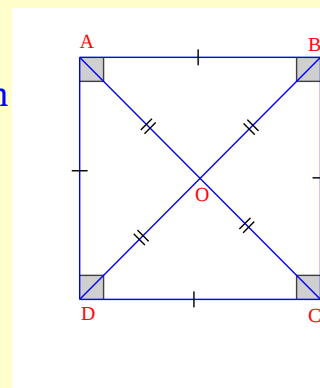


HÌNH VUÔNG

A. Tóm tắt lý thuyết

1. **Định nghĩa:** Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và bốn cạnh bằng nhau

$$\diamond ABCD \text{ là hình vuông} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = C = D \\ AB = BC = CD = DA \end{cases}$$



2. **Nhận xét:** Từ định nghĩa hình vuông ta suy ra

- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau
- Hình vuông là hình thoi có 4 góc vuông

$\Rightarrow$ Hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi

3. **Tính chất:** Hình vuông có tất cả các tính chất của hình bình thoi và hình chữ nhật

- **Tính chất về cạnh:**

+) Có bốn cạnh bằng nhau

+) Các cạnh đối song song

- **Tính chất về góc:** Bốn góc bằng nhau

- **Tính chất về đường chéo:**

+) Hai đường chéo bằng nhau

+) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

+) Hai đường chéo vuông góc với nhau

+) Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi

3. **Dấu hiệu nhận biết**

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông

- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông

- Hình chữ nhật có 1 đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông

- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông

- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

4. **Nhận xét:** Một tứ giác vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông

5. **Tính chất đối xứng của hình vuông**

- Hình vuông có 1 tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo

- Hình vuông có bốn trục đối xứng:

+) 2 đường chéo của hình vuông

+) 2 đường thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của hình vuông.

B. Bài tập và các dạng toán

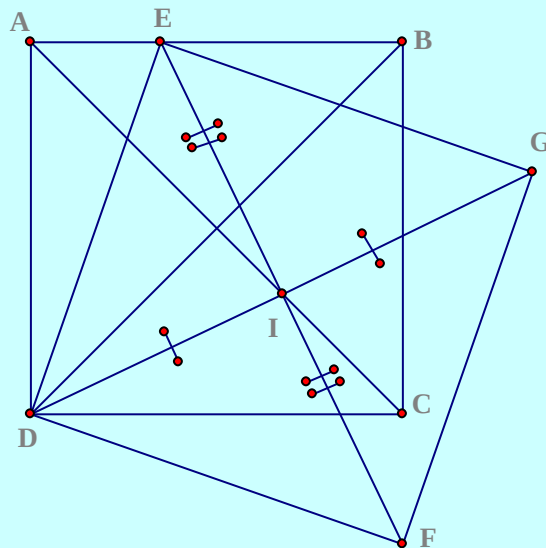
Bài 1: Học sinh giỏi Hà Nội, năm học 2009

Cho hình vuông $ABCD$ và 1 điểm E bất kỳ nằm giữa hai điểm A và B . Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $CF = AE$

a. Tính $\angle EDF$

b. Gọi G là điểm đối xứng với D qua trung điểm I của EF . Tứ giác $DEGF$ là hình gì? Vì sao?

c. Chứng minh ba đường thẳng AC, DG, EF đồng quy tại 1 điểm.



Lời giải

a. $\angle EDF = \angle EDC + \angle CDF = \angle EDC + \angle EDA = 90^\circ$ ($\angle CDF = \angle EDA$)

b. Xét $\square DEGF$ có: $EI = IF$, $DI = IG \Rightarrow \square DEGF$ là hình bình hành

lại có $\angle D = 90^\circ \Rightarrow \square DEGF$ là hình chữ nhật, mà $\triangle ADE = \triangle CDF \Rightarrow ED = FD \Rightarrow \square DEGF$ là hình vuông (dấu hiệu nhận biết).

c. Ta có EF giao DG tại I , ta đi chứng minh I thuộc đường trực của AC

Có: $IB = ID = \frac{1}{2}EF \Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của $BD \Rightarrow I \in AC$ (AC là đường trung trực của BD).

Bài 2:

Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$. Vẽ hình bình hành $AFMN$. Chứng minh rằng

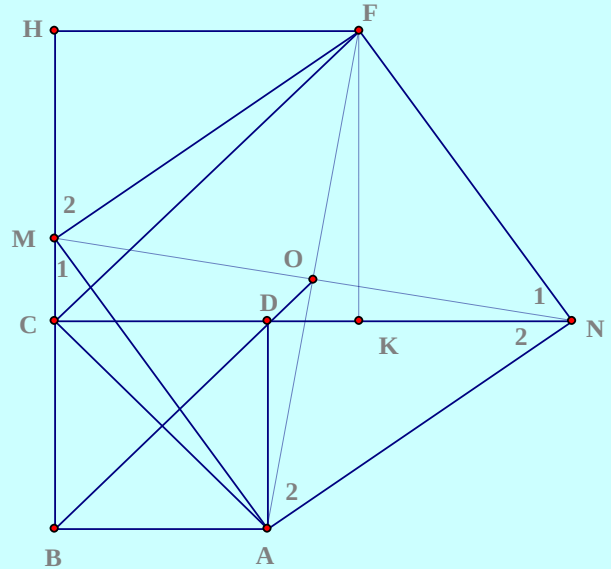
a. $\triangle ABM = \triangle ADN$

b. Tứ giác $AMFN$ là hình vuông

c. Kẻ $FH \perp BM, FK \perp CN$, chứng minh rằng :

$$\angle ACF = 90^\circ$$

d. B, D, O thẳng hàng (O là trung điểm của AF).



Lời giải

a. $\triangle ABM = \triangle ADN (cgc) \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \angle DAN = \angle BAM$

b. Hình bình hành $AMFN$, có $AM = AN \Rightarrow \diamond AMFN$ là hình thoi.

Lại có $\angle MAN = \angle MAD + \angle DAN = \angle MAD + \angle MAB = 90^\circ \Rightarrow \diamond AMFN$ là hình vuông

c. $\angle ACF = \angle ACD + \angle DCF = 45^\circ + \angle DCF$

Ta đi chứng minh $\angle DCF = 45^\circ \Rightarrow \diamond CHFK$ là hình vuông

Có:

$$\angle M_1 + \angle M_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle N_2 + \angle M_2 = 90^\circ, \angle N_1 + \angle N_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle M_2 = \angle N_1 \Rightarrow \triangle MHF = \triangle NKF (ch - gn) \Rightarrow FH = FK$$

$$\Rightarrow \diamond CHFK \text{ là hình vuông } \angle DCF = 45^\circ \Rightarrow \angle ACF = 90^\circ \text{ (đpcm)}$$

d. Ta đi chứng minh 3 điểm B, D, O nằm trên đường trung trực của AC

Ta có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow B, D$ nằm trên đường trung trực của AC

O là trung điểm của $AF \Rightarrow O$ là trung điểm của $MN \Rightarrow OA = OM$

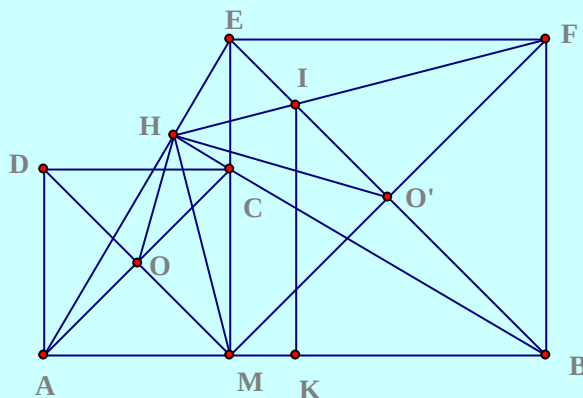
$$\text{Lại có } OC = OM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow OM = OC \Rightarrow OA = OC \Rightarrow O \text{ nằm trên đường trung trực của } AC$$

$\Rightarrow B, D, O$ thẳng hàng.

