

CHUYÊN ĐỀ 3: PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHIACÓ DU
CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC CHỨNG MINH BÀI TOÁN
CHIA HẾT

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. TÍNH CHẤT CHUNG $(n \in \mathbb{N})$

- 1) $a : b$ và $b : c$ thì $a : c$
- 2) $a : a$ với mọi a khác 0
- 3) $0 : b$ với mọi b khác 0
- 4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1

2. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA TỔNG, HIỆU

- Nếu a, b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m và $a - b$ chia hết cho m
- Tổng (Hiệu) của 2 số chia hết cho m và 1 trong 2 số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .
- Nếu 1 trong 2 số a, b chia hết cho m số kia không chia hết cho m thì tổng, hiệu của chúng không chia hết cho m .

3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA 1 TÍCH

- Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m
- Nếu a chia hết cho m thì bội của a cũng chia hết cho m
- Nếu a chia hết cho m , b chia hết cho n thì $a.b$ chia hết cho $m.n$
- Nếu a chia hết cho b thì: $a^m : b^m$

4. CÁC TÍNH CHẤT KHÁC:

- 1) $0 : a$ ($a \neq 0$)
- 2) $a : a; a : 1$ ($a \neq 0$)
- 3) $a : b; b : c \Rightarrow a : c$
- 4) $a : m; b : m \Rightarrow pa \pm qb : m$
- 5) $a : (m.n) \Rightarrow a : m; a : n$
- 6) $a : m; a : n; (m, n) = 1 \Rightarrow a : mn$
- 7) $a : m; b : n \Rightarrow ab : mn$
- 8) $ab : m; (b, m) = 1 \Rightarrow a : m$

9) $ab : p$ (p là số nguyên tố) thì hoặc $a : p$ hoặc $b : p$

5. CÁC TÍNH CHẤT SUY LUẬN ĐƯỢC

- Trong hai số tự nhiên liên tiếp có một số chẵn và một số lẻ.
- Tổng hai số tự nhiên liên tiếp là một số lẻ.
- Tích hai số tự nhiên liên tiếp là một số chẵn.
- Tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.
- Tổng của hai số tự nhiên bất kỳ là một số lẻ thì có một số tự nhiên là số chẵn.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

1, Dạng 1: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một biểu thức (với n là số mũ) chia hết cho một số.

2, Dạng 1: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một biểu thức (với n là cơ số) chia hết cho một số.

3, Dạng 3: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh đẳng thức.

Dạng 1: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một biểu thức (với n là số mũ) chia hết cho một số.

I. Phương pháp giải:

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

PHƯƠNG PHÁP 1:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

PHƯƠNG PHÁP 2:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$ có nghĩa là $F_1 : A$

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ có nghĩa là $F_k : A$

Bước 3: Ta chứng minh $F_{k+1} - F_k : A$.

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng: $4^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải:

Đặt $A_n = 4^n + 5$

* Với $n = 0$, ta có $A_0 = 4^0 + 5 = 6 : 3$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $A_k = 4^k + 5 : 3$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 4^{k+1} + 5 = 4^k \cdot 4 + 5$

$$= 4^k \cdot (3+1) + 5 = \underbrace{4^k}_3 \cdot 3 + \underbrace{4^k}_3 + 5$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 3$$

Vậy $4^n + 5$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 2: Chứng minh rằng: $7^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $A_n = 7^n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 7^1 - 1 = 6 \vdots 6$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 7^k - 1 \vdots 6$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7^k \cdot 7 - 1$

$$= 7^k \cdot (6+1) - 1 = \underbrace{7^k}_6 \cdot 6 + \underbrace{7^k}_6 - 1$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6$$

Vậy $7^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3: Chứng minh rằng: $9^n - 1$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $A_n = 9^n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 9^1 - 1 = 8 \vdots 8$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 9^k - 1 \vdots 8$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 9^{k+1} - 1 = 9^k \cdot 9 - 1$

$$= 9^k \cdot (8+1) - 1 = \underbrace{9^k}_8 \cdot 8 + \underbrace{9^k}_8 - 1$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 8$$

