SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN ĐỂ TÌM LỜI GIẢI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ta biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số y=f(x) tại mọi điểm bất kì trên khoảng lồi luôn nằm phía trên đồ thị và tiếp tuyến tại mọi điểm trên khoảng lõm luôn nằm phía dưới đồ thị, còn tại điểm uốn của đồ thị thì tiếp tuyến xuyên qua nên ta có nhận xét sau.

Nhận xét. Nếu y=ax+b là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $A(x_0;y_0)$ (A không phải là điểm uốn), khi đó tồn tại một khoảng $(\alpha;\beta)$ chứa điểm x_0 sao cho $f(x)\geq ax+b \quad \forall x\in(\alpha;\beta)$ hoặc $f(x)\leq ax+b \quad \forall x\in(\alpha;\beta)$. Đẳng thức xảy ra khi $x=x_0$
Từ đây ta có: $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n) \geq a(x_1+x_2+...+x_n)+nb$ (hoặc $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n) \leq a(x_1+x_2+...+x_n)+3n$) (*) với mọi $x_1,x_2,...,x_n\in(\alpha;\beta)$ và đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=...=x_n=x_0$.

Nếu các biến x_i có tổng $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ (k không đổi) thì (*) được viết lại dưới dạng sau
$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n) \geq ak+nb$ (hoặc $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n) \leq ak+nb$)(**).
Bây giờ ta vận dụng nhận xét này để chứng minh một số bất đẳng thức.

Bài toán 1. Cho $a,b,c\in R$ và $a+b+c=6$. Cmr : $a^4+b^4+c^4\geq 2(a^3+b^3+c^3)$

Nhận xét. Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=2$ và Bđt cần chứng minh có dạng
$\left(a^4-2a^3\right)+\left(b^4-2b^3\right)+\left(c^4-2c^3\right)\geq 0 \Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\geq 0$
Trong đó $f(x)=x^4-2x^3$. Ta có tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $y=f(x)$ điểm có hoành độ $x=2$ là: $y=8x-16$. Ta hy vọng có sự đánh giá: $f(x)\geq 8x-16$ với $\forall x\in R$
Ta có: $f(x)-(8x-16)=x^4-2x^3-8x+16=(x-2)^2(x^2-2x+4)\geq 0 \quad \forall x$. Vậy ta có lời giải như sau.

Lời giải. Ta có: $a^4-2a^3-(8a-16)=(a-2)^2(a^2-2a+4)\geq 0 \quad \forall a\in R$
$\Rightarrow a^4-2a^3\geq 8a-16 \quad \forall a\in R$. Tương tự ta cũng có
$b^4-2b^3\geq 8b-16$; $c^4-2c^3\geq 8c-16$. Cộng 3 bất đẳng thức này lại với nhau ta có
$a^4+b^4+c^4-2(a^3+b^3+c^3)\geq 8(a+b+c)-48=0$ (đpcm).
Chú ý. Vì $y=8x-16$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^3$ tại điểm có hoành độ $x=2$ nên ta có sự phân tích $f(x)-(8x-16)=(x-2)^k g(x)$ với $k\geq 2$ và $g(2)\neq 0$.

Bài toán 2. Cho $a,b,c \ge -\frac{3}{4}$ và $a+b+c=1$. Cmr: $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le \frac{9}{10}$.

(Vô địch Toán Ba Lan 1996)

Nhận xét. Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ và Bđt đã cho có dạng

$f(a)+f(b)+f(c)\le \frac{9}{10}$ trong đó $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ với $x\in[-\frac{3}{4};\frac{5}{2}]$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{3}$ là : $y=\frac{36x+3}{50}$

Xét $\frac{36x+3}{50}-f(x)=\frac{36x+3}{50}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(x^2+1)}\ge 0\ \forall x\in[-\frac{3}{4};\frac{5}{2}]$

Vậy ta có lời giải như sau .