Bài 3:

Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMCD$ và $BMEF$

- Chứng minh $AE \perp BC$
- Gọi H là giao điểm của AE và BC . Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng
- Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB .



Lời giải

- Có $MD \parallel BE$ (hai góc đồng vị bằng nhau)

mà $MD \perp AC \Rightarrow AC \perp BE$.

Lại có $EC \perp AB \Rightarrow C$ là trực tâm tam giác $ABE \Rightarrow AE \perp BC$

- Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$

Tam giác vuông AHC có OH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC

$$\Rightarrow OH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} DM$$

$$\Rightarrow \triangle DMH (H = 90^\circ) \Rightarrow DH \perp MH (1)$$

Chứng minh tương tự, ta được $HF \perp MH (2) \Rightarrow D, H, F$ thẳng hàng.

- Gọi I là giao điểm của AC và DF

Chứng minh được OI là đường trung bình của tam giác DMF , hay I là trung điểm DF

Kẻ IK vuông góc AB (K thuộc AB) $\Rightarrow K$ là trung điểm của AB , vậy K cố định

$$\text{Mặt khác } IK = \frac{1}{2}(AD + BF) = \frac{1}{2} AB \text{ (không đổi)} \Rightarrow I \text{ cố định.}$$

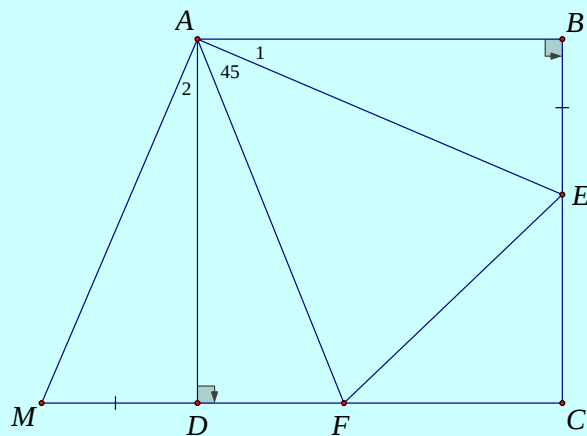
Vậy DE luôn đi qua I cố định.

Bài 4

Cho hình vuông $ABCD$, các điểm E, F lần lượt trên các cạnh BC, CD sao cho $\angle EAF = 45^\circ$, trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho $DM = BE$. CMR:

a) $\triangle ABE = \triangle ADM, \angle MAF = 45^\circ$

b) Chu vi tam giác CEF bằng 1 nửa chu vi tứ giác $ABCD$



Lời giải

a) $\triangle ABE = \triangle ADM$ (2 cạnh góc vuông) $\Rightarrow A_1 = A_2$

$\Rightarrow \angle MAE = 90^\circ \Rightarrow \angle MAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

b) $\triangle AEF = \triangle AMF$ (cgc) $\Rightarrow EF = MF, EF = MD + DF = BE + DF$

Chu vi tam giác $CEF = CE + EF + FC = CE + BE + DF + FC = BC + CD$

$= \frac{1}{2}$ chu vi $ABCD$.

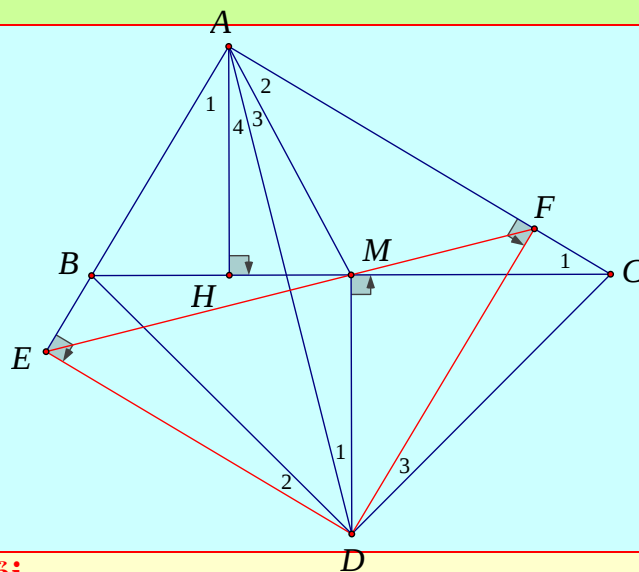
Bài 5:

Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ đường cao AH và trung tuyến AM , đường phân giác góc A , cắt đường trung trực BC tại D , Từ D kẻ DE vuông góc với BA và DF vuông góc với AC

a) Chứng minh rằng AD là phân giác $\angle HAM$

b) 3 điểm E, M, F thẳng hàng

c) Tam giác BCD là tam giác vuông cân.



Lời giải

a) Ta có: $C_1 = A_1$ (cùng phụ góc B)

Mà $AM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AM = MC \Rightarrow A_2 = C_1 \Rightarrow A_1 = A_2, A_3 = A_4$

$\Rightarrow AD$ là tia phân giác.

b) $AH // DM \Rightarrow D_1 = A_4$,

mà $A_4 = A_3 \Rightarrow D_1 = A_3 \Rightarrow \triangle ADM$ cân

$\Rightarrow AM = MD$

Chứng minh tứ giác $AEDF$ là hình vuông

$\Rightarrow EA = ED \Rightarrow FA = FD$

Ta có M, E, F đều nằm trên đường trung trực của AD

$\Rightarrow M, E, F$ thẳng hàng

c) $\triangle BED = \triangle CFD \Rightarrow D_2 = D_3$

$BDC = BDF + D_3 = BDF + D_2 = EDF = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BCD$ vuông cân.

Bài 6:

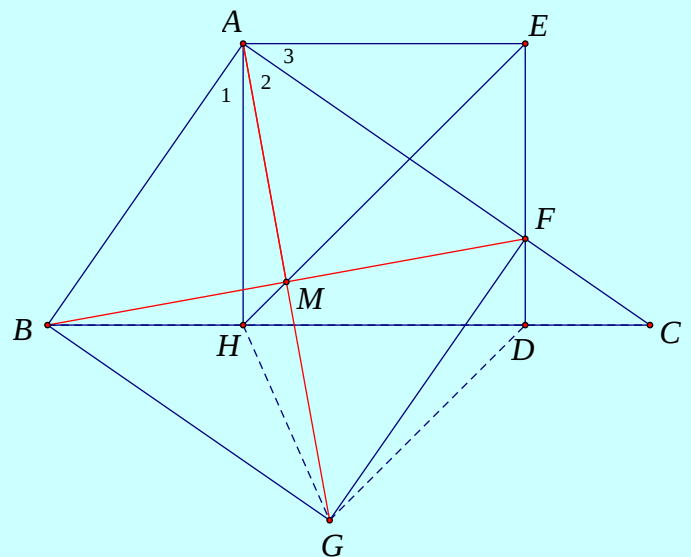
Cho tam giác ABC vuông tại A , và $AB < AC$, kẻ đường cao AH , trong nửa mặt phẳng có chứa A bờ BC vẽ hình vuông $AHDE$

a) CMR: D nằm trên HC

b) Gọi F là giao của DE và AC , đường thẳng qua F và song song với AB cắt đường thẳng qua B và song song với AC tại G , chứng minh $ABGF$ là hình vuông

c) Chứng minh rằng AG, BF, HE đồng quy

d) $DEHG$ là hình thang.



