|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GD&ĐT NGHỆ AN**  **TRƯỜNG THPT NGUYỄN XUÂN ÔN** | **ĐỀ KSCL HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 12**  **NĂM HỌC 2022 – 2023**  Môn thi: **TOÁN – BẢNG A**  Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)* |

**Câu 1 (7,0 điểm).**

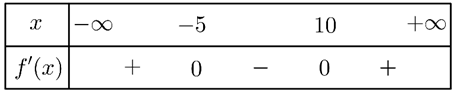
1. Cho hàm số  có đạo hàm  với mọi .

Hàm số  có mấy điểm cực trị?

1. Giải hệ phương trình 

**Câu 2 (4,0 điểm).**

1. Cho hàm số  có bảng xét dấu của hàm số  như sau

****

Có bao nhiêu số nguyên  để hàm số  đồng biến trên khoảng ?

1. Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh , mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh  và  nhận được phần thưởng giống nhau.

**Câu 3 (1,5 điểm).** Cho ba số thực dương  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

**Câu 4 (6,0 điểm).** Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông tại , góc , , , khoảng cách từ  đến  bằng .

**a)** Tính thể tích khối chóp .

**b)** Gọi  lần lượt là trung điểm của ;  là mặt phẳng chứa  và song song với . Gọi góc giữa  và  là . Tính .

**Câu 5 (1,5 điểm).** Cho tứ diện *ABCD* với điểm *M* bên trong tứ diện. Các tia *AM, BM, CM, DM* cắt các mặt đối diện theo thứ tự tại . Chứng minh rằng .