Vậy $9^n - 1$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 4: Chứng minh rằng: $13^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $A_n = 13^n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 13^1 - 1 = 12 \vdots 6$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 13^k - 1 \vdots 6$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13^k \cdot 13 - 1$

$$= 13^k \cdot (12 + 1) - 1 = \underbrace{13^k}_{\vdots 6} \cdot \underbrace{12}_{\vdots 6} + \underbrace{13^k}_{\vdots 6} - 1$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6$$

Vậy $13^n - 1$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 5: Chứng minh rằng: $16^n - 1$ chia hết cho 15 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $A_n = 16^n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 16^1 - 1 = 15 \vdots 15$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 16^k - 1 \vdots 15$

* Với $n = k + 1$, xét $A_{k+1} = 16^{k+1} - 1 = 16^k \cdot 16 - 1$

$$= 16^k \cdot (15 + 1) - 1 = \underbrace{16^k}_{\vdots 15} \cdot \underbrace{15}_{\vdots 15} + \underbrace{16^k}_{\vdots 15} - 1$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 15$$

Vậy $16^n - 1$ chia hết cho 15 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 6: Chứng minh rằng: $2^{2n+1} + 1$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $B_n = 2^{2n+1} + 1$

* Với $n = 1$, ta có $B_1 = 2^2 + 1 = 3 \vdots 3$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $B_k = 2^{2k+1} + 1 \vdots 3$

* Với $n = k + 1$, xét $B_{k+1} = 2^{2(k+1)+1} + 1 = 2^{2k+3} + 1$

$$= 2^{2n+1} \cdot 2^2 + 1 = 2^{2n+1} \cdot (3 + 1) + 1$$

$$= \underbrace{2}_{\vdots 3} \cdot \underbrace{2^{2k+1}}_{\vdots 3} + \underbrace{2^{2k+1}}_{\vdots 3} + 1$$

$$\Rightarrow B_{k+1} \vdots 3$$

Vậy $2^{2n+1} + 1$ chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 7: Chứng minh rằng: $6^{2n} - 1$ chia hết cho 35 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Giải:

Đặt $B_n = 6^{2n} - 1$

* Với $n=1$, ta có $B_1 = 6^2 - 1 = 35 \vdots 35$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 1$, suy ra $B_k = 6^{2k} - 1 \vdots 35$

* Với $n=k+1$, xét $B_{k+1} = 6^{2(k+1)} - 1 = 6^{2k} \cdot 6^2 - 1$

$$= 6^{2k} \cdot (35+1) - 1 \underset{\vdots 35}{=} \underset{\vdots 35}{6^{2k}} \underset{\vdots 35}{35} + \underset{\vdots 35}{6^{2k}} - 1$$

$$\Rightarrow B_{k+1} \vdots 35$$

Vậy $6^{2n} - 1$ chia hết cho 35 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 8: Chứng minh rằng: $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $C_n = 4^n + 15n - 1$

* Với $n=1$, ta có $C_1 = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 \vdots 9$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 1$, suy ra $C_k = 4^k + 15k - 1 \vdots 9$

* Với $n=k+1$, xét $C_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$

$$= 4 \cdot 4^k + 15k + 14$$

$$= 4 \cdot (4^k + 15k - 1) - 45k + 18$$

$$= 4 \cdot \underset{\vdots 9}{(4^k + 15k - 1)} + \underset{\vdots 9}{9(2 - 5k)}$$

$$\Rightarrow C_{k+1} \vdots 9$$

Vậy $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 9: Chứng minh rằng: $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $D_n = 4^n + 6n + 8$

* Với $n=1$, ta có $D_1 = 4^1 + 6 \cdot 1 + 8 = 18 \vdots 9$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 1$, suy ra $D_k = 4^k + 6k + 8 \vdots 9$

* Với $n=k+1$, xét $D_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) + 8$

$$= 4 \cdot 4^k + 6k + 14$$

$$= 4 \cdot (4^k + 6k + 8) - 18k + 18$$

$$= 4 \cdot \underbrace{(4^k + 6k + 8)}_{\vdots 9} + 18 \underbrace{(1 - k)}_{\vdots 9}$$

$$\Rightarrow D_{k+1} \vdots 9$$

Vậy $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 10: Chứng minh rằng: $7^n + 3n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Giải:

Đặt $E_n = 7^n + 3n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $E_1 = 7^1 + 3 \cdot 1 - 1 = 9 \vdots 9$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $E_k = 7^k + 3k - 1 \vdots 9$