Lời giải

a) $AC > AB \Rightarrow B > C$

Mà $B = HAC \Rightarrow HAC > C \Rightarrow HC > AH \Rightarrow AH = HD \Rightarrow HC > HD \Rightarrow D$ nằm giữa H và C

b) Ta có: $A_1 + A_2 = 90^\circ, A_2 + A_3 = 90^\circ \Rightarrow A_1 = A_3$

kết hợp với $AE = AH \Rightarrow \triangle AEF = \triangle AHB \Rightarrow AB = AF$

Tứ giác $ABGF$ là hình bình hành có 1 góc vuông $\Rightarrow$ hình chữ nhật có $AB = AF \Rightarrow$ là hình vuông

c) Gọi M là giao điểm BF, AG

Khi đó $\triangle BDF$ có $DM = \frac{1}{2}BF \Rightarrow M$ nằm trên đường trung trực của AD

Ta lại có $AE = ED, HA = HD \Rightarrow E, H$ cũng nằm trên đường trung trực của AD

Hay H, M, E thẳng hàng.

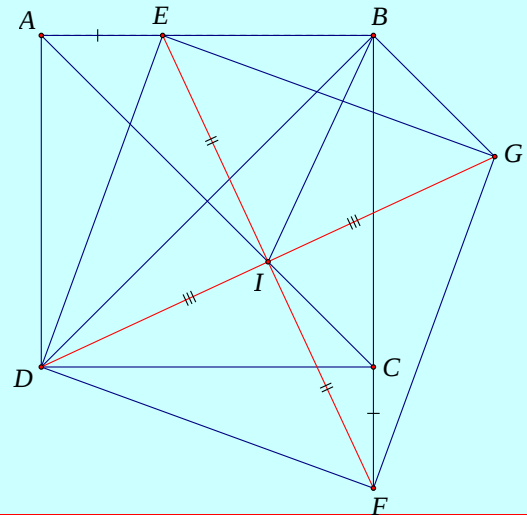
Bài 7:

Cho hình vuông $ABCD$ và 1 điểm E bất kỳ nằm giữa 2 điểm A và B , trên tia đối của tia CB lấy 1 điểm F sao cho $AE = CF$

a) Tính $\angle EDF$

b) Gọi G là điểm đối xứng với D qua trung điểm I của EF , tứ giác $DEGF$ là hình gì?

c) Chứng minh rằng AC, DG, EF đồng quy



Lời giải

a) $\triangle AED = \triangle CFD (cgc) \Rightarrow \angle ADE = \angle CDF \Rightarrow \angle EDF = \angle EDC + \angle CDF = \angle EDC + \angle ADE$

$\Rightarrow \angle EDF = \angle ADC = 90^\circ$

b) Tứ giác $DEGF$ có I là trung điểm của EF (gt)

I là trung điểm của DG

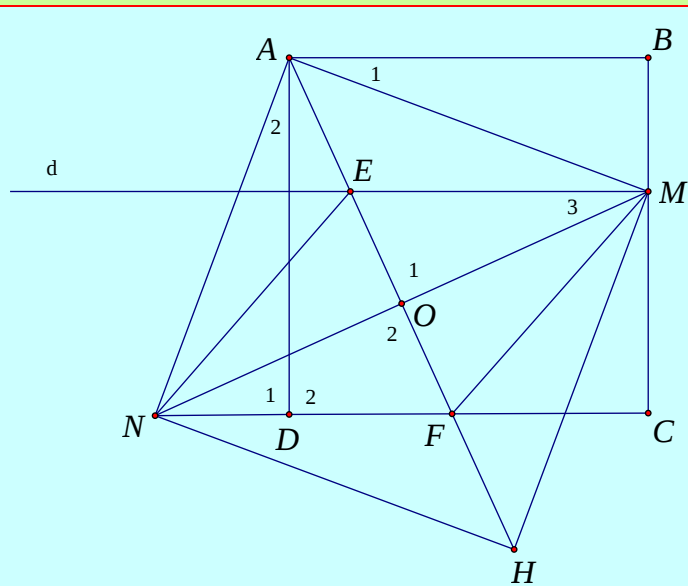
Do đó $DEGF$ là hình bình hành

lại có $\angle EDF = 90^\circ$ nên tứ giác $DEGF$ là hình chữ nhật, lại có tiếp $DE = DF$ nên là hình vuông

Bài 8:

Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm bất kì trên cạnh BC , trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng hình vuông $AMHN$, Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH ở E , cắt DC ở F

- a) Chứng minh rằng $BM = ND$
- b) Chứng minh rằng N, C, D thẳng hàng
- c) $EMFN$ là hình gì?
- d) Chứng minh $DF + BM = FM$ và chu vi tam giác MCF không đổi khi M thay đổi trên BC .



Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow A_1 + MAD = 90^\circ$ (1)

Vì $AMHN$ là hình vuông $\Rightarrow A_2 + MAD = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow A_1 = A_2$

Ta có $\triangle AND = \triangle AMB$ (cgc) $\Rightarrow B = D_1 = 90^\circ, BM = ND$

b) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow D_2 = 90^\circ \Rightarrow D_1 + D_2 = NDC = 180^\circ$

Nên N, C, D thẳng hàng

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AH và MN của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực của đoạn MN , mà $E, F \in AH$

$\Rightarrow EM = EN$ và $FM = FN$ (3)

$\Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow EM = NF$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow EM = EN = NF = FM \Rightarrow MENF$ là hình thoi (5)

d) Từ (5) suy ra $FM = FN = FD + DN$, mà $DN = MB$ (cmt) $\Rightarrow MF = DF + BM$

Gọi chu vi của ΔMCF là P và cạnh hình vuông $ABCD$ là a

Ta có: $P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF$ vì $(MF = DF + MB)$

$$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$$

Hình vuông $ABCD$ cho trước $\Rightarrow a$ không đổi $\Rightarrow P$ không đổi.

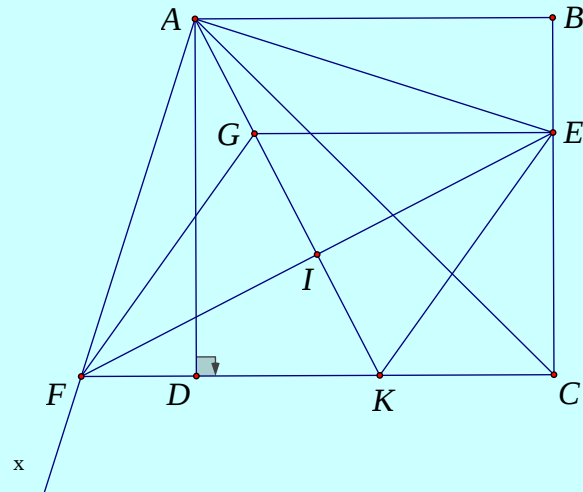
Bài 9:

Cho hình vuông $ABCD$, Gọi E là 1 điểm bất kỳ trên cạnh BC (E khác B và C), Qua A kẻ Ax vuông góc với AE , Ax cắt CD tại F , trung tuyến AI của ΔAEF cắt CD ở K , đường thẳng kẻ qua E , song song với AB cắt AI ở G

a) Chứng minh $AE = AF$ và tứ giác $EGFK$ là hình thoi

b) Chứng minh ΔAKF đồng dạng với ΔCAF và $AF^2 = FK.FC$

c) Khi E thay đổi trên BC , chứng minh chu vi của ΔEKC không đổi.