Lời giải. Ta có

$$\frac{36a+3}{50}-\frac{a}{a^2+1}=\frac{(3a-1)^2(4a+3)}{50(a^2+1)}\ge 0\ \forall a\ge -\frac{3}{4}\Rightarrow \frac{a}{a^2+1}\le \frac{36a+3}{50}\ \forall a\ge -\frac{3}{4}$$

Vậy : $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le \frac{36(a+b+c)+9}{50}=\frac{9}{10}$.

Đây là một bài toán hay và tương đối khó, thông thường chúng ta chỉ gặp những bất đẳng thức đối xứng ba biến với điều kiện các biến không âm. Từ lời giải trên ta thấy điều kiện của bài toán là rất chặt và cần thiết.

Trong hai bài toán trên Bđt cần chứng minh là các Bđt có điều kiện và đều có dạng (**). Vậy dấu hiệu để chúng ta có liên tưởng đến phương pháp này là bất đẳng thức cần chứng minh có dạng (*) hoặc (**), tuy nhiên có nhiều trường hợp Bđr cần chứng minh chưa xuất riện dạng (*) hay (**) nhưng qua một số bước biến đổi hoặc đánh giá ta chuyển Bđt đã cho về (*) hay (**). Ta xét bài toán sau.

Bài toán 3. Cho a, b, c>0 và a+b+c=3. Cmr: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$.

(Vô địch Toán Nga 2002)

Nhận xét. Mới đầu nhìn vào Bđt ta chưa thấy xuất hiện dạng (*) hay (**), tuy nhiên chúng ta lưu ý đến đẳng thức $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+ca$ thì Bđt đã cho có thể viết lại như sau : $a^2+2\sqrt{a}+b^2+2\sqrt{b}+c^2+2\sqrt{c}\ge 9 \Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge 9$ trong đó $f(x)=x^2+2\sqrt{x}$ với 0<x< 3. Ta có đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1 và tiếp tuyến của đồ thị hàm số y= $f(x)=x^2+2\sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ x=1 là y=3x.

Xét: $f(x)-3x=(\sqrt{x}-1)^2(x+2\sqrt{x})\ge 0\ \ \forall x\in(0;3)$. Vậy ta có lời giải như sau.

Lời giải. Bđt đã cho tương đương với: $a^2+2\sqrt{a}+b^2+2\sqrt{b}+c^2+2\sqrt{c}\ge 9$

Ta có: $a^2+2\sqrt{a}-3a=(\sqrt{a}-1)^2(a+2\sqrt{a})\ge 0\Rightarrow a^2+2\sqrt{a}\ge 3a$.

Tương tự: $b^2+2\sqrt{b}\ge 3b$; $c^2+2\sqrt{c}\ge 3c$. Cộng ba Bđt trên ta có đpcm.

Chú ý: Với bài toán trên ta có thể sử dụng BĐT Cô si để chứng minh

Bài toán 4. Cho các số thực a,b,c>0 thoả mãn a+b+c=1. Cmr :

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\ge\frac{9}{10}.$$

Lời giải. Ta có $bc\le(\frac{b+c}{2})^2=(\frac{1-a}{2})^2$; $ca\le(\frac{a+c}{2})^2=(\frac{1-b}{2})^2$; $ab\le(\frac{b+a}{2})^2=(\frac{1-c}{2})^2$

nên $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\ge\frac{4a}{a^2-2a+5}+\frac{4b}{b^2-2b+5}+\frac{4c}{c^2-2c+5}$

(***Nhận xét :*** Đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1/3 và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{4x}{x^2-2x+5}$ tại điểm có hoành độ x=1/3 là : $y=\frac{99x-3}{100}$)

Ta có : $\frac{4x}{x^2-2x+5}-\frac{99x-3}{100}=\frac{(3x-1)^2(15-11x)}{100(x^2-2x+5)}\ge 0\quad\forall x\in(0;1)$

Suy ra : $\frac{4a}{a^2-2a+5}+\frac{4b}{b^2-2b+5}+\frac{4c}{c^2-2c+5}\ge\frac{99(a+b+c)-9}{100}=\frac{9}{10}$ đpcm.