* Với $n = k + 1$, Xét $E_{k+1} = 7^{k+1} + 3(k+1) - 1$

$$= 7 \cdot 7^k + 21k - 7 - 18k + 9$$

$$= 7 \cdot \underbrace{(7^k + 3k - 1)}_{\vdots 9} - 9 \underbrace{(2k - 1)}_{\vdots 9}$$

$$\Rightarrow E_{k+1} \vdots 9$$

Vậy $7^n + 3n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 11: Chứng minh rằng: $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $E_n = 4^n + 15n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $E_1 = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18 \vdots 9$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $E_k = 4^k + 15k - 1 \vdots 9$

* Với $n = k + 1$, xét $E_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$

$$= 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1$$

$$= 3 \cdot 4^k + 15 + 4^k + 15k - 1$$

$$= 3 \cdot (4^k + 5) + E_k$$

Mà $(4^k + 5) \vdots 3 \Rightarrow 3 \cdot (4^k + 5) \vdots 9$

$$\Rightarrow E_{k+1} \vdots 9$$

Vậy $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 12: Chứng minh rằng: $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

Đặt $F_n = 16^n - 15n - 1$

* Với $n = 1$, ta có $F_1 = 16^1 - 15 \cdot 1 - 1 = 0 \vdots 225$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $F_k = 16^k - 15k - 1 \vdots 225$

* Với $n = k + 1$, xét $F_{k+1} = 16^{k+1} - 15(k+1) - 1$

$$\begin{aligned} &= 16 \cdot 16^k - 15k - 16 \\ &= 16^k - 15k - 1 - 15(16^k - 1) \\ &= F_k - 15(16^k - 1) \end{aligned}$$

Ta có : $16^k - 1 \vdots 15 \Rightarrow 15(16^k - 1) \vdots 225$

$$\Rightarrow F_{k+1} \vdots 225$$

Vậy $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 13: Chứng minh rằng $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải:

* Với $n = 0$, ta có $B_0 = 3^1 + 2^2 = 7 \vdots 7$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 0$, suy ra $B_k = 3^{2k+1} + 2^{k+2} \vdots 7$

* Với $n = k + 1$, xét $B_{k+1} = 3^{2(k+1)+1} + 2^{k+1+2}$

$$\begin{aligned} &= 3^2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2} \\ &= 9(3^{2k+1} + 2^{k+2}) - 7 \cdot 2^{k+2} \\ &= 9 \cdot \underbrace{B_k}_{\vdots 7} + 7 \cdot \underbrace{2^{k+2}}_{\vdots 7} \end{aligned}$$

Vậy $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 14: Chứng minh rằng $B_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có $B_1 = 11^2 + 12^1 = 133 \vdots 133$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $B_k = 11^{k+1} + 12^{2k-1} \vdots 133$

* Với $n = k + 1$, xét $B_{k+1} = 11^{k+1+2} + 12^{2(k+1)+1}$

$$\begin{aligned} &= 11 \cdot 11^{k+1} + 12^{2k-1} \cdot 12^2 \\ &= 11 \cdot 11^{k+1} + 12^{2k+1} (11 + 133) \end{aligned}$$

$$= 11 \cdot \underbrace{B_k}_{\vdots 133} + \underbrace{133}_{\vdots 133} \cdot \underbrace{12^{2k-1}}_{\vdots 133}$$

$$\Rightarrow B_{k+1} \vdots 133$$

Vậy $B_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

Bài 15: Chứng minh rằng: $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36$ chia hết cho 32 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải:

Đặt $G_n = 4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36$

* Với $n=0$, ta có $G_0 = 4 \cdot 3^2 + 32 \cdot 0 - 36 = 0 \vdots 32$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 0$, suy ra $G_k = 4 \cdot 3^{2k+2} + 32k - 36 \vdots 32$

$$\begin{aligned} \text{* Với } n=k+1, \text{ xét } G_{k+1} &= 4 \cdot 3^{2(k+1)+2} + 32(k+1) - 36 \\ &= 9 \cdot 4 \cdot 3^{2k+2} + 32k - 4 \\ &= 9(4 \cdot 3^{2k+2} + 32k - 36) - 32(8k - 32) \\ &= 9 \underbrace{G_k}_{\vdots 32} - 32 \underbrace{(8k - 32)}_{\vdots 32} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_{k+1} \vdots 32$$