Lời giải

a) Xét ΔABE vuông tại B và ΔADF vuông tại D có: $AB = AD$

$$\angle BAE = \angle CAF \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ADF$$

$\Rightarrow AE = AF$ vì $AE = AF$ và AI là đường trung tuyến của $\Delta AEF \Rightarrow AI \perp EF$

Hai ΔIEG vuông tại I và ΔIFK vuông tại I có: $\angle IEG = \angle IFK$; $IE = IF$

$$\text{Nên } \Delta IEG = \Delta IFK \Rightarrow EG = FK$$

Tứ giác $EGFK$ có hai cạnh đối EG và FK song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

Hình bình hành $EGFK$ có hai đường chéo GK và EF vuông góc nên là hình thoi

b) Xét ΔAKF và ΔCAF có $\angle AFK = \angle CFA$,

$$KAF = ACF = 45^\circ \Rightarrow \triangle AKF \sim \triangle CAF (g.g) \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{FK}{AF} \Leftrightarrow AF^2 = FK.FC$$

c) Theo câu a ta có $\triangle ABE = \triangle ADF \Rightarrow EB = FD$, tứ giác $EGFK$ là hình thoi nên $EK = KF$

Do đó chu vi $\triangle EKC$ là: $C_{EKC} = EK + KC + CE = CF + CE = CD + DF + CE = 2CD$ (không đổi).

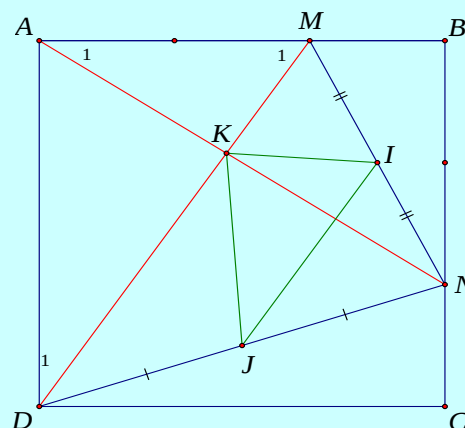
Bài 10:

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , trên AB lấy

$$AM = \frac{2a}{3}, \text{ trên } BC \text{ lấy } BN \text{ sao cho } BN = \frac{2a}{3}$$

a) Chứng minh rằng $AN \perp DM$

b) Gọi I và J lần lượt là trung điểm của NM, ND và K là giao AN và DM . Tính IK, KJ, IJ



Lời giải

a) Ta chứng minh $\triangle ABN = \triangle DAM \Rightarrow D_1 = A_1$

$$\text{Mà } D_1 + M_1 = 90^\circ \Rightarrow A_1 + M_1 = 90^\circ \Rightarrow K = 90^\circ$$

$$\text{b) Ta có } MN = \sqrt{\frac{a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{5}; KI = \frac{1}{2}MN = \frac{a}{6}\sqrt{5}$$

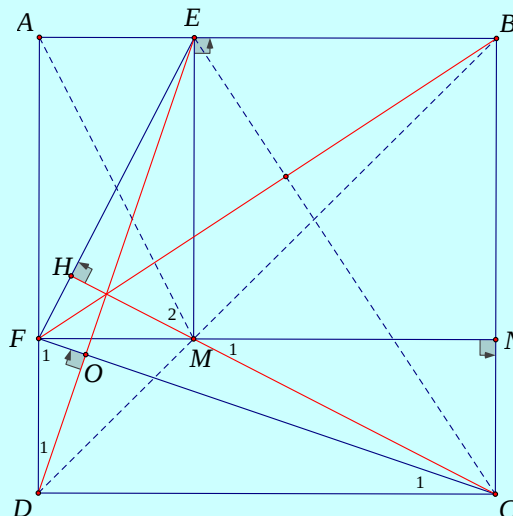
$$\text{Tương tự ta có } DN = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow KJ = \frac{a}{6}\sqrt{10}$$

$$\text{Tương tự } DM = \frac{a}{3}\sqrt{13} \Rightarrow IJ = \frac{a}{6}\sqrt{13}.$$

Bài 11:

Cho hình vuông $ABCD$, Từ điểm M tùy ý trên đường chéo BD , kẻ ME, MF lần lượt vuông góc với AB và AD . Chứng minh rằng:

- $CF = DE; CF \perp DE$
- $CM = EF; OM \perp EF$
- CM, BF, DE đồng quy
- Xác định M để diện tích $AEMF$ lớn nhất



Lời giải

a) BD là đường chéo của hình vuông $ABCD$

$\Rightarrow BD$ là phân giác góc D

$\Rightarrow \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow \triangle DFM$ cân tại $F \Rightarrow DF = FM = AE$

$\triangle CDF = \triangle DAE$ (cgc) $\Rightarrow CF = DE$ và $C_1 = D_1$

Mà $C_1 + F_1 = 90^\circ \Rightarrow D_1 + F_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle FOD = 90^\circ$

b) $AM = EF, BD$ là đường trung trực của AC

$\Rightarrow MA = MC \Rightarrow MC = EF$

Kéo dài FM cắt BC tại $N \Rightarrow$ tứ giác $BEMN$ là hình vuông

$\Rightarrow MN = ME \Rightarrow \triangle EMF = \triangle MNC$ (cgc) $\Rightarrow M_1 = MEF$

Mà $M_1 + M_2 = 90^\circ \Rightarrow MEF + M_2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle EHM = 90^\circ \Rightarrow \text{đpcm.}$

c) $\triangle EFC$ có $CH \perp EF \Rightarrow CM$ trùng CH là đường cao ứng với cạnh EF

Lại có $ED \perp CF$ tại $O \Rightarrow ED$ là đường cao ứng với cạnh CF

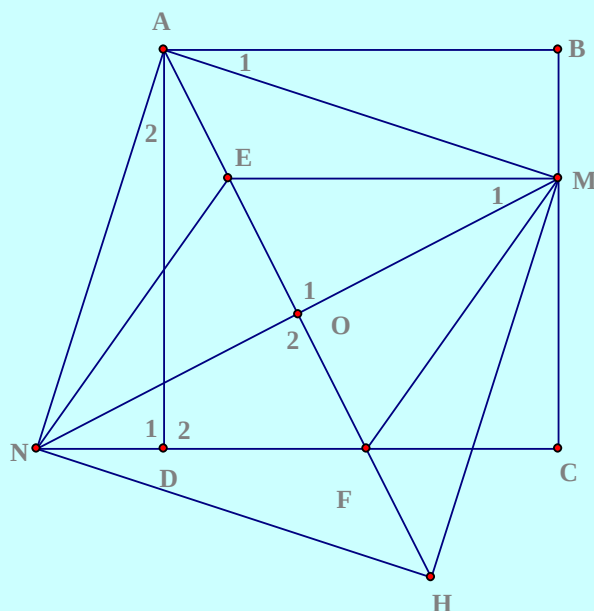
Chứng minh tương tự câu a $\Rightarrow CE \perp BF \Rightarrow BF$ là đường cao ứng với cạnh CE

$\Rightarrow CM, BF, DE$ đồng quy.

Bài 12:

Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm trên cạnh BC . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH ở E , cắt DC ở F

- a) Chứng minh rằng $BM = DN$
- b. C, D, N thẳng hàng
- c. $EMNF$ là hình gì?
- d. $DF + BM = FM$ và chu vi $\triangle MFC$ không đổi khi M thay đổi vị trí trên BC .



