

**Bài 3.8** Cho $A$ là ma trận vuông phức cấp $n$ và $P(t)$ là một đa thức bậc $m$. Chứng minh rằng nếu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận $A$ thì:

1) $|P(A)| = P(\lambda_1).P(\lambda_2)\ldots P(\lambda_n)$.

2) $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$ là các giá trị riêng của $P(A)$.

**Bài 3.9** Cho $A$ và $B$ là các ma trận đối xứng thực thoả mãn $AB = BA$. Chứng minh rằng $A$ và $B$ có chung1 vector riêng trong $\mathbb{R}^n$.

**Bài 3.10** Gọi $S$ là tập không rỗng gồm các ma trận phức cấp $n$ giao hoán được với nhau từng đôi một. Chứng minh rằng các phần tử của $S$ có chung một vector riêng

**Bài 3.11** Gọi $A$ và $B$ là các ma trận phức cấp $n$ sao cho $AB = BA^2$. Giả sử rằng $A$ không có các giá trị riêng có môđun bằng 1, chứng minh rằng $A$ và $B$ có chung một vectơ riêng.

**Bài 3.12** Cho $\varphi$ là tự đồng cấu tuyến tính chéo hoá được của $\mathbb{R}^n$. Chứng minh rằng không gian con $W$ của $\mathbb{R}^n$ là bất biến đối với $\varphi$ khi và chỉ khi trong $W$ chọn được một cơ sở gồm các vector riêng của $\varphi$.

**Bài 3.13** Cho $A$ và $B$ là hai ma trận chéo hoá được và giao hoán được với nhau. Chứng minh rằng tồn tại một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm toàn các vector riêng của $A$ và $B$.

**Bài 3.14** Cho $A$ là ma trận phức cấp $n$ và đa thức tối tiểu có bậc $k$.

1) Chứng minh rằng nếu $\lambda$ không là giá trị riêng của $A$ thì tồn tại một đa thức $p_\lambda$ bậc $k-1$ sao cho $p_\lambda(A) = (A-\lambda E)^{-1}$.

2) Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ là các số phức phân biệt và không là giá trị riêng của $A$. Chứng minh rằng: tồn tại các số phức $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{k} c_k (A - \lambda_k E)^{-1} = E.$$

**Hint** Xét đẳng thức $p_\lambda(A)(A-\lambda E) = p(A) - p(\lambda)E = p(\lambda)E$ suy ra được đa thức $p_\lambda$. Với mỗi $\lambda_i$ tồn tại các $p_{\lambda_i}$ tương ứng. Xét hệ pt theo các ẩn $c_i$ ta thu được hệ Cramer do đó tồn tại các $c_i$ cần tìm.

## 4. HẠNG VÀ ĐỊNH THỨC

**Bài 4.1** Cho $A$ là ma trận vuông thực cấp $n$ và $A^t$ là ma trận chuyển vị của nó. Chứng minh rằng $A^tA$ và $A$ cùng hạng.

**Bài 4.2** Giả sử $P$ và $Q$ là các ma trận vuông cấp $n$ thỏa mãn các điều kiện sau: $P^2 = P, Q^2 = Q$ và $I - (P+Q)$ khả nghịch. Chứng minh rằng $P$ và $Q$ có hạng bằng nhau.

**Bài 4.3** Cho

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Giả sử $b_i \neq 0$, với mọi $i$. Chứng minh rằng:

a) $\operatorname{rank} T \geq n-1$,

b) $T$ có $n$ giá trị riêng phân biệt.

**Bài 4.4** Cho $(a_{ij})$ là ma trận vuông cấp $n$ với các $a_{ij}$ là các số nguyên.

a) Chứng minh rằng nếu số nguyên $k$ là một giá trị riêng của $A$ thì định thức của $A$ chia hết cho $k$.

b) Giả sử $m$ là một số nguyên và mỗi dòng của $A$ có tổng bằng $m$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = m, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Chứng minh rằng định thức của $A$ chia hết cho $m$.

**Bài 4.5** Cho định thức Vandermonde (phức)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix},$$

với $a_i$ là các số phức.

a) Chứng minh rằng $A$ khả nghịch khi và chỉ khi các $a_i$ đôi một khác nhau.

b) Nếu các $a_i$ đôi một khác nhau và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số phức tùy ý. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất đa thức $f$ bậc $n$ với hệ số phức sao cho $f(a_i) = b_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

**Bài 4.6** Cho ví dụ một hàm liên tục $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ với tính chất là $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ lập thành một cơ sở của $\mathbb{R}^3$, trong đó $v_1, v_2, v_3$ là các số thực phân biệt.

**Bài 4.7** Cho $f_1, f_2, \ldots, f_n$ là các hàm nhận các giá trị thực liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi

$$\det\left(\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx\right) = 0.$$

**Bài 4.8** Ký hiệu $M_{2\times 2}$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 2. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Xét phép biến đổi tuyến tính $L : M_{2\times 2} \longrightarrow M_{2\times 2}$ xác định bởi $L(X) = AXB$. Hãy tính vết và định thức của $L$.

**Bài 4.9** Ký hiệu $M_{3\times 3}$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 3. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Xét phép biến đổi tuyến tính $L : M_{3\times 3} \longrightarrow M_{3\times 3}$ xác định bởi $L(X) = \dfrac{1}{2}(AX + XA)$. Hãy tính định thức của $L$.

**Bài 4.10** Ký hiệu $M_{3\times 3}$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 3. Giả sử $A \in M_{3\times 3}, \det A = 32$ và đa thức tối tiểu của $A$ là $(\lambda - 4)(\lambda - 2)$. Xét ánh xạ tuyến tính: $L_A : M_{3\times 3} \longrightarrow M_{3\times 3}$ xác đinh bởi $L_A(X) = AX$. Hãy tính vết của $L_A$.

**Bài 4.11** Ký hiệu $M_{7\times 7}$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 7. Giả sử $A \in M_{7\times 7}$ là một ma trận chéo với đường chéo chính gồm 4 hạng tử +1 và 3 hạng tử -1. Xét ánh xạ tuyến tính $L_A : M_{7\times 7} \longrightarrow M_{7\times 7}$ xác định bởi $L_A(X) = AX - XA$. Hãy tính $\dim L_A$.

**Bài 4.12** Cho $F$ là một trường, $n$ và $m$ là hai số nguyên, $M_{m\times n}$ là không gian các ma trận cấp $m \times n$ trên trường $F$. Giả sử $A$ và $B$ là hai ma trận cố định của $M_{m\times n}$. Xét ánh xạ tuyến tính $L : M_{m\times n} \longrightarrow M_{m\times n}$ xác định bởi $L(X) = AXB$. Chứng minh rằng nếu $m \neq n$ thì $L$ suy biến.

**Bài 4.13** Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ là các ma trận cấp $n$. Chứng minh rằng tìm được $n + 1$ số $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ không đồng thời bằng 0 sao cho ma trận $x_1A_1 + x_2A_2 \cdots + x_{n+1}A_{n+1}$ suy biến.

**Bài 4.14** Giả sử $A$ là ma trận cấp $n$ hạng $r$. Tìm số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $AX = 0$ với $X$ là ma trận cấp $n$.

**Bài 4.15** Cho $A$ là ma trận vuông cấp $n$. Chứng minh rằng nếu $A^2 = E$ thì tổng hạng của các ma trận $A - E$ và $A + E$ bằng $n$ ($E$ là ma trận đơn vị).