Trong nhiều trường hợp, Bđt thức cần chứng minh là thuần nhất khi đó ta có thể chuẩn hóa Bđt và chuyển Bđt cần chứng minh về dạng (*) hoặc (**). Các bài toán sau sẽ cho chúng ta thấy rõ vấn đề này.

Bài toán 5. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Cmr.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

Nhận xét. Ta thấy Bđt cần chứng minh chưa có dạng (*) hay (**), tuy nhiên vì Bđt cần chứng minh là thuần nhất nên ta có thể giả sử $a+b+c=1$ mà không làm mất tính tổng quát của bài toán.

Khi đó Bất đẳng thức đã cho trở thành : $(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a})+(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b})+(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c})\le 9$

$\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le 9$ trong đó $f(x)=\dfrac{5x-1}{x-x^2}$. Bất đẳng thức đã cho xảy ra dấu "=" khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số y=f(x) tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{1}{3}$ là :

$y=18x-3$.Phải chăng ta có đánh giá: $f(x)-(18x-3)=\dfrac{(3x-1)^2(2x-1)}{x-x^2}\le 0 \quad (1)$?

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác thỏa mãn $a+b+c=1$, giả sử a=max{a,b,c} khi đó $1=a+b+c>2a\Rightarrow a<\dfrac{1}{2}$ suy ra $a,b,c\in(0;\dfrac{1}{2})$. Do đó (1) đúng

Lời giải. Không làm mất tính tổng quát ta giả sử a+b+c=1, khi đó Bđt đã cho trở thành

$$\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5a-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2}\le 9.$$

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác và a+b+c=1 suy ra 0<a,b,c<1/2.

Ta có : $\dfrac{5a-1}{a-a^2}-(18a-3)=\dfrac{(3a-1)^2(2a-1)}{a-a^2}\le\dfrac{1}{2} \quad \forall a<\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{5a-1}{a-a^2}\le 18a-3$.

Ta cũng có hai Bđt tương tự. Cộng các Bđt này lại với nhau ta có:

$$\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5a-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2}\le 18(a+b+c)-9=9 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài toán 6 : Cho $a,b,c>0$. Cmr : $\dfrac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\dfrac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\dfrac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\dfrac{3}{5}$

(***Olympic Toán Nhật Bản 1997)***

Lờii giải. Vì Bđt cần chứng minh thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh Bđt đúng với mọi số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Khi đó Bđt đã cho trở thành:

$$\frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2+a^2}+\frac{(1-2b)^2}{(1-b)^2+b^2}+\frac{(1-2c)^2}{(1-c)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}+\frac{4b^2-4b+1}{2b^2-2b+1}+\frac{4c^2-4c+1}{2c^2-2c+1}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2a^2-2a+1}+\frac{1}{2b^2-2b+1}+\frac{1}{2c^2-2c+1}\le\frac{27}{5}\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{27}{5}$$

Trong đó $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$ với $x\in(0;1)$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số *y=f(x)* tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{1}{3}$ là $y=\dfrac{54x+27}{25}$

Ta có: $\frac{54x+27}{25}-f(x)=\frac{2(54x^3-27x^2+1)}{25(2x^2-2x+1)}=\frac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)}\geq 0 \quad \forall x\in(0;1)$

$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\leq\frac{54(a+b+c)+81}{25}=\frac{27}{5}$ đpcm.

Chuẩn hoá là kĩ thuật mà chúng ta hay gặp trong chứng minh bất đẳng thức thuần nhất. Qua các hai bài toán trên ta thấy nhờ việc chuẩn hoá mà ta có thể đưa được bất đẳng thức đã cho về dạng (*) hoặc (**). Tùy thuộc vào đặc điểm của từng bài toán mà ta chọn cách chuẩn hóa pù hợp. Ta xét ví dụ sau

Bài toán 7. Cho a,b,c>0. Cmr :

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

(Trích đề thi Albania 2002)