Lời giải

a. $\triangle AND = \triangle AMB (cgc) \Rightarrow \angle B = \angle D_1 = 90^\circ; BM = ND$

b. $\angle NDC = 180^\circ \Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng

c. Ta có MN là đường trung trực của AH

$$E, F \in AH \Rightarrow \begin{cases} EN = EM \\ FM = FN \end{cases}; \triangle EOM = \triangle FON (ch - gn) \Rightarrow FN = EM.$$

Vậy 4 cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

d. $FM = FN = ND + DF = BM + FD$

+) $P_{\triangle MFC} = MC + CF + FM = MC + CF + BM + DF$

$= (MC + MB) + (CF + DF) = 2AB$ (không đổi)

Bài 13:

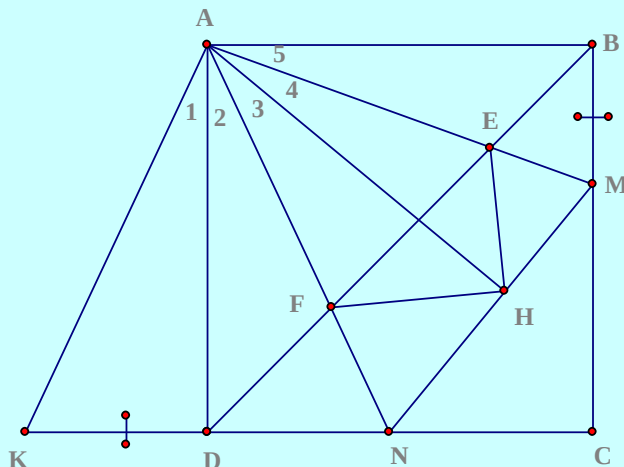
Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh là a .
Gọi M và N theo thứ tự là hai điểm trên cạnh BC và CD sao cho $MAN = 45^\circ$. Trên tia đối của tia DC lấy điểm K sao cho $DK = BM$

a. Chứng minh $\triangle ADK = \triangle ABM$

b. Chứng minh AN là tia phân giác KAM

c. Tính chu vi $\triangle CMN$ theo a

d. BD cắt AM và AN lần lượt tại E và F .
Chứng minh rằng ba đoạn BE, EF, FD lập thành ba cạnh của 1 tam giác vuông.



Lời giải

a. $\triangle ADK = \triangle ABM$ (c - g - c)

b. $\triangle ADK = \triangle ABM \Rightarrow \angle_1 = \angle_5$

+) $\angle KAM = \angle_1 + \angle_2 + \angle_3 + \angle_4 = \angle_5 + \angle_2 + \angle_3 + \angle_4 = 90^\circ$

$\angle KAN = 90^\circ - \angle NAM = 45^\circ \Rightarrow \angle KAN = \angle MAN = 45^\circ \Rightarrow \text{đpcm}$

c. $P_{CMN} = MN + NC + CM = CM + CN + KN$ ($\triangle ANK = \triangle AMN$) $= CM + CN + KD + DN = 2a$

d. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến MN

$\triangle AND = \triangle AMH$ (ch - gn) $\Rightarrow \angle_2 = \angle_3 \Rightarrow \triangle FAD = \triangle FAH$ (cgc) $\Rightarrow FH = FD$; $\angle AHF = \angle ADF = 45^\circ$

$\triangle AEH = \triangle AEB$ (cgc) $\Rightarrow EH = EB$; $\angle AHE = \angle ABE = 45^\circ$

Ta có $\angle EHF = \angle EHA + \angle FHA = 90^\circ \Rightarrow$ vuông tại H

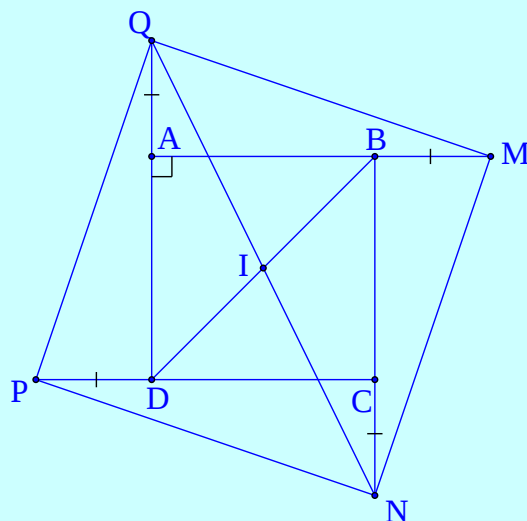
Vậy BE, DF, FE lập thành ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài 14:

Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia BA ta lấy một điểm M , trên tia đối của tia CB ta lấy điểm N , trên tia đối của tia DC ta lấy một điểm P và trên tia đối của tia AD ta lấy điểm Q sao cho $AQ = BM = CN = DP$.

Chứng minh:

- Các tam giác vuông AQM, BMN, CNP, DPQ bằng nhau.
- Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.
- Hai hình vuông $MNPQ$ và $ABCD$ có chung một tâm đối xứng.



Lời giải

a) Dễ thấy $AM = BN = CP = DQ$, do đó các tam giác vuông AQM, BMN, CNP, DPQ bằng nhau (c-g-c).

b) $\triangle AQM = \triangle BMN = \triangle CNP = \triangle DPQ$ suy ra $QM = MN = NP = PQ$ (1)

Mặt khác $\triangle AQM = \triangle BMN \Rightarrow \angle AMQ = \angle BNM$.

Và $\angle BNM + \angle BMN = 90^\circ$, do đó ta có $\angle AMQ + \angle BMN = 90^\circ$, hay $\angle QMN = 90^\circ$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $MNPQ$ là hình vuông.

c) Xét tứ giác $BNDQ$ có $BN \parallel DQ$ và $BN = DQ$ nên $BNDQ$ là hình bình hành. Gọi I là giao điểm của BD và NQ , thì I là trung điểm của BD và NQ . Do đó I là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $MNPQ$.

Vậy hai hình vuông $ABCD$ và $MNPQ$ có chung tâm đối xứng I .

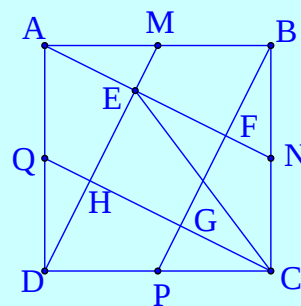
Bài 15:

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA

a) Chứng minh $AN = DM$ và $AN \perp DM$.

b) Chứng minh rằng các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành một hình vuông.

c) Gọi E là giao điểm của DM và AN . Chứng minh $CD = CE$.

**Lời giải**

a) Xét hai tam giác ABN và DAM vuông tại B và A , có $AB = AD$ và $BN = AM$, do đó $\triangle ABN = \triangle DAM$

suy ra $AN = DM$ và $\angle BAN = \angle ADM$.

Mà $\angle BAN + \angle DAN = 90^\circ$, do đó $\angle ADM + \angle DAN = 90^\circ$, hay $\angle AED = 90^\circ$.

Vậy ta có $AN = DM$ và $AN \perp DM$

b) Giả sử các đoạn thẳng DM, AN, BP, CQ giao nhau tạo thành tứ giác $EFGH$.

$MB \parallel DP$ và $MB = DP \Rightarrow MBPD$ là hình bình hành.

Suy ra $BP \parallel DM \Rightarrow AN \perp BP$

Tương tự ta cũng có $CQ \perp DM$

Như vậy tứ giác $EFGH$ có $\angle E = \angle F = \angle H = 90^\circ$.

* Ta chứng minh $EF = EH$

Để thấy EM là đường trung bình trong tam giác ABF , E là trung điểm của AF

Tương tự H là trung điểm của DE .