Vậy $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36$ chia hết cho 32 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 16: Chứng minh rằng: $3^{3n+3} - 26n - 27$ chia hết cho 169 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải:

Đặt $G_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$

* Với $n=0$, ta có $G_0 = 3^3 - 26 \cdot 0 - 27 = 0 \vdots 169$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 0$, suy ra $G_k = 3^{3k+3} - 26k - 27 \vdots 169$

$$\begin{aligned} \text{* Với } n=k+1, \text{ xét } G_{k+1} &= 3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27 \\ &= 27 \cdot 3^{3k+3} - 26k - 26 - 27 \\ &= 27(3^{3k+3} - 26k - 27) + 26 \cdot 26k + 676 \\ &= 27 \underbrace{G_k}_{\vdots 169} + 169 \underbrace{(4k+4)}_{\vdots 169} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_{k+1} \vdots 169$$

Vậy $3^{3n+3} - 26n - 27$ chia hết cho 169 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 17: Chứng minh rằng: $3^{2n+3} + 5$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}$

Giải: Ta sử dụng phương pháp 2

Đặt $G_n = 3^{2n+3} + 5$

* Với $n=0$, ta có $G_0 = 3^3 + 5 = 32 \div 8$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 0$, suy ra $G_k = 3^{2k+3} + 5 \div 8$

* Xét $G_{k+1} - G_k = 3^{2(k+1)+3} + 5 - (3^{2n+3} + 5)$

$$= 3^{2k+5} - 3^{2k+3}$$
$$= 9 \cdot 3^{2k+3} - 3^{2k+3}$$
$$= 3^{2k+3}(9 - 1) = 3^{2k+3} \cdot 8 \div 8$$

Vậy $3^{2n+3} + 5$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 18: Chứng minh rằng: $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải: Ta sử dụng phương pháp 2

Đặt $G_n = 10^n + 18n - 1$

* Với $n=0$, ta có $G_0 = 1 + 18 \cdot 0 - 1 = 0 \div 27$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 0$, suy ra $G_k = 10^k + 18k - 1 \div 27$

* Xét $G_{k+1} - G_k = 10^{k+1} + 18(k+1) - 1 - (10^k + 18k - 1)$

$$= 10^k(9 + 1) + 18$$
$$= 9 \cdot (10^k + 2)$$

Đặt $H_k = 10^k + 2$

Ta có $H_0 = 10^0 + 2 = 3 \div 3$ và $H_{k-1} - H_k = 9 \cdot 10^k \div 3$

Nên: $G_{k+1} - G_k = 9 \cdot (10^k + 2) \div 27$

Vậy $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 19: Chứng minh rằng: $3^{2n+3} + 40n - 27$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Giải: Ta sử dụng phương pháp 2

Đặt $G_n = 3^{2n+3} + 40n - 27$

* Với $n=0$, ta có $G_0 = 3^3 + 40 \cdot 0 - 27 = 0 \div 64$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 0$, suy ra $G_k = 3^{2k+3} + 40k - 27 \div 64$

$$\begin{aligned}
 * \text{ Xét } G_{k+1} - G_k &= 3^{2(k+1)+3} + 40(k+1) - 27 - (3^{2k+3} + 40k - 27) \\
 &= 3^{2k+5} - 3^{2k+3} + 40 \\
 &= 8 \cdot 3^{2k+3} + 40 \\
 &= 8 \cdot (3^{2k+3} + 5)
 \end{aligned}$$

Mà $3^{2k+3} + 5$ chia hết cho 8 với mọi $n \in \mathbb{N}$ (bài 17)

$$G_{k+1} - G_k = 8 \cdot (3^{2k+3} + 5) \vdots 64$$

Nên:

Vậy $3^{2n+3} + 40n - 27$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 20: Chứng minh rằng: $3^{2n+1} + 40n - 67$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Giải: Ta sử dụng phương pháp 2

$$\text{Đặt } G_n = 3^{2n+1} + 40n - 67$$

$$* \text{ Với } n=1, \text{ ta có } G_1 = 3^3 + 40 \cdot 1 - 67 = 0 \vdots 64$$

$$* \text{ Giả sử mệnh đề đúng với } n=k \geq 1, \text{ suy ra } G_k = 3^{2k+1} + 40k - 67 \vdots 64$$

$$\begin{aligned}
 * \text{ Xét } G_{k+1} - G_k &= 3^{2(k+1)+1} + 40(k+1) - 67 - (3^{2k+1} + 40k - 67) \\
 &= 3^{2k+3} - 3^{2k+1} + 40 \\
 &= 8 \cdot 3^{2k+1} + 40 \\
 &= 8 \cdot (3^{2k+1} + 5)
 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } H_k = 3^{2k+1} + 5$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } H_1 &= 3^3 + 5 = 32 \vdots 8 \quad \text{và} \quad H_{k-1} - H_k = 3^{2(k+1)+1} + 5 - (3^{2k+1} + 5) \\
 &= 3^{2k+3} - 3^{2k+1} = 8 \cdot 3^{2k+1} \vdots 8
 \end{aligned}$$

$$G_{k+1} - G_k = 8 \cdot (3^{2k+1} + 5) \vdots 64$$

Nên:

Vậy $3^{2n+3} + 40n - 27$ chia hết cho 64 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dạng 2: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh một biểu thức (với n là cơ số) chia hết cho một số.

I. Phương pháp giải:

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n=1$

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n=k \geq 1$ (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$

Ta dùng một số Hằng đẳng thức sau:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Giải:

Đặt $A_n = n^3 - n$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 1^3 - 1 = 0 \vdots 3$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = k^3 - k \vdots 3$

* Với $n = k + 1$, xét

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (k+1)^3 - (k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= \underbrace{(k^3 - k)}_{\vdots 3} + 3(\underbrace{k^2 + k}_{\vdots 3}) \\ &\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6 \end{aligned}$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Bài 2: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Giải:

Đặt $A_n = n^3 + 11n$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 1^3 + 11 \cdot 1 = 12 \vdots 6$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = k^3 + 11k \vdots 6$

* Với $n = k + 1$, xét

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= (k+1)^3 + 11(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 \\ &= (k^3 + 11k) + 3(k^2 + k + 4) \\ &= \underbrace{(k^3 + 11k)}_{\vdots 6} + 3(\underbrace{(k^2 + k + 4)}_{\vdots 2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Bài 3: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

Giải:

Đặt $A_n = n^3 + 3n^2 + 5n$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9 \vdots 3$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = k^3 + 3k^2 + 5k \vdots 3$

$$\begin{aligned} \text{* Với } n = k + 1, \text{ xét } A_{k+1} &= (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 \\ &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3k^2 + 9k + 9 \\ &= \underbrace{A_k}_{\vdots 3} + \underbrace{3(k^2 + 3k + 3)}_{\vdots 3} \\ &\Rightarrow A_{k+1} \vdots 3 \end{aligned}$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

Bài 4: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

Giải:

Đặt $A_n = 2n^3 - 3n^2 + n$

* Với $n = 1$, ta có $A_1 = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 0 \vdots 6$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $A_k = 2k^3 - 3k^2 + k \vdots 6$

$$\begin{aligned} \text{* Với } n = k + 1, \text{ xét } A_{k+1} &= 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1) \\ &= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 - 3k^2 - 6k - 3 + k + 1 \\ &= 2k^3 - 3k^2 + k + 6k^2 \\ &= \underbrace{A_k}_{\vdots 6} + \underbrace{6k^2}_{\vdots 6} \\ &\Rightarrow A_{k+1} \vdots 6 \end{aligned}$$

Vậy với $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

Bài 5 : Chứng minh rằng với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$ thì $S_n = (n+1)(n+2) \dots (n+n)$ chia hết cho 2^n .

Giải:

* Với $n = 1$, ta có $S_1 = 1 + 1 = 2 \vdots 2^1 = 2$

* Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, suy ra $S_k = (k+1)(k+2)\dots(k+k) \vdots 2^k$

* Với $n = k+1$, xét $S_{k+1} = (k+2)(k+3)\dots[(k+1)+(k+1)]$
$$= 2(k+1)(k+2)\dots(k+k)$$
$$= 2.S_k$$

Mà $S_k \vdots 2^k \Rightarrow 2.S_k \vdots 2^{k+1}$

$\Rightarrow S_{k+1} \vdots 2^{k+1}$

Vậy với mọi số $n \in \mathbb{N}^*$ thì $S_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$ chia hết cho 2^n .