**Bài 4.16** Cho $A$ là ma trận vuông thực cấp $n$. Chứng minh rằng: $\det(A^2 + E) \geq 0$. Khi nào thì đẳng thức xảy ra.

**Bài 4.17** Cho tam thức bậc hai $p(x) = x^2 + ax + b$ thoả mãn $p(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $A$ là một ma trận vuông thực cấp $n$. Chứng minh rằng: $\det p(A) \geq 0$.

**Bài 4.18** Cho $f(x)$ là đa thức hệ số thực có bậc dương, hệ số dẫn đầu bằng 1 và $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, $A$ là một ma trận vuông thực cấp $n$. Chứng minh rằng $\det f(A) \geq 0$.

**Bài 4.19** Cho $A$ là ma trận vuông cấp $n$. Chứng minh rằng: $\det(AA^t + E) > 0$, trong đó $A^t$ là ma trận chuyển vị của ma trận $A$ và $E$ là ma trận đơn vị cùng cấp với $A$.

**Bài 4.20** Cho $A$ và $B$ là các ma trận thực cấp $n$. Chứng minh rằng: $\det(AA^t + BB^t) \geq 0$.

**Các đề thi Olympic**

ĐỀ OLYMPIC ĐỀ NGHỊ 2003

**Bài 1:** Cho

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng mỗi giá trị riêng của $A$ là một số thực dương.

**Bài 2:** Cho $A$ là ma trận vuông thực cấp n và $A^t$ là ma trận chuyển vị của nó. Chứng minh $A^tA$ và $A$ cùng hạng.

**Đề thi chọn đội tuyển Olympic của Trường năm 2003**

**Đề số 1:**

**Bài 1:** Định thức của một ma trận vuông thay đổi như thế nào khi thay mỗi phần tử bằng phần tử đối xứng với nó qua đường chéo thứ hai.

**Bài 2:** Giả sử $x_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Hãy tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

**Bài 3:** Xác định các số nguyên dương $m, n, p$ sao cho đa thức $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ chia hết cho đa thức $x^2 - x + 1$.

**Bài 4:** Cho

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Hãy tính $A^{100}$ và $A^{-7}$.

**Bài 5:** Cho A là ma trận vuông cấp 2. Chứng minh rằng $A^k = 0$ khi và chỉ khi $A^2 = 0$.

**Bài 6:** Ký hiệu $M_{3\times3}$ làkhông gian các ma trận vuông thực cấp 3. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Xét phép biến đổi tuyến tính $L : M_{3\times3} \longrightarrow M_{3\times3}$ xác định bởi $L(X) = \frac{1}{2}(AX - XA)$. Hãy tính định thức của L.

**Đề số 2:**

**Bài 1:** Tính định thức cấp $n$ mà phần tử ở dòng $i$ cột $j$ là $|i - j|$.

**Bài 2:** Giả sử $P$ và $Q$ là các ma trận vuông cấp n thoả mãn các điều kiện sau: $P^2 = P; Q^2 = Q$ và $I - (P + Q)$ khả nghịch. Chứng minh rằng $P$ và $Q$ có hạng bằng nhau.

**Bài 3:** Ký hiệu $M_{3\times3}$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 3. Giả sử $A \in M_{3\times3}$, $\det A = 32$ và đa thức tối tiểu của $A$ là $(\lambda - 4)(\lambda - 2)$. Xét ánh xạ tuyến tính $L_A : M_{3\times3} \longrightarrow M_{3\times3}$ xác định bởi $L_A(X) = AX$. Hãy tính vết của ma trận $A$.

**Bài 4:** Ký hiệu $M_{2\times2}$ là không gian các ma trận vuông thực cấp 2. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Xét phép biến đổi tuyến tính $L : M_{2\times2} \longrightarrow M_{2\times2}$ xác định bởi $L(X) = AXB$. Hãy tính vết và định thức của L.

**Bài 5:** Cho $m_1, m_2, \dots, m_r$ là những số nguyên từng đôi một phân biệt, $r \geq 2$. Chứng minh rằng đa thức

$$f(x) = (x - m_1)(x - m_2)\dots(x - m_r) - 1$$

không có nghiệm nguyên.

**Bài 6:** Chứng minh rằng với mọi ma trận $A$ cấp $m \times n$ ta luôn luôn có bất đẳng thức sau:

$$|A^t A| \leq \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2.$$

## BÀI TẬP ĐẠI SỐ ĐẠI CƯƠNG

**Bài 1** Cho $R$ là một vành có đơn vị 1. Giả sử rằng $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các Ideal trái của $R$ sao cho $R = A_1 \bigoplus A_2 \bigoplus \cdots \bigoplus A_n$ (xem như một nhóm cộng).

Chứng minh rằng tồn tại các phần tử $u_i \in A_i$ sao cho với mọi $a_i \in A_i,\ a_i u_i \in A_i$ và $a_i u_j = 0$ nếu $i \neq j$.

**Bài 2** Chứng tỏ rằng nhóm $G$ đẳng cấu với nhóm con (nhóm cộng) các số hữu tỉ nếu và chỉ nếu $G$ đếm được và mọi tập con hữu hạn của $G$ đều chứa trong một nhóm con xyclic vô hạn của $G$.

Lời giải

## 1. KHÔNG GIAN VECTOR

**Bài 1.1** Xét ánh xạ tuyến tính:

$$T : M_{n\times n} \longrightarrow M_{n\times n}$$
$$B \mapsto AB - BA.$$

Khi đó $S = \ker T$ là không gian vector con của không gian các ma trận $M_{n\times n}$. Để ý rằng, nếu $C$ là ma trận khả nghịch thì

$$AB = BA$$

khi và chỉ khi $C^{-1}ACC^{-1}BC = C^{-1}BCC^{-1}AC$. Nếu $D_1, \dots, D_n$ là các ma trận độc lập tuyến tính thì $C^{-1}D_1C, \dots, C^{-1}D_nC$ cũng độc lập tuyến tính. Do đó để đơn giản ta giả sử $A$ có dạng Jordan, với khối Jordan thứ $i$ cấp $k$ là:

$$A_i = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a & 1 \\ 0 & & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Khi đó $A_i$ giao hoán với

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b_1 & b_2 \\ 0 & & 0 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Do đó $A$ giao hoán với

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix}.$$

Vì trong $B$ có $n$ biến nên $\dim C(A) \geq n$.
**Bài 1.2** Ta cần chỉ ra $S$ có $n^2 - 1$ vector độc lập tuyến tính. Đó là các ma trận: $M_{ij} = M_{ik}M_{kj} - M_{kj}M_{ik}$ $i \neq j$ (có $n^2 - n$ phần tử)

$M_{11} - M_{jj} = M_{ij}M_{j1} - M_{j1}M_{ij}$ $j \neq 1$ (có $n - 1$ phần tử), trong đó ma trận $M_{ij}$ là ma trận có phần tử 1 ở vị trí $ij$, các vị trí khác đều bằng 0. Do đó $\dim S \geq n^2 - 1$, mặt khác $S \neq M_{n\times n}$ nên $\dim S < n^2$. Suy ra: $\dim S = n^2 - 1$.