Xét hai tam giác ABF và DAE vuông tại F là E , có:

$$AB = AD; \angle BAF = \angle ADE (\angle BAF = \angle DAM) \Rightarrow \triangle ABF = \triangle DAE \Rightarrow AF = DE$$

Từ đó ta có $EF = EH \Rightarrow \diamond EFGH$ là hình vuông.

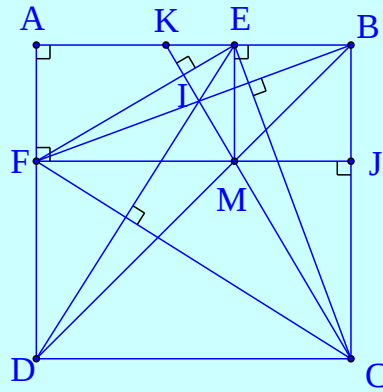
c) H là trung điểm của DE và $CH \perp DE$, do đó ta suy ra $\triangle CDE$ cân tại C , hay là $CE = CD$.

Bài 16:

Cho hình vuông $ABCD$. Từ điểm M thuộc đường chéo BD kẻ $ME \perp AB$ và $MF \perp AD$. Chứng minh rằng:

a) $CF = DE$ và $CF \perp DE$

b) Ba đường thẳng CM, BF và EF đồng qui.



Lời giải

a) Tứ giác $MEAF$ có $\angle A = \angle E = \angle F = 90^\circ$ nên $MEAF$ là hình chữ nhật. Mặt khác, dễ thấy $\triangle MEB$ vuông cân tại E , do đó $AF = EM = EB \Rightarrow DF = AE$

Từ đó ta có $\triangle DAE = \triangle CDF$ (cgc) $\Rightarrow CF = DE$ và $\angle FCD = \angle EDA$

Vì $\angle FCD + \angle CFD = 90^\circ$ nên $\angle EDA + \angle CFD = 90^\circ$ hay $CF \perp DE$

b) Chứng minh tương tự như trên, ta có: $\triangle ABF = \triangle CBE \Rightarrow BF \perp CDE$

* Ta chứng minh $CM \perp EF$

Giả sử FM cắt BC tại J ; CM cắt EF , AB lần lượt tại I, K . Ta có $\angle MJC = 90^\circ$.

Dễ thấy $BEMJ$ là hình vuông nên $MJ = FA; CJ = EA$

Suy ra $\triangle CJM = \triangle EAF$ (cgc) $\Rightarrow \angle JCM = \angle AEF$.

Vì $\angle JCM + \angle EKI = 90^\circ$ nên $\angle AEF + \angle EKI = 90^\circ$, hay $\angle KIE = 90^\circ$.

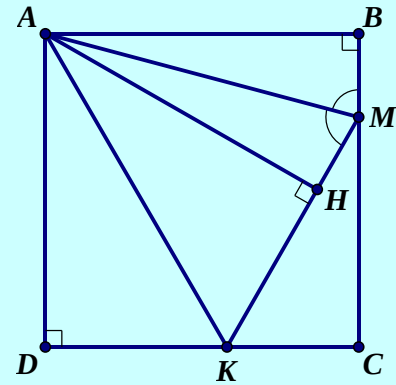
Xét tam giác EFC có $ED \perp FC, FB \perp CE, CM \perp EF \Rightarrow ED, FB, CM$ là ba đường cao trong tam giác EFC . Vậy ED, FB, CM đồng qui.

Bài 17:

Cho hình vuông $ABCD$. Từ điểm M tùy ý trên cạnh BC , vẽ đường thẳng cắt cạnh CD tại K sao cho $AMB = AMK$, $AH \perp MK = H$. Chứng minh rằng

a) $\triangle AMH = \triangle AMB$

b) $\angle KAM = 45^\circ$



Lời giải

a) Ta có:
$$\begin{cases} \angle BAM + \angle BMA = 90^\circ \\ \angle HAM + \angle HMA = 90^\circ \Rightarrow \angle BAM = \angle HAM \\ \angle BAM = \angle HMA \end{cases}$$

Hai tam giác HAM và AMB có: $\angle HAM = \angle BAM$; AM chung; $\angle HAM = \angle BMA$

Do đó $\triangle AMH = \triangle AMB$ (g-c-g)

b) Xét hai tam giác ADK và AHK lần lượt vuông tại D và H , có cạnh huyền AK chung, đồng thời $AH = AD$ (vì cùng bằng AB).

Vậy $\triangle ADK = \triangle AHK \Rightarrow \angle DAK = \angle HAK$

$$\angle KAM = \angle HAK + \angle HAM = \frac{1}{2}(\angle HAD + \angle HAB) = \frac{1}{2}\angle BAD = 45^\circ$$

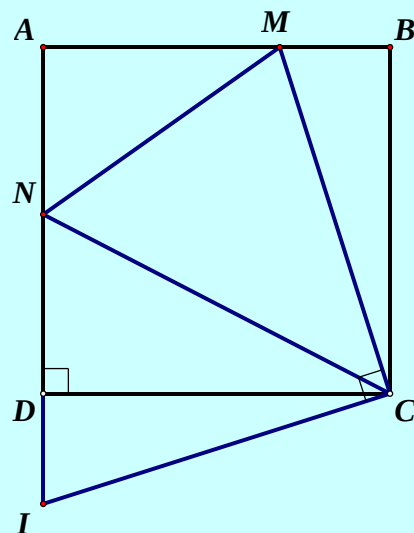
Bài 18:

a) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M và N là hai điểm lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho chu vi $\triangle AMN$ bằng 2.

Chứng minh $\angle MCN = 45^\circ$.

b) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AB, AD sao cho $\angle MCN = 45^\circ$. Chứng minh $\triangle AMN$ có chu vi bằng 2.

c) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi N là trung điểm của AD và M thuộc cạnh AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$. Chứng minh MC là phân giác của góc BMN .



Lời giải

a) Theo giả thiết $2 = AM + AN + MN = (AB - BM) + (AD - DN) + MN = 2 - (BM + DN) + MN$

Suy ra $MN = BM + DN$

Trên tia đối của tia DN lấy điểm I thỏa mãn $DI = BM$

Hai tam giác vuông CBM và CDI bằng nhau vì có: $CB = CD$; $\angle CBM = \angle CDI = 90^\circ$; $BM = DI$

Suy ra $CM = CI$ và $\angle BCM = \angle DCI$. $\angle MCI = \angle MCD + \angle DCI = \angle MCD + \angle BCM = 90^\circ$.

Theo trên ta có $MN = BM + DN = ID + DN = IN$

Xét hai tam giác CMN và CIN có: $CM = CI$; $MN = NI$; CN chung

Suy ra $\triangle CMN = \triangle CIN \Rightarrow \angle MCN = \angle ICN$.

Mà $\angle MCN + \angle ICN = \angle MCI = 90^\circ$. Vậy $\angle MCN = 45^\circ$

b) Giả sử $\angle MCN = 45^\circ$. Chứng minh chu vi tam giác AMN bằng 2.

Đường thẳng qua C , vuông góc với CM cắt AD tại I . Vì $\angle MCN = 45^\circ$ nên $\angle ICN = \angle MCN = 45^\circ$.

$\angle BCM = \angle DIC$ (cùng phụ với $\angle MCD$); $BC = DC$

Do đó hai tam giác vuông BCM và DCI bằng nhau. Suy ra $CM = CI$.