Lời giải. Vì BĐT đã cho đồng bậc nên ta chuẩn hóa bất đẳng thức bằng cách cho $a^2+b^2+c^2=1$, khi đó bđt cần chứng minh trở thành: $f(a)+f(b)+f(c)\geq 1$ trong đó:

$f(x)=\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.\frac{1}{x}-x$ với 0<x<1. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số y=f(x) tại điểm có hoành độ $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ là

$y=-\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x+\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$. Đến đây ta dễ dàng chứng minh được

$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.\frac{1}{x}-x\geq-\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x+\frac{2+2\sqrt{3}}{3} \quad \forall x\in(0;1)$ và đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Do vậy: $f(a)+f(b)+f(c)\geq-\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(a+b+c)+2+2\sqrt{3}$.

Mặt khác $a+b+c\leq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=\sqrt{3}$ nn

$f(a)+f(b)+f(c)\geq-\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}=1$ Ta có đđpcm.

Qua các bài toán trên ta thấy sử dụng tiếp tuyến trong chứng minh bất đẳng thức cho ta cách tìm lời giải ngắn gọn và đơn giản. Kĩ năng áp dụng đòi hỏi sự linh hoạt và khéo léo.

Cuối cùng tôi xin nêu ra một số bài tập để chúng ta rèn luyện kĩ năng sử dụng tiếp tuyến trong chứng minh Bất đẳng thức.

Chuyên đề sử dụng tiếp tuyến để tìm lời giải trong chứng minh bất đẳng thức

1.Cho a,b,c>0. Cmr: $\frac{(2a+b+c)}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$.

(Vô địch toán Mỹ 2003)

2. Cho $a,b,c>0$.Cmr: $\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{6}{5}$.

(***Trích đề thi Olympic 30-4 Lớp 11 năm 2006***)

3. Cho các số thực dương x,y,z. Cmr: $\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}\le\frac{3+\sqrt{3}}{9}$.

(Vô địch toán Hồng Kông 1997)

4. Cho n số thực dương thoả mãn: $\sum_{i=1}^{n}a_i=n$. Cmr:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+...+\frac{x_n}{1+x_n^2}\le\frac{1}{1+x_1}+...+\frac{1}{1+x_n}$$ (***New Zealand 1998***)

5. Cho a.b.c.d >0 thỏa mãn: $ab+bc+cd+da=1$. Cmr :

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}.$$

6. Cho a,b,c>0 .Cmr $\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}$.

7. Cho $a,b,c>0$; $a^2+b^2+c^2=1$. Cmr : $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}$**.**

8**.** Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Cmr : $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-(a+b+c)\ge 2\sqrt{3}$.

9. Cho a,b,c>0 thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3.Cmr:$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{4}{3}\left(a+b+c\right)\ge 7$.

10. Cho a, b,c>0 .Cmr: $\frac{\left(3a+b+c\right)^3}{3a^3+\left(b+c\right)^3}+\frac{\left(3b+c+a\right)^3}{3b^3+\left(a+c\right)^3}+\frac{\left(3c+b+a\right)^3}{3c^3+\left(b+a\right)^3}\le\frac{375}{11}$.

11. Cho a,b,c>0.Cmr: $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+\left(b+c\right)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+\left(c+a\right)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+\left(a+b\right)^3}}\ge 1$.

12. Cho a,b,c là độ dài các cạnh tam giác . Cmr:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}.$$

13. Cho các số thực dương a,b,c. Cmr: $\sum_{cyc}\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}\ge\frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}$.

14. Cho các số thực dương a,b,c,d thỏa mãn: a+b+c+d=2. Cmr

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{b^2}{(b^2+1)^2}+\frac{c^2}{(c^2+1)^2}+\frac{d^2}{(d^2+1)^2}\le\frac{16}{25}.$$

15. Cmr: $\frac{2x^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{2y^2}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{2z^2}{2z^2+(x+y)^2}\le 1$.

16. Cho a,b,c>0 và a+b+c=1. Cmr: $10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\ge 1$ (***China 2005)***

17. Cho a,b,c>0. Cmr $\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$ ***(Serbia 2005)***