**Bài 1.3** Lấy $f, g \in S$ và $r, s \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có: $\forall v \in A, (rf + sg)(v) = f(rv) + g(sv) \in A$ vì $f, g$ bất biến đối với $A$. Tương tự ta cũng có $(rf + sg)(v) \in B$. Vậy $rf + sg \in S$, hay $S$ là không gian vector con của không gian vector các tự đồng cấu của $V$. Để tính số chiều của $S$ ta chỉ cần tính số chiều của không gian các ma trận bất biến với $A$ và $B$. Gọi $A_1, B_1$ là không gian vector con của $V$ sao cho $A = A \cap B \bigoplus A_1, B = A \cap B \bigoplus B_1$. Khi đó $\dim(A \cap B) = r = a + b - n, \dim A_1 = a - r, \dim B_1 = b - r$. Lấy $\{u_1, ..., u_{a-r}\}$ là cở sở của $A_1$, $\{v_1, ..., v_r\}$ là cở sở của $A \cap B$, $\{w_1, ..., w_{b-r}\}$ là cở sở của $B_1$, Mỗi tự đồng cấu bất biến đối với $A, B$ thì phải bất biến đối với $A \cap B$. Do đó $f(u_i)$ được biểu thị tuyến tính qua $\{u_1, ..., u_{a-r}, v_1, ..., v_r\}$, $f(v_i)$ chỉ có thể biểu diễn tuyến tính qua $\{v_1, ..., v_r\}$, $f(w_i)$ được biểu diễn tuyến tính qua $\{v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_{b-r}\}$. Suy ra ma trận của $f$ có dạng:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} a-r & r & b-r \end{array} \\ \begin{array}{r} a-r \\ r \\ b-r \end{array} & \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ M_2 & M_3 & M_4 \\ 0 & 0 & M_5 \end{pmatrix} \end{array}$$

trong đó số phần tử khác 0 nhiều nhất là $(a-r)^2 + rn + (b-r)^2 = a^2 + b^2 + n^2 - (a+b)n$. Vậy $\dim S = a^2 + b^2 + n^2 - (a+b)n$.

**Bài 1.4** Giả sử rằng có:

$$a_0x + a_1Tx + \cdots + a_kT^kx + \cdots + a_{m-1}T^{m-1}x = 0.$$

Tác động $T^{m-1}$ vào hai vế ta có: $a_0T^{m-1}x = 0$, suy ra $a_0 = 0$. Bằng quy nạp ta có $a_k = 0, \forall k = 0, m-1$ suy ra điều phải chứng minh

**Bài 1.5** Gọi $P$ là ma trận chuyển từ $(a_i)$ sang $(b_i)$. Khi đó $I + 2P$ là ma trận chuyển từ $(a_i)$ sang $(a_i + 2b_i)$. Ta có $\lambda$ là giá trị riêng của $I + 2P$ khi và chỉ khi $\frac{1}{2}(\lambda - 1)$ là giá trị riêng của $P$. Do $(a_i)$ và $(b_i)$ là các cơ sở trực chuẩn nên $P$ là ma trận trực giao và các giá trị riêng của $P$ là $\mp 1$, suy ra các giá trị riêng của $I + 2P$ là $3, -1$. Do đó 0 không phải là giá trị riêng của $I + 2P$ nên $I + 2P$ khả nghịch và $(a_i + 2b_i)$ là cơ sở. Hơn nữa $\det P = (-1)^\alpha 1^\beta$ với $\alpha, \beta$ là bội của các giá trị riêng $1, -1$ của $P$. Do đó $\det(I + 2P) = (-1)^\alpha 3^\beta$. Vì $\det p > 0$

nên $\alpha$ là số chẵn. Vậy $\det(I+2P) > 0$, hay $(a_i)$ và $(a_i + 2b_i)$ cùng hướng với nhau.

**Bài 1.6** a) Xét ánh xạ tuyến tính hạn chế của $\varphi$ lên $L$ ta có:

$$\varphi|_L : L \longrightarrow \varphi L,$$

$\ker \varphi|_L = \ker \varphi \cap L$. Do đó: $\dim \varphi(L) + \dim(\ker \varphi \cap L) = \dim L$.

b) Suy ra từ a) với chú ý rằng $\dim(\ker \varphi \cap L) \leq \dim \ker \varphi$.

c) Đặt $L = \varphi^{-1}Z$ và chú ý rằng: $\varphi L \subset Z$. Từ câu b) ta có: $\dim \varphi^{-1}Z \leq \dim \varphi(\varphi^{-1}Z) + \dim \ker \varphi \leq \dim Z + \dim \ker \varphi$.

Mặt khác: $\ker \varphi \subset L$ nên từ a) ta có:

$$\dim \varphi(L) + \dim \ker \varphi = \dim L \ (1).$$

Ta cũng có: $\varphi(L) = Z \cap \varphi(V)$ nên

$$\begin{aligned}
\dim \varphi(L) &= \dim(Z \cap \varphi(V)) \\
&= \dim Z + \dim \varphi(V) - \dim(Z + \varphi(V)) \\
&\geq \dim Z + \dim \varphi(V) - \dim W \\
&= \dim Z - \dim \ker \varphi. \ (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

**Bài 1.7** a) Đặt $L = \operatorname{Im} \varphi$ và áp dụng bài tập 1.6.a ta có:

$$\dim \psi(L) + \dim(\ker \psi \cap L) = \dim L$$

hay

$$\dim \operatorname{Im}(\psi.\varphi) + \dim(\ker \varphi \cap L) = \dim V - \dim \ker \varphi$$

$$\dim \ker \varphi + \dim(\ker \varphi \cap L) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\psi.\varphi) = \dim \ker(\psi.\varphi.$$

b) Suy ra từ câu a) với chú ý rằng: $\ker \varphi L \subset \ker \varphi$

c) Suy ra từ lập luận ở chứng minh của câu a).

d) Suy ra từ câu c) với chú ý rằng: $\ker \psi \cap \operatorname{Im} \varphi \subset \ker \psi$.

**Bài 1.8** Sử dụng bài tập 1.7 câu c) ta có:

$$\operatorname{rank}(PQR) = \operatorname{rank}(PQ) - \dim(\ker(PQ) \cap \operatorname{Im} R)$$

$$\operatorname{rank}(QR) = \operatorname{rank} Q - \dim(\ker Q \cap \operatorname{Im} R)$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(PQ) + \operatorname{rank}(QR) &= \operatorname{rank}(PQR) + \operatorname{rank} Q + \dim(\ker Q \cap \operatorname{Im} R) \\
&\quad - \dim(\ker(PQ) \cap \operatorname{Im} R) \\
&\leq \operatorname{rank}(PQR) + \operatorname{rank} Q
\end{aligned}$$