Từ đó ta chứng minh được $\triangle MCN = \triangle ICN$ (c-g-c) $\Rightarrow MN = NI$

Từ đây, tương tự như trên ta chứng minh được tam giác AMN có chu vi bằng 2

c) Đường thẳng qua C , vuông góc với CN , cắt AM tại K

$BCK = DCN$ (vì cùng phụ với góc NCB)

Do đó dễ dàng chứng minh được hai tam giác vuông BCK và DCN bằng nhau (g-c-g).

Suy ra $CK = CN$ và $BK = DN$

$$MK = MB + BK = MB + DN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}AB = \frac{5}{6}AB$$

$$\text{Theo định lí Pitago: } MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{\frac{4AB^2}{9} + \frac{AB^2}{4}} = \frac{5AB}{6}.$$

Ta được $MK = MN$

Từ đó suy ra $CKM = CNM$

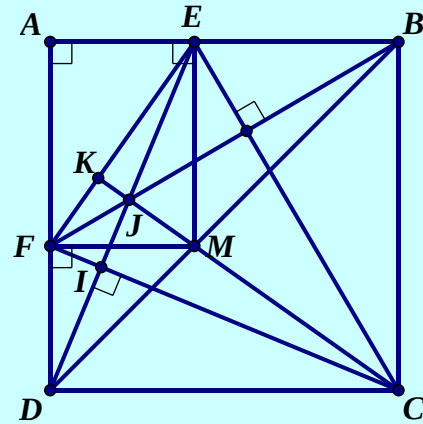
Vậy $CMK = CMN$, hay MC là phân giác góc BMN

Bài 19:

Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm M trên BD . Vẽ $ME \perp AB$ tại E và $MF \perp AD$ tại F .

Chứng minh rằng:

- a) $CF = DE; CF \perp DE$
- b) $CM = EF; CM \perp EF$
- c) $BF = CE; BF \perp CE$
- d) CM, BF, DE đồng quy



Lời giải

- a) Chứng minh $CF = DE; CF \perp DE$

Ta có $AEMF$ là hình chữ nhật (vì $A = E = F = 90^\circ$) $\Rightarrow AE = MF$

Mặt khác $FMD = ABD = 45^\circ$ (so le trong), suy ra $MF = DF$

Từ đó ta suy ra hai tam giác AED và DFC bằng nhau (c-g-c).

Do đó $CF = DE$ và $\angle ADE = \angle DCF$

Gọi I là giao điểm của CF và DE , ta có:
$$\begin{cases} \angle IFD = \angle DCF \\ \angle ADE = \angle DCF \end{cases} \Rightarrow \angle IFD + \angle ADE = 90^\circ \Rightarrow \angle FID = 90^\circ$$

Vậy $CF \perp DE$

b) Chứng minh $CM = EF; CM \perp EF$

$$\begin{cases} MF = FD \\ \angle MFC = \angle FDE \left(\angle MFC + \angle IFD = \angle FDE + \angle IFD = 90^\circ \right) \\ FC = DE \end{cases} \Rightarrow \triangle MFC = \triangle FDE \Rightarrow CM = EF.$$

Lại có
$$\begin{cases} \angle FCK = \angle DEK \\ \angle DEK + \angle EFC = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle FCK + \angle DEK = 90^\circ \Rightarrow \angle ADE = \angle EKJ = 90^\circ$$

Vậy $CM = EF; CM \perp EF$

c) $BF = CE; BF \perp CE$

Ta dễ dàng chứng minh $\triangle ABF = \triangle BCE \Rightarrow BF = CE; \angle ABF + \angle BEC = \angle ADE = \angle ECF + \angle BEC = 90^\circ$

d) Theo kết quả ba câu trên thì CM, FB, ED là ba đường cao trong tam giác CEF . Theo tính chất ba đường cao trong một tam giác đồng quy, ta suy ra CM, BF, DE đồng quy.

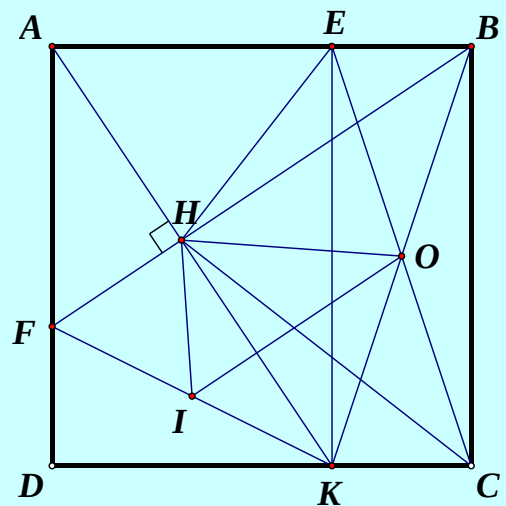
Bài 20:

Cho hình vuông $ABCD$, lấy các điểm E, F, K lần lượt trên cạnh AB, AD, DC sao cho $AE = AF = DK$

a) Chứng minh $AK \perp BF$ tại giao điểm H

b) Chứng minh $\angle EHC = 90^\circ$.

c) Cho $AB = 3, AE = 2$. Gọi I là trung điểm FK, O là trung điểm EC . Chứng minh chu vi $\triangle HIO$ bằng $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13})$.



Lời giải

a) Chứng minh $AK \perp BF$ tại giao điểm H

Ta có $\triangle ABF = \triangle DAK$ (cgc) $\Rightarrow ABF = DAK$ (1)

Suy ra $ABF = DAK$ (1).

Mặt khác $DAK + BAH = 90^\circ$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow ABF + BAH = 90^\circ$.

Vậy $AK \perp BF$

b) Chứng minh $EHC = 90^\circ$.

Dễ thấy $BEKC$ là hình chữ nhật, O là trung điểm của EC cũng là trung điểm của BK .

$\triangle BHK$ vuông tại H có HO là đường trung tuyến nên $HO = OB = OK$

Suy ra $HO = OC = OE$. Mà OH là trung tuyến trong $\triangle HEC$ nên ta được $\triangle HEC$ vuông tại H .

Vậy $EHC = 90^\circ$.

c) Theo trên ta có $HO = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}\sqrt{BE^2 + EK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+9} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

HI là đường trung tuyến trong tam giác vuông HFK

Do đó $HI = \frac{1}{2}FK = \frac{1}{2}\sqrt{FD^2 + DK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Trong $\triangle FBK$, OI là đường trung bình, do đó: $OI = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

Vậy chu vi tam giác OIH bằng $OI + OH + HI = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13})$

Bài 21:

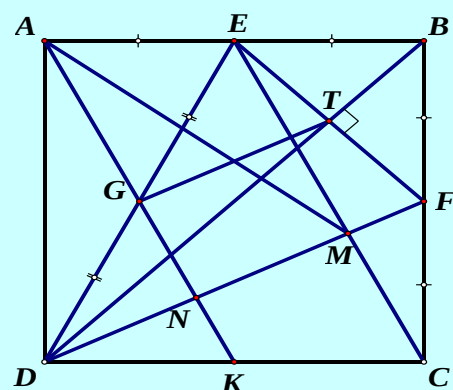
Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB, BC, DE . Vẽ $BT \perp EF$ tại T

a) Chứng minh $\triangle TAG$ cân.

b) Chứng minh $CE \perp GT$

c) Gọi M là giao điểm của CE và DF .

Chứng minh $AM = AB$



Lời giải

a) $\triangle BEF$ cân tại B nên BT là phân giác góc ABC , do vậy BT đi qua D .

$\triangle TED$ vuông tại T có TG là trung tuyến nên $TG = \frac{1}{2}DE$

$\triangle AED$ vuông tại A có AG là trung tuyến nên $AG = \frac{1}{2}DE$

Vậy $AG = TG$, hay $\triangle AGT$ cân tại G

b) Gọi K là trung điểm của CD , ta có $AEKD$ là hình chữ nhật nên G là trung điểm của AK .