Dạng 3: Dùng phương pháp quy nạp để chứng minh đẳng thức.

I. Phương pháp giải:

Để chứng minh một mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta thực hiện các bước sau:

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$ (giả thiết quy nạp)

Bước 3: Cần chứng minh mệnh đề đúng với $n = k+1$ có nghĩa là khi $n = k+1$ ta chứng minh vế trái bằng vế phải.

II. Bài toán:

Bài 1: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$.

Giải:

* Với $n = 1$, ta có vế trái chỉ có một số hạng là 1, vế phải bằng $1^1 = 1$

Vậy hệ thức đúng với $n = 1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$

Tức là: $S_k = 1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n = k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$1+3+5+\dots+(2k+1) + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1} = S_k + [2(k+1)-1]$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 2: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $2+5+8+\dots+3n-1 = \frac{n(3n+1)}{2}$.

Giải:

* Với $n=1$, ta có vế trái chỉ có một số hạng là 2, vế phải bằng $\frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2} = 2$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$

$$S_k = 2 + 5 + 8 + \dots + 3k - 1 = \frac{k(3k+1)}{2}$$

Tức là:

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3k-1) + [3(k+1)-1] = \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2}$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + 3k + 2 \\ &= \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 \\ &= \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2} \\ &= \frac{3(k^2 + 2k + 1) + k + 1}{2} \\ &= \frac{(k+1)[3(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 3: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Giải:

* Với $n=1$, ta có vế trái chỉ có một số hạng là 1, vế phải bằng $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Tức là:

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có: $S_{k+1} = S_k + k + 1$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 4: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Giải:

* Với $n=1$, ta có vế trái bằng $1.2 = 2$, vế phải bằng $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$

$$S_k = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Tức là:

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 5: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1)$.

Giải:

* Với $n=1$, ta có vế trái bằng $1.2 = 2$, vế phải bằng $1^2(1+1) = 2$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$

$$S_k = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + k(3k-1) = k^2(k+1)$$

Tức là:

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + k(3k-1) + (k+1)(3k+2) = (k+1)^2(k+2)$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k + (k+1)(3k+2) \\
 &= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) \\
 &= (k+1)(k^2 + 3k + 2) \\
 &= (k+1)(k+2)(k+3)
 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 6: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

Giải:

* Với $n=1$, ta có vế trái bằng $1.4=4$, vế phải bằng $1(1+1)^2=4$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$

Tức là: $S_k = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + k(3k+1) = k(k+1)^2$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = 1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + k(3k+1) + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k+2)^2$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k + (k+1)(3k+4) \\
 &= k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4) \\
 &= (k+1)[k(k+1) + 3k+4] \\
 &= (k+1)(k^2 + 4k + 4) \\
 &= (k+1)(k+2)^2
 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 7: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

Giải:

* Với $n=1$, ta có vế trái bằng $\frac{1}{2}$, vế phải bằng $\frac{2^1 - 1}{2^1} = \frac{1}{2}$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$

Tức là: $S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k}$

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2^{k+1}}$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} &= \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2(2^k - 1)}{2 \cdot 2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 8: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Giải:

* Với $n=1$, ta có vế trái bằng $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$, vế phải bằng $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$

$$S_k = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Tức là:

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 9: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

Giải:

* Với $n=1$, ta có vế trái bằng $\frac{1}{1.4} = \frac{1}{4}$, vế phải bằng $\frac{1}{3.1+1} = \frac{1}{4}$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$

$$S_k = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$$

Tức là:

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

Thật vậy, ta có:

$$= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Bài 10: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ ta có:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Giải:

* Với $n=2$, ta có vế trái bằng $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, vế phải bằng $\frac{2+1}{2.2} = \frac{3}{4}$

Vậy hệ thức đúng với $n=2$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 2$

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

Tức là:

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$S_{k+1} = S_k \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

Thật vậy, ta có:

$$= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$= \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 11: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Giải:

* Với $n=1$, ta có vế trái bằng $1^1=1$, vế phải bằng $\frac{1.2.3}{6}=1$

Vậy hệ thức đúng với $n=1$

* Đặt vế trái bằng S_n , giả sử đẳng thức đúng với $n=k \geq 1$

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Tức là:

Ta phải chứng minh đẳng thức trên cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Thật vậy, ta có: $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Vậy đẳng thức trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>