**Bài 1.9** Xét ánh xạ tuyến tính: $F : V/_{T^{-1}X} \longrightarrow W/_X$ được cho bởi: $F(\overline{x}) = \overline{T(x)}$. Khi đó $F$ là đơn ánh. Thật vậy, nếu $F(\overline{y}) = 0$ thì $T(y) \in X$ do đó $y \in T^{-1}X$ hay $\overline{y} = \overline{0}$. Từ đó suy ra:

$$\dim(V/_{T^{-1}X}) \leq \dim(W/_X)$$

hay

$$\dim V - \dim T^{-1}X \leq \dim W - \dim X.$$

Vậy

$$\dim T^{-1}X \geq \dim V - \dim W + \dim X.$$

2. Dạng chính tắc

**Bài 2.2** Do $A$ có $n$ giá trị riêng phân biệt nên $A$ chéo hóa được, tức là tồn tại ma trận $C$ khả nghịch sao cho $C^{-1}AC = P$ là ma trận chéo. Khi đó, ma trận $B$ giao hoán được với $A$ khi và chỉ khi ma trận $Q = C^{-1}BC$ giao hoán được với $P$. Giả sử:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

trong đó $\lambda_i$ là các giá trị thực khác nhau từng đôi một. Bằng cách thử trực tiếp ta có: $Q$ giao hoán được với $P$ khi và chỉ khi $Q$ có dạng:

$$Q = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

trong đó $\mu_i$ là các giá trị thực nào đó. Bây giờ ta cần tìm các số thực $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ sao cho

$$Q = \alpha_0 I + \alpha_1 P + \cdots + \alpha_{n-1} P^{n-1}$$

Điều này thực hiện được nhờ việc giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_1^{n-1} x_{n-1} = \mu_1 \\ x_0 + \lambda_2 x_1 + \cdots + \lambda_2^{n-1} x_{n-1} = \mu_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_0 + \lambda_n x_1 + \cdots + \lambda_n^{n-1} x_{n-1} = \mu_n \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra:

$$B = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

(Đpcm).

**Bài 2.3** Ta có đa thức đặc trưng của $A$ là:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 3$$

. Do đó: $A^2 - 3I = 0$ hay $A^2 = 3I$, suy ra $A$ khả nghịch và $A^{-1} = \frac{1}{3}A$.

**Bài 2.4** a) Tính toán trực tiếp ta có $\det A_x = (x-1)^3(x+3)$.

b) Nếu $x \neq 1, 3$ thì $A_x$ khả nghịch và đa thức đặc trưng của $A_x$ là:

$$\chi(t) = (x - t - 1)^3(x - t + 3).$$

Suy ra đa thức tối tiểu của $A_x$ là: $m(t) = (x-t-1)(x-t+3)$, do đó: $((x-1)I - A_x)((x+3)I - A_x) = 0$, khai triển ta có được: $(x-1)(x+3)I - 2(x-1)A_x + A_x^2 = 0$. Nhân hai vế với $A_x^{-1}$ và biến đổi ta có

$$A_x^{-1} = -(x-1)-1(x+3)^{-1}A_{-x-2}.$$

**Bài 2.6** (Giải vắn tắt) Chọn $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ thì sẽ không có một ma trận vuông phức B cấp 2 nào mà $A = B^2$.

**Bài 2.8** Khẳng định đúng.

Giả sử $A$ tồn tại, suy ra $A$ có đa thức tối tiểu chia hết $t^2 + 2t + 5$ là đa thức bất khả qui trên $\mathbb{R}$ Vậy $m_A(t) = t^2 + 2t + 5$. Vì đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu có cùng nhân tử bất khả qui nên

$$\chi_A(t) = m_A(t)^k$$

suy ra $n = \deg \chi_A(t)$ phải là số chẵn.

Ngược lại, n chẵn, ta thấy $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ là một nghiệm của phương trình $t^2 + 2t + 5 = 0$. Do đó ma trận khối gồm $\frac{n}{2}$ khối $A_0$ trên đường chéo chính là ma trận thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

**Bài 3.1**

a) Do $M$ là nghiệm của đa thức $x^3 - 1$ nên đa thức tối tiểu của $M$ phải là ước của $x^3 - 1$. Mặt khác, $M$ có ít nhất một giá trị riêng thực, nên đa thức tối tiểu có nhân tử (x-1). Vì $M \neq I$ nên đa thức tối tiểu của $M$ không thể là $x - 1$. Do đó đa thức tối tiểu của $M$ là $m(x) = x^3 - 1$. Vậy $M$ có 1 giá trị riêng 1

b) Một ma trận có tính chất như vậy là:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Bài 3.2** Do $A^n = 0$ nên đa thức tối tiểu $p(x)$ của $A$ phải là ước của $x^m$. Suy ra $p(x) = x^k$, với $k \leq n$. Vậy $A^n = 0$.

**Bài 3.3** Do $M^p = I$ nên đa thức tối tiểu $p(x)$ của $M$ phải là ước của

$$x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + \ldots + 1)$$

Do $M(x) \neq x$ với mọi $x \neq 0$ nên 1 không là giá trị riêng, suy ra $p(x)$ là ước của $(x^{p-1} + \ldots + 1)$. Nhưng $(x^{p-1} + \ldots + 1)$ là đa thức khả qui trên trường $\mathbb{Q}$ nên $p(x) = (x^{p-1} + \ldots + 1)$.

Mặt khác, đa thức đặc trưng $\chi_M$ và đa thức tối tiểu có chung nhân tử bất khả qui. Do đó $\chi_M(x) = (p(x))^k,\ k \geq 1$. Vậy $\dim V = \operatorname{rank} M = \deg \chi_M = k(p-1)$. (Đpcm)

**Bài 3.5** Đa thức đặt trưng là

$$\chi(t) = t^3 - ct^2 - bt - a.$$

Ta sẽ chứng tỏ đây là đa thức tối tiểu. Thật vậy, chọn $x_0 = (1,0,0)$, khi đó $x_0, Ax_0 = (0,1,0), A^2x_0 = (0,0,1)$ là độc lập tuyến tính. Giả sử $A$ là nghiệm của một đa thức bậc 2, tức là $k_1A^2 + k_2A + k_3I = 0$, suy ra $k_1A^2x_0 + k_2Ax_0 + k_3x_0 = 0$ và ta có $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, điều này là vô lý. Vậy đa thức tối tiểu phải có bậc 3, hay $\chi(t) = t^3 - ct^2 - bt - a$.

**Bài 3.6** a) Sai, chẳn hạn $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right),\ B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Đúng. Giả sử $\lambda \neq 0$ là giá trị riêng ứng với vector riêng $x$ của $AB$. Khi đó $BA(Bx) = B(ABx) = \lambda Bx$ nên $\lambda$ sẽ là giá trị riêng của $BA$ (vì $B(x) \neq 0$). Nếu $\lambda = 0$ là một giá trị riêng của $AB$ thì $BA$ cũng suy biến, do đó $BA$ cũng có giá trị riêng là 0.