Dễ thấy tứ giác $AECK$ là hình bình hành. Ta có $CE \parallel AG$ (1)

$\triangle ADG$ cân tại $G \Rightarrow \angle ADG = \angle DAG = \frac{1}{2} \angle AGE$.

Tương tự: $\angle TDG = \angle DTG = \frac{1}{2} \angle TGE \Rightarrow \angle AGT = \angle AGE + \angle TEG = 2(\angle ADG + \angle TDG) = 2\angle ADB = 90^\circ$

$\Rightarrow AG \perp GT$ (2)

(1) và (2) suy ra $CE \perp GT$

c) Gọi N là giao điểm của AK và DM , ta có $AK \parallel CE$ và K là trung điểm của DC nên N là trung điểm của DM

Dễ thấy $\triangle BCE = \triangle CDF$ (cgc) $\Rightarrow \angle BCE = \angle CDF$

$\angle MCD + \angle MDC = \angle MCD + \angle MCB = 90^\circ$. Từ đó suy ra $CE \perp DF$

Theo trên, $AK \parallel CE$ hay $AN \parallel CE$, suy ra $AN \perp DF$

Trong tam giác ADM , N là trung điểm DM và $AN \perp DM$ nên $\triangle ADM$ cân tại A

Vậy ta có $AM = AD = AB$.

Bài 21:

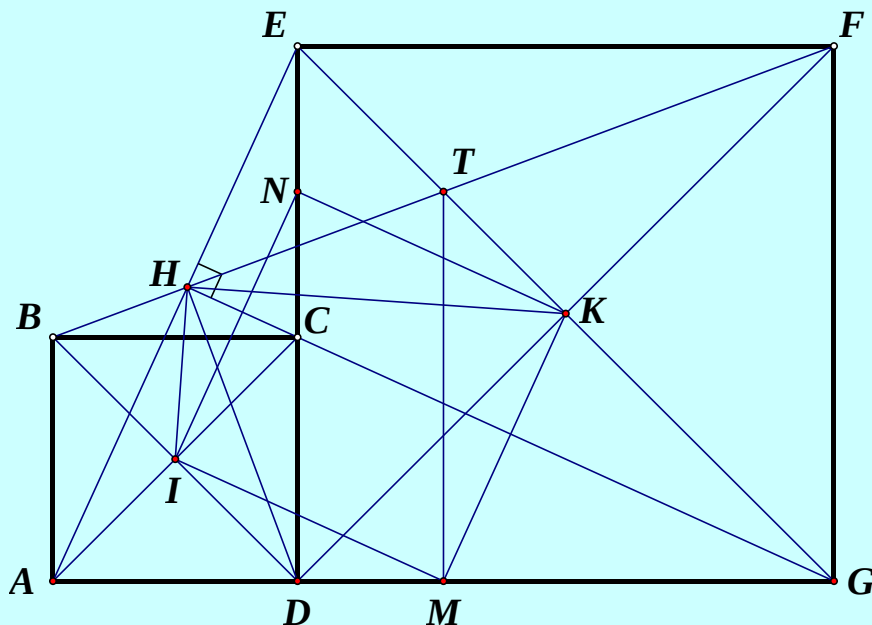
Cho đoạn thẳng AG và điểm D nằm giữa A và G . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AG vẽ các hình vuông $ABCD, DEFG$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AG, EC . Gọi I, K lần lượt là tâm đối xứng của các hình vuông $ABCD, DEFG$

a) Chứng minh $AE = CG$ và $AE \perp CG$ tại H

b) Chứng minh $IMKN$ là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

d) Gọi T là giao điểm của BF và EG . Chứng minh rằng độ dài TM không đổi khi D di động trên đoạn thẳng AG cố định.



Lời giải

a) Ta có $AD = CD, DE = DG \Rightarrow \triangle ADE = \triangle CDG (cgc) \Rightarrow AE = CG$

$$\angle AED = \angle CGD, \angle ECH = \angle GCD \Rightarrow \angle AED + \angle ECH = \angle CGD + \angle GCD = 90^\circ \Rightarrow \angle EHG = 90^\circ.$$

Vậy $AE = CG$ và $AE \perp CG$

b) Chứng minh $IMKN$ là hình vuông.

$$IN \text{ là đường trung bình trong tam giác } ADE, IN = \frac{1}{2} AE; IN \parallel AE$$

KM là đường trung bình trong tam giác AGE , suy ra $KM = \frac{1}{2}AE$; $KM \parallel AE$

Từ đó suy ra $IN = KM = \frac{1}{2}AE$; $IN \parallel KM \parallel AE$

Tương tự: IM, KN lần lượt là đường trung bình trong hai tam giác ACG và ECG

Nên $IM = KN = \frac{1}{2}CG$; $IM \parallel KN \parallel CG$

Lại có $AE = CG$ và $AE \perp CG$. Từ đó ta được $IMKN$ là hình vuông.

c) Chứng minh B, H, F thẳng hàng.

Tam giác HAC vuông tại H , có HI là trung tuyến nên $HI = IA = IC$

Suy ra $IH = IB = ID$. Mà IH là trung tuyến của $\triangle BHD$, do đó $\triangle BHD$ vuông tại H

Tương tự: $HK = KE = KG = KD = KF \Rightarrow \triangle HDF$ vuông tại H

Như vậy ta có $BH \perp DH$; $FH \perp DH$. Vậy B, H, F thẳng hàng

d) $ADB = AGE = 45^\circ \Rightarrow BD \parallel EG$

K là trung điểm của DF nên KT là đường trung bình trong tam giác BDF , hay T là trung điểm của BF

Tứ giác $ABFG$ là hình thang hai đáy AB và FG , có TM là đường trung bình.

Như vậy ta có: $TM = \frac{AB + GF}{2} = \frac{AD + DG}{2} = \frac{AG}{2}$ (không đổi).

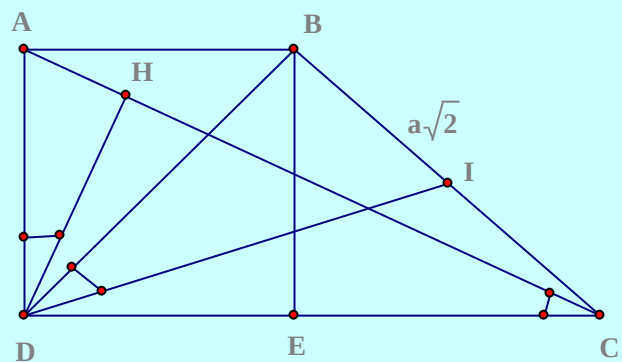
Bài 23: Học sinh giỏi năm 2014

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D , biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD

a. $\diamond ABED$ là hình gì? Vì sao

b. Tính S_{ABCD} theo a

c. Gọi I là trung điểm của BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC . Tính HDI



Lời giải

a) Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông

b) $\triangle BEC$ vuông cân vuông cân

$$\Rightarrow AB = AD = a; CD = 2a; S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{(a + 2a) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

$$c. \begin{cases} HDI = HDB + BDI \\ HDB + HDA = 90^\circ \end{cases}.$$

Ta đi chứng minh $BDI = ADH = ACD$ (phu : HDC) $\Leftarrow \triangle BDI \sim \triangle DCA$ (cgc)

$$\forall \frac{BI}{BD} = \frac{1}{2} = \frac{AD}{DC}; B = D = 90^\circ \Rightarrow HDI = 45^\circ.$$