*……………***Hết***……………*

*Họ và tên thí sinh………………………………… Số báo danh……………………*

***Chú ý:* *Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **ĐÁP ÁN THAM KHẢO** | **Điểm** |
| **1a)**  (3.5) | Cho hàm số  có đạo hàm  với mọi . Hàm số  có tối đa mấy điểm cực trị? |  |
|  | Ta có . | 0,25 |
|  | ( Trong đó là nghiệm kép) | 0,5 |
|  | Xét hàm số . Ta có . | 0,5 |
|  |  | 0,5 |
|  |  | 0,75 |
|  | (Trong đó là nghiệm kép) | 0,5 |
|  | Lập BBT ta thấy dấu  đổi qua 5 nghiệm đơn, không đổi dấu qua hai nghiệm kép.  Vậy hàm số  có  điểm cực trị. | 0,5 |
| **1b)**  (3.5) | ***Giải hệ phương trình*** |  |
|  | Xét hệ  Từ (1) ta có | 0,25 |
|  |  | 0,25 |
|  |  | 0,5 |
|  | Với thay vào (2) ta có | 0,25 |
|  |  | 0,25 |
|  | . Trường hợp này hệ có ba nghiệm: | 0,25 |
|  | Với , ta có: | 0,25 |
|  | Từ (2) ta có  Xét hàm số  có: và . | 0,25 |
|  | Do đó  (\*) | 0,25 |
|  | Tương tự, xét hàm số  ta được  (\*\*), trong đó | 0, 5 |
|  | Vậy từ (\*) và (\*\*) suy ra . | 0,25 |
|  | Do vậy: (3) . Thử lại thấy thỏa mãn hệ phương trình.  Trường hợp này hệ có một nghiệm .  Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: và. | 0,25 |
|  |
| **2a)**  (2.0) | Cho hàm số  có bảng xét dấu của hàm số  như sau    Có bao nhiêu số nguyên  để hàm số  đồng biến trên khoảng ? |  |
|  | Tập xác định .  Ta có .  . | 0,25 |
|  | Trường hợp 1: .  Ta có .  Đặt . | 0,25 |
|  | Bảng xét dấu của | 0,25 |
|  | Hàm số  đồng biến trên khoảng  khi và chỉ khi  Hay .  Kết hợp với điều kiện  không có giá trị nào của  thỏa mãn yêu cầu bài toán. | 0,25 |
|  | Trường hợp 2: .  Ta có , với  là nghiệm đơn hoặc nghiệm bội . | 0,25 |
|  | Ta có bảng xét dấu của | 0,25 |
|  | Hàm số  đồng biến trên khoảng  khi và chỉ khi  Hay . | 0,25 |
|  | Kết hợp với điều kiện .  Vậy có  số nguyên  thỏa mãn yêu cầu bài toán. | 0,25 |
| **2b)**  (2.0) | Người ta dùng 18 cuốn sách bao gồm 7 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý và 5 cuốn sách Hóa (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm phần thưởng cho 9 học sinh , mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác thể loại (không tính thứ tự các cuốn sách). Tính xác suất để hai học sinh  và  nhận được phần thưởng giống nhau. |  |
|  | Gọi  lần lượt là số học sinh được nhận các bộ giải thưởng (Toán-Lý); (Toán-Hóa) và (Lý-Hóa). | 0,25 |
|  | Ta có hệ phương trình: . | 0,25 |
|  |  | 0,25 |
|  | Số cách phát thưởng ngẫu nhiên cho 9 học sinh là:  Gọi *T* là biến cố “Hai học sinh *A* và *B* có phần thưởng giống nhau”. | 0,25 |
|  | Nếu *A* và *B* có phần thưởng là sách (Toán- Lý) thì có  cách phát. | 0,25 |
|  | Nếu *A* và *B* có phần thưởng là sách (Toán- Hóa) thì có cách phát. | 0,25 |
|  | Nếu *A* và *B* có phần thưởng là sách (Lý- Hóa) thì có cách phát. | 0,25 |
|  | Vậy xác suất cần tìm là: | 0,25 |
| **3**  (1.5) | Cho ba số thực dương  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức |  |
|  | Do và    +) Ta có: | 0,5 |
|  | +) Lại có:và | 0,25 |
|  | +) Mặt khác:    +) Đặt , với mọi | 0,5 |
|  | Có  nghịch biến và liên tục trên đoạn | 0,25 |
|  | . | 0,25 |
|  | Vậy  khi . | 0,25 |
| **4a)**  (3.5) | Cho hình chóp  có đáy  là tam giác vuông tại , góc , , , khoảng cách từ  đến  bằng .  **a)** Tính thể tích khối chóp .  **b)** Gọi  lần lượt là trung điểm của ;  là mặt phẳng chứa  và song song với . Gọi góc giữa  và  là . Tính . |  |
|  |  |  |
|  | **a)** Tính thể tích khối chóp .  Gọi  là hình chiếu của  trên . Ta có:  ⬩. | 0,5 |
|  | ⬩ .  là hình chữ nhật. | 0,5 |
|  | Kẻ đường cao  của tam giác . Ta có  . | 0,5 |
|  |  | 0,5 |
| Trong  vuông tại , ta có: . | 0,5 |
| Vậy: . | 1,0 |
| **4b.**  (2.5) | Gọi  là giao điểm của  và , với  đi qua  và song song , .  Gọi  là trung điểm của .    , mà . | 0,5 |
|  | Ta có:  .  Do  là trọng tâm nên . | 0,25 |
|  | Vậy | 0,25 |
|  | Ta có: . | 0,5 |
|  |  | 0,5 |
|  | . | 0,25 |
|  | Vậy . | 0,25 |
| **5**  (1.5) | Cho tứ diện *ABCD* với điểm *M* bên trong tứ diện. Các tia *AM, BM, CM, DM* cắt các mặt đối diện theo thứ tự tại . Chứng minh rằng . |  |
|  | + Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, M lên mp(BCD). Gọi  lần lượt là thể tích các khối tứ diện ABCD, MBCD, MACD, MADB, MABC.  + Ta có | 0,5 |
|  | + Tương tự: ; ; | 0, 5 |
|  | Vậy | 0,25 |
|  |  | 0,25 |

*……………***Hết***……………*

***Ghi chú***: *Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.*