**Bài 3.7** Đa thức đặc trưng của $A$:

$$\chi_A(t) = t^2 - (a+d)t + ad - bc$$

có nghiệm

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}(a+d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2}(a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}).$$

Đặt $\lambda = \frac{1}{2}(a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc})$ và $v = (x, y)$ là vector riêng ứng với $x > 0$. Biểu diễn hạng tử đầu tiên của $Av$ ta được:

$$ax + by = \frac{1}{2}(a+d+\sqrt{\Delta})x$$
$$2by = (d-a+\sqrt{\Delta})x.$$

Do $b > 0$ và $d - a + \sqrt{\Delta} > 0$ nên $y > 0$. Đpcm

**Bài 3.8** 1) Gọi $\varphi(\lambda) = |A - \lambda E|$ là đa thức đặt trưng của ma trận $A$. Gọi $P(t)$ là đa thức bậc $m$ và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ là các nghiệm (thực hoặc phức kể cả bội) của $P(t)$. Ta có:

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)...(\lambda-\lambda_n)$$
$$P(t) = c(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)...(t-\alpha_m).$$

Do đó

$$P(A) = c(A-\alpha_1 E)(A-\alpha_2 E)...(A-\alpha_m E),$$
$$|P(A)| = c^n|A-\alpha_1 E|.|A-\alpha_2 E|...|A-\alpha_m E| = c^n\prod_{i=1}^{m}\varphi(\alpha_i).$$

Mặt khác:

$$\varphi(\alpha_i) = (-1)^n(\alpha_i-\lambda_1)(\alpha_i-\lambda_2)...(\alpha_i-\lambda_n) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j-\alpha_i)$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}|P(A)| =& c^n\prod_{i=1}^{m}\varphi(\alpha_i) = c^n\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j-\alpha_i)\\ =& \prod_{j=1}^{n}c\prod_{i=1}^{m}(\lambda_j-\alpha_i) = \prod_{j=1}^{n}P(\lambda_j).\end{aligned}$$

2) Đặt $p(t) = P(t) - \lambda$ và áp dụng kết quả trên ta có:

$$|p(A)| = p(\lambda_1).p(\lambda_2)...p(\lambda_n)$$

hay

$$|P(A)-\lambda E| = (-1)^n(\lambda-P(\lambda_1))(\lambda-P(\lambda_2))...(\lambda-P(\lambda_n)).$$

Vậy các giá trị riêng của $P(A)$ là $P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_n)$.

## 4. HẠNG VÀ ĐỊNH THỨC

**Bài 4.1** Trước hết ta chứng minh: $\dim(\ker A^tA) = \dim\ker A$. Rõ ràng: $\ker A \subset \ker A^tA$, ngược lại giả sử $v \in \ker A^tA$ thì $A^tAv = 0$, suy ra $\langle A^tAv, v\rangle = \langle Av, Av\rangle = 0$ hay $Av = 0$, tức là $v \in \ker A$. Do vậy $\dim(\ker A^tA) = \dim\ker A$, từ đó ta có $\operatorname{rank}(A^tA) = \operatorname{rank} A$.

**Bài 4.2** Ta có:

$$\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} P(I - P - Q) = \operatorname{rank} PQ$$

$$\operatorname{rank} Q = \operatorname{rank}(I - P - Q)Q = \operatorname{rank} PQ$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

**Bài 4.3** a) Ma trận con có được bằng cách bỏ dòng 1, cột n có hạng bằng $(n-1)$.

b) Giả sử $\lambda$ là giá trị riêng của $A$ tức là $\det(A - \lambda I) = 0$. Theo câu a) $\operatorname{rank}(A - \lambda I) = n - 1$ nên $\dim\ker(A - \lambda I) = 1$, suy ra không gian con riêng ứng với giá trị riêng $\lambda$ là một chiều. Do $A$ là ma trận đối xứng nên $A$ có đủ $n$ giá trị riêng kể cả bội. Vậy $A$ có $n$ giá trị riêng khác nhau.

**Bài 4.4** a) Ta có $\det(A - \lambda I) = (-1)^n\lambda^n + ... + c_i(-1)^i\lambda^i + ... + c_n$ trong đó $c_n = \det A$ ($a_{ij}$ nguyên nên $c_i$ nguyên). Nếu $k$ là giá trị riêng nên

$$(-1)^n k^n + ... + c_i(-1)^i k^i + ... + \det A = 0$$

suy ra $k$ là ước của $\det A$.

b) Lấy $x = (1, ..., 1)$ ta có $Ax = mx$ nên $m$ là giá trị riêng của $A$. Theo câu a) ta có $m$ là ước của $\det A$.

**Bài 4.5** a) Ta có: $\det A = \prod\limits_{i>j}(a_i - a_j)$, do đó $A$ khả nghịch khi và chỉ khi các $a_i$ khác nhau từng đôi một.

b) Giả sử $f = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ là một đa thức bậc $n$ hệ số phức sao cho $f(a_i) = b_i$, ta có hệ phương trình ẩn là $c_i,\ i- = 0, n$

$$\begin{cases} c_0 + c_1a_1 + \cdots + c_na_1^n = b_1 \\ c_0 + c_1a_2 + \cdots + c_na_2^n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ c_0 + c_1a_n + \cdots + c_na_n^n = b_n \end{cases}$$

hệ phương trình trên có định thức Crame khác 0 nên có nghiệm duy nhất. Vậy tồn tại duy nhất đa thức $f$ bậc $n$ với hệ số phức sao cho $f(a_i) = b_i$.

**Bài 4.6** Xét hàm $f(t) = (1, t, t^2)$ thì $f$ là hàm liên tục. Khi đó nếu $t_i,\ i = 1, 2, 3$ khác nhau từng đôi một thì

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_3 & t_1^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

**Bài 4.8** Xét các ánh xạ tuyến tính

$$L_A(X) = AX$$

$$L_B(X) = XB.$$

Ma trận của $L_A$ và $L_B$ lần lượt là:

$$M_A = \begin{pmatrix} =1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad M_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\det L = \det L_A . \det L_B = 2^6 . 5^2,\ Tr(L) = Tr(M_A . M_B) = 24$

**Bài 4.9** Lấy $X = (x_{ij})$, ta có:

$$L(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & \frac{3}{2}x_{12} & x_{13} \\ \frac{3}{2}x_{21} & 2x_{22} & \frac{3}{2}x_{23} \\ x_{31} & \frac{3}{2}x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Dễ thấy mỗi ma trận $M_{ij}$ đều là vector riêng của $L$. Suy ra $\det L = 2.(\dfrac{3}{2})^4 = \dfrac{81}{8}$.

**Bài 4.12** Trường hợp $m > n$. Ta viết $T = T_1 \circ T_2$, trong đó $T_2 : M_{n\times m} \longrightarrow M_{n\times n}$ được xác định bởi: $T_2(X) = XB$ và $T_1 : M_{n\times n} \longrightarrow M_{m\times n}$ được cho bởi: $T_1(Y) = AY$. Vì $\dim M_{n\times m} = nm > n^2 = \dim M_{n\times n}$ nên $T_2$ không đơn ánh, suy ra $T$ cũng không đơn ánh hay $T$ không khả nghịch.

Trường hợp $m < n$ xét tương tự.

**Bài 4.13** Gọi $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ là các vector có toạ độ là cột đầu tiên của các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ tương ứng. Khi đó $n+1$ vector này phụ thuộc tuyến tính. Do đó tồn tại $n+1$ số thực $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ không đồng thời bằng $0$ sao cho

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + v_{n+1} x_{n+1} = 0.$$

Lúc đó ma trận $x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{n+1}A_{n+1}$ có cột đầu tiên bằng $0$ nên ma trận $x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{n+1}A_{n+1}$ suy biến.

**Bài 4.14** Do $A$ là ma trận cấp $n$ có hạng $r$ nên tồn tại các ma trận khả nghịch $P, Q$ sao cho $A = PI_{n,r}Q$ với $I_{n,r}$ là ma trận có dạng:

$$I_{n,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(tức là ma trận có $r$ phần tử đầu tiên trên đường chéo chính bằng $1$ các phần tử còn lại bằng 0). Ta có nhận xét sau: $k$ ma trận $X_1, \ldots, X_k$ độc lập khi và chỉ khi các ma trận $QX_1, \ldots, QX_k$ độc lập tuyến tính (do $Q$ là ma trận khả nghịch). Phương trình $AX = 0$ tương đương với $I_{n,r}QX = 0$, nên từ nhận xét trên để tìm số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $AX = 0$ ta chỉ cần đi tìm số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $I_{n,r}Y = 0$. Ma trận $Y$ thoả phương trình $I_{n,r}Y = 0$ phải có dạng sau:

$$Y = \begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{array}{r} r \\ n-r \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & Y_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Suy ra số nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình $AX = 0$ là $n(n-r)$.

**Bài 4.15** Xem $A$ là tự đồng cấu tuyến tính của $\mathbb{R}^n$. Điều cần chứng minh $\operatorname{rank}(A-E)+\operatorname{rank}(A+E) = n$ tương đương với $\dim(\ker(A-E))+\dim(\ker(A+E)) = n$. Thật vậy, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$x = \frac{1}{2}(x + Ax) + \frac{1}{2}(x - Ax)$$

trong đó $\frac{1}{2}(x + Ax) \in \ker(A - E)$ và $\frac{1}{2}(x - Ax) \in \ker(A + E)$.

Mặt khác $\ker(A + E) \cap \ker(A - E) = \{0\}$ nên

$$\mathbb{R}^n = \ker(A + E) \bigoplus \ker(A - E),$$

suy ra $\dim(\ker(A - E)) + \dim(\ker(A + E)) = n$ (đpcm).

**Bài 4.16** Ta viết

$$A^2 + E = (A + iE)(A - iE) = (A + iE)\overline{(A + iE)}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \det(A^2 + E) &= \det(A + iE) \det(\overline{(A + iE)}) \\ &= \det(A + iE)\overline{\det(A + iE)} = |\det(A + iE)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy $\det(A^2+E) \geq 0$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đa thức đặc trưng của $A$ nhận $\pm i$ làm nghiệm.

**Bài 4.17** Từ giả thiết ta có $p(x)$ có hai nghiệm phức liên hợp $\lambda$ và $\overline{\lambda}$, do đó

$$p(x) = (x-\lambda)(x-\overline{\lambda}),$$

$$p(A) = (A-\lambda E)(A-\overline{\lambda}E) = (A-\lambda E)\overline{(A-\lambda E)}.$$

Suy ra

$$\det p(A) = |\det(A-\lambda E)|^2 \geq 0.$$

**Bài 4.18** Do $f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ và hệ số dẫn đầu bằng 1 nên $f(x)$ là tích của các tam thức bậc hai có dạng $x^2+ax+b$ không âm với mọi $x$. Theo bài 4.17 ta có đpcm.

**Bài 4.19** Ta có $(AA^t+E)$ là ma trận đối xứng nên nó là ma trận của một dạng toàn phương. Hơn nữa, dạng toàn phương này xác định dương. Thật vậy, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ ta có

$$\langle (AA^t+E)x, x\rangle = \langle AA^t x, x\rangle + \langle x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle + \langle x, x\rangle > 0.$$

Do đó các giá trị riêng của $A$ đều dương, vì vậy định thức của $A$ bằng tích các giá trị riêng của $A$ cũng dương.

**Bài 4.20** Giải tương tự như bài 4.19

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Bài 1** Cho $A$ là ma trận vuông cấp $n$, gọi $B$ và $C$ là các ma trận tạo bởi $k$ cột đầu và $n-k$ cột cuối tương ứng của ma trận $A$. MCR, $\det(A)^2 \leq \det(B^tB)\det(A^tA)$.

**Bài 4:** Cho $E$ là không gian vector hữu hạn chiều và $A \in Aut(E)$. Chứng tỏ các điều kiện sau là tương đương:

(i) $A = I + N$, trong đó $N$ là tự đồng cấu luỹ linh.

(ii) Tồn tại một cơ sở của $E$ sao cho ma trận của tự đồng cấu $A$ đối với cơ sở đó có mọi phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1 còn mọi phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0.

(iii) Tất cả các nghiệm của đa thức đặc trưng của tự đồng cấu $A$ (trong trường đóng đại số) đều bằng 1.

**Bài 6:** Cho $E$ là không gian vector hữu hạn chiều trên trường phức. $A \in Aut(E)$. Chứng tỏ rằng tự đồng cấu $A$ có thể phân tích dưới dạng tổng:

$$A = S + N,$$

trong đó $S$ chéo hoá được, $N$ luỹ linh và $SN = NS$. Chứng tỏ rằng $S$ và $N$ có thể biểu diễn dưới dạng các đa thức theo $A$.

Hướng dẫn: Giả sử $P_A(t) = \prod_{i=1}^{s}(t - t_i)^{m_i}$, $E_i$ là hạt nhân của $(A - t_i I)^{m_i}$. Thế thì $E$ là tổng trực tiếp của các $E_i$. Xác định $S$ trên $E$ sao cho $Sv = \sum t_i v_i$, đặt $N = A - S$. Xét đa thức $g(t) = \sum t_i g_i(t)$, trong đó $g_i(t)$ được chọn sao cho thành phần của $Av$ trong $E_i$ bằng $g_i(t)v_i$. Khi đó $S = g(A)$.

**Bài 7** Cho $A, B$ là các ma trận vuông cấp n, thoả mãn điều kiện: $AB = BA = 0$ và $\operatorname{Im} A \cap \ker A = \{0\}, \operatorname{Im} B \cap \ker B = \{0\}$. Chứng minh rằng: $\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

**Hướng dẫn** Ta có $\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. Giả sử $e_1, e_2, \ldots, e_k$ và $u_1, u_2, \ldots, u_s$ là các cơ sở của $\operatorname{Im}(A)$ và $\operatorname{Im}(B)$ tương ứng. Ta chứng minh hệ vector $e_1, e_2, \ldots, e_k, u_1, u_2, \ldots, u_s$ độc lập tuyến tính trong $\operatorname{Im}(A+B)$. Thật vậy, giả sử $\sum \lambda_i e_i + \sum \mu_j u_j = 0$, ta suy ra $\sum \lambda_i A e_i + \sum \mu_j A u_j = 0$. Từ giảt thuyết $AB = 0$ ta có $\operatorname{Im}(B) \subset \ker(A)$, do đó ta suy ra $\sum \lambda_i A e_i = 0$, hay $A(\sum \lambda_i e_i) = 0$. Từ đó ta có $\sum \lambda_i e_i = 0$. Vậy $\lambda_i = 0$. Tương tự ta cũng có $\mu_j = 0$. Tóm lại ta có hệ vector $e_1, e_2, \ldots, e_k, u_1, u_2, \ldots, u_s$ là cơ sở của $\operatorname{Im}(A + B)$.

Vậy $\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

**Bài 8:** Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các ma trận vuông đối xứng cấp n thoả mãn điều kiện $A_i A_j = 0, \forall i \neq j$. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{rank}(A_1) + \operatorname{rank}(A_2) + \cdots + \operatorname{rank}(A_m) \leq n.$$

**Bài 9** Cho $f, g$ là các tự đồng cấu tuyến tính của không gian vector $V$ n-chiều thoả mãn điều kiện $f \circ g = g \circ f$, $f$ luỹ linh và $\operatorname{rank}(f \circ g) = \operatorname{rank}(f)$. Chứng minh các khẳng định sau:

a) $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(g \circ f) = \{0\}$,
b) $\operatorname{Im}(f) \cap \ker(g^2 \circ f) = \{0\}$,
c) Từ đó suy ra $f = 0$.

**Bài 9** Cho $f$ là một đẳng cấu tuyến tính của không gian vector $V$ n-chiều. Giả sử $V = L \bigoplus N$, $\dim(N) = m, 0 < m < n$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $k, (k \leq n^{2m})$ sao cho $V = f^k(L) \bigoplus N$.

**Bài 10** Cho $\varphi$ là một tự đồng cấu tuyến tính của không gian vector hữu hạn chiều $V$.

a) Giả sử đa thức tối tiểu của $\varphi$ có phân tích $p(t) = h(t)g(t)$, trong đó $h, g$ là các đa thức nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng: $V = L_1 \bigoplus L_2$, với $L_1 = \ker(h(\varphi)), L_2 = \ker(g(\varphi))$.

b) Giả sử đa thức tối tiểu của $\varphi$ có phân tích $p(t) = h_1(t) \dots h_k(t)$, trong đó $h_i(t), 1 \leq i \leq k$ là các đa thức đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} L_i,$$

với $L_i = \ker(h_i(\varphi)), 1 \leq i \leq k$.

**Hướng dẫn** a) Do $h(t)$ và $g(t)$ là hai đa thức nguyên tố cùng nhau nên tồn tại các đa thức $u(t)$ và $v(t)$ sao cho $1 = h(t)u(t) + g(t)v(t)$. Khi đó mỗi vector $x$ đều có phân tích duy nhất thành $x = h(\varphi)u(\varphi)(x) + g(\varphi)v(\varphi)(x)$ trong đó $h(\varphi)u(\varphi)(x) \in L_2$ và $g(\varphi)v(\varphi)(x) \in L_1$.

**Bài 11** Chứng minh rằng nếu $\varphi$ và $\psi$ là các phép biến đổi đối xứng, trong đó $\varphi$ xác định dương, thì các giá trị riêng của $\varphi\psi$ đều thực và chéo hoá được.

**Hint** Do $\varphi$ xác định dương nên tồn tại phép biến đổi toạ độ cùng đưa $\varphi$ và $\psi$ về dạng chéo. Từ đó ta có kết luận.

**Bài 12 (Problem in net)**

I have the following PROBLEM IN LINEAR ALGEBRA, I do not know the answer. Assume that d and n are natural numbers and define $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ by

$$f(x) = (\prod_{l=1}^{d} \cos^2(x^l)) - 1/n,$$

where $x = (x^1, ..., x^d)$. Hence $x^l$ is the $l$th component of the vector $x$. Prove or disprove the following CONJECTURE: For any given $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$ the $(n, n)$-matrix $A$ given by

$$a_{ij} = f(x_i - x_j)$$

is positive semidefinite, i.e., the eigenvalues are nonnegative. (Comment: I know that this is true for $n \geq 2^d$. So the interesting case would be $n < 2^d$.)

**Bài 13** Cho $A, B$ là hai ma trận có tính chất $A^2 = A, B^2 = B$. Chứng minh rằng $A$ đồng dạng với $B$ khi và chỉ khi $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

**Bài 14** Cho $A$ và $B$ là hai ma trận thực cấp $n$ thoả mãn điều kiện tồn tại ma trận phức $V$ sao cho $A = VBV^{-1}$. Chứng minh rằng tồn tại một ma trận thực $U$ sao cho $A = UBU^{-1}$.

**Bài 15** Cho $A$ là ma trận vuông cấp $n$ thoả mãn điều kiện $A^2 = A$. Hãy tính đa thức đặc trưng của $A$.

**Bài 16** Cho $A, B$ là 2 ma trận vuông thực cấp $n$, giả sử $\det(A+B)$ và $\det(A-B)$ khác không. Chứng minh rằng ma trận

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

khả nghịch.

**Bài 17** Cho $A$ là ma trận thực cấp $n \times m$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận thực $B$ cấp $n$ sao cho $AA^t = B^{2004}$

**Bài 18** Cho phương trình $AX = B$, trong đó $A$ là hai ma trận cho trước cấp $n$, $X$ là ẩn ($X$ là ma trận cấp $n$). Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B)$, trong đó $(A|B)$ là ma trận cấp $n \times 2n$ có được bằng cách ghép ma trận $B$ vào bên phải ma trận $A$.

**Bài 19** Cho $A$ là ma trận cấp $n$ thoả $A^2 = A$. Chứng minh rằng phương trình $AX - XA = 0$ có nghiệm, cần và đủ là: tồn tại ma trận $X_0$ sao cho $X = AX_0 + X_0A - X_0$.

**Bài 20** Cho $f$ là đa thức hệ số thực có bậc $n > 0$ và $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ là các đa thức hệ số thực và có bậc dương. CMR, tồn tại các số thực $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ không đồng thời bằng không sao cho đa thức $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(p_i(x))^i$ chia hết cho $f$.

**Bài 21** Cho $A$ và $B$ là hai ma trận luỹ linh, $AB = BA$. CMR
a) $I - A$ khả nghịch và $A + B$ là ma trận luỹ linh.
b) $\det(I + A) = 1$.
c) $I + A + B$ khả nghịch.

**Bài 22** Cho $N$ là ma trận (phức) luỹ linh và $r$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại ma trận phức $A$ sao cho $A^r = I + N$.

**Bài 23** Cho $A, B, C, D$ là các ma trận cấp $n$, $AC = CA$. Đặt $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Chứng minh rằng $\det(M) = \det(AD - BC)$.

**Hint** Giả sử $A$ khả nghịch, ta phân tích: $M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, với $Y = D - CA^{-1}B$. Nếu $A$ tuỳ ý thì thay $A$ bởi $A - \lambda I$ và áp dụng lập luận trên.

**Bài 24** Cho không gian vector $E$ và $E = M \oplus N$, gọi $p$ là phép chiếu lên $M$ theo phương $N$. Cho $u$ là toán tử tuyến tính của $E$. Chứng minh rằng:
a) $M$ là không gian con bất biến của $u$ nếu và chỉ nếu $pup = up$.
b) $M$ và $N$ đều bất biến qua $u$ khi và chỉ khi $pu = up$.

**Bài 25** Nếu $u$ là toán tử tuyến tính với trên không gian vector hữu hạn chiều và nếu $u$ giao hoán với mọi phép chiếu có hạng 1, thì $u = \lambda I$.

**Bài 26** Cho $u$ là toán tử tuyến tính trên không gian vector hữu hạn chiều. CMR
a) Nếu $u$ chéo hoá được và tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $u^{m+1} = u^m$, nếu và chỉ nếu $u$ là phép chiếu.
b) Nếu $u$ chéo hoá được và $u^m = I$ với một giá trị $m \in \mathbb{N}^*$, thì $u^2 = I$.

**Bài 27** Cho $u$ là toán tử trên không gian vector phức n-chiều. Ma trận của $u$ đối với một cơ sở nào đó có dạng:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_2 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & \lambda_{n-1} & . & . & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CMR, $u$ chéo hoá được khi và chỉ khi với mỗi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, nếu $\lambda_k = 0$, thì $\lambda_{n+1-k} = 0$. Tìm đa thức tối tiểu của $u^2$.

**Bài 28** Cho $u$ và $v$ là các toán tử chéo hoá được của không gian vector hữu hạn chiều $E$. CMR, tồn tại đẳng cấu tuyến tính $f$ của $E$ sao cho $f \circ u = v \circ f$ khi và chi khi $u$ và $v$ có tập các giá trị riêng trùng nhau và các không gian riêng ứng với từng giá trị riêng của $u$ và $v$ có cùng số chiều.

**Bài 29** Cho $u$ và $v$ là các toán tử chéo hoá được trên không gian vector $E$ n-chiều. CMR, các khẳng định sau là tương đương.
a) $uv = vu$.
b) Tồn tại một cơ sở của $E$ gồm toàn các vector riêng của $u$ và $v$.
c) Tồn tại một toán tử $w$ chéo hoá được của $E$ và các đa thức $f, g \in \mathbb{R}[x], h \in \mathbb{R}[x, y]$ sao cho $u = f(w), v = g(w), w = h(u, v)$.
Từ đó suy ra, một toán tử trên $E$ giao hoán được với $u$ và $v$ khi và chỉ khi nó giao hoán được với $w$.

**Bài 30** Cho $u_1, u_2, \ldots, u_m$ là các toán tử chéo hoá được của không gian vector $E$ n-chiều. CMR, các khẳng định sau là tương đương:

a) $u_i u_j = u_j u_i$ với mọi $i, j \in [1, m]$.

b) Tồn tại một cơ sở của $E$ gồm toàn các vector riêng của $u_i$.

c) Tồn tại toán tử $w$ chéo hoá được của $E$ và các đa thức $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathbb{R}[X], h \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \ldots, X_m]$ sao cho $f_i(w) = u_i, 1 \leq i \leq m$ và $h(u_1, u_2, \ldots, u_m) = w$.

**Bài 31** Chứng minh tính chất sau của định thức Gram

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k) \geq G(a_1, \ldots, a_k)G(b_1, \ldots, b_l).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\langle a_i, b_j \rangle = 0 \ (i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, l)$$

hoặc một trong hai hệ vector $\{a_1, \ldots, a_k\}; \{b_1, \ldots, b_l\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

**Hướng dẫn** Trực giao hóa hệ vector $\{a_1, ..., a_k, b_1, ..., k_l\}$ thành hệ vector trực giao $\{\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l\}$ và $\{b_1, ..., b_l\}$ thành $\{\rho_1, ..., \rho_l\}$.

Gọi $L_i = \langle a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_{k-1} \rangle$ và $N_i$ là phần bù trực giao của $L_i$ trong $V$. Ta có

$$V = L_i \overset{\perp}{\bigoplus} N_i.$$

Quá trình trực giao hóa ta có

$$b_i = y_i + \rho_i,$$

với $y_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} \rho_j \in \langle b_1, ..., b_{i-1} \rangle$ và $y_i \perp \rho_i$.

Mặt khác, ta có phân tích

$$\rho_i = y_i' + z_i,$$

với $y_i' \in L_i, \ x_i \in N_i$.

Hơn nữa, ta có $b_i = \beta_i + x_i$, với $x_i \in L_i$ và $\beta_i$ trực giao với $L_i$ nên $\beta_i \in N_i$. Vậy ta có 2 biểu diễn $b_i = x_i + \beta_i$ và $b_i = (y_i' + y_i) + z_i$. Suy ra $\beta_i = z_i$ và do đó $\|\beta_i\| = \|z_i\| \leq \|\rho_i\|$.

Ta lại có

$$\begin{aligned} Gr(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l) &= \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \ldots \langle \alpha_k, \alpha_k \rangle \langle \beta_1, \beta_1 \rangle \ldots \langle \beta_l, \beta_l \rangle \\ &= Gr(a_1, ..., a_k). \langle \beta_1, \beta_1 \rangle \ldots \langle \beta_l, \beta_l \rangle \\ &\leq Gr(a_1, ..., a_k). \langle \rho_1, \rho_1 \rangle \ldots \langle \rho_l, \rho_l \rangle \\ &= Gr(a_1, ..., a_k).Gr(\rho_1, ..., \rho_l) = Gr(a_1, ..., a_k).Gr(b_1, ..., b_l) \end{aligned}$$

**Bài 32** Cho $A$ là ma trận đối xứng thực cấp $n$ với các định thức con chính đều không âm, $A_1$ là một ma trận con cấp $k$ $(k < n)$ ở góc trên trái của ma trận $A$ và $A_2$ là ma trận con cấp $k - n$ ở góc dưới phải của ma trận $A$. CMR,

$$\det(A) \leq \det(A_1)\det(A_2).$$

**Bài 33** Cho $V$ là không gian vector $n$ chiều và $W$ là một không gian con $m$ chiều của $V$, $(m < n)$. CMR, tồn tại một cơ sở của $V$ không chứa một vector nào của $W$.

**Hint** Gọi $\{v_1, \ldots, v_m\}$ là cơ sở của $W$ và $\{u_1, \ldots, u_{n-m}\}$ là cơ sở của phần bù tuyến tính của $W$ trong $V$. Khi đó cơ sở $\{v_1 + u_1, \ldots, v_m + u_1, u_1, \ldots, u_{n-m}\}$ chính là cơ sở cần tìm.

## 11TH VIETNAMESE MATHEMATICS OLYMPIAD FOR COLLEGE STUDENTS 2003

**A1.** $A$ is the $4 \times 4$ matrix $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a, a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = b, a_{23} = a_{32} = -1$, other entries $0$, where $a, b$ are real with $a > |b|$. Show that the eigenvalues of $A$ are positive reals.

**A2.** $B$ is the $3 \times 3$ matrix with $b_{11} = a, b_{22} = d, b_{33} = q, b_{12} = b^{\frac{\alpha}{\beta}}, b_{13} = c^{\frac{\alpha}{\gamma}}, b_{21} = b^{\frac{\beta}{\alpha}}, b_{23} = p^{\frac{\beta}{\gamma}}, b_{31} = c^{\frac{\gamma}{\alpha}}, b_{32} = p^{\frac{\gamma}{\beta}}$, where $a, b, c, d, p, q$ are reals and $\alpha, \beta, \gamma$ are non-zero reals. Show that $B$ has real eigenvalues.

**A3.** $D_k$ is the $k \times k$ matrix with $0s$ down the main diagonal, 1s for all other entries in the first row and first column, and $x$ for all other entries. Find $\det D_2 + \det D_3 + \cdots + \det D_n$.

**A4.** $I_n$ denotes the $n \times n$ unit matrix (so $I_{11} = I_{22} = \ldots = I_{nn} = 1$, other entries 0). $P$ and $Q$ are $n \times n$ matrices such that $PQ = QP$ and $P^r = Q^s = 0$ for some positive integers $r, s$. Show that $I_n + (P + Q)$ and $I_n - (P + Q)$ are inverses.

**A5.** $A$ is a square matrix such that $A^{2003} = 0$. Show that $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A + A^2 + \cdots + A^n)$ for all $n$.

**A6.** $A$ is the $4 \times 4$ matrix with $a_{11} = 1 + x_1, a_{22} = 1 + x_2, a_{33} = 1 + x_3, a_4 = 1 + x_4$, and all other entries 1, where $x_i$ are the roots of $x^4 - x + 1$. Find $\det(A)$.

**A7.** $p(x)$ is a polynomial of order $n > 1$ with real coefficients and $m$ real roots. Show that $(x^2 + 1)p(x) + p'(x)$ has at least $m$ real roots.