SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH HÀ NỘI	KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024 MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi có một trang)

Bài 1 (5,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - x + 8 = 4\sqrt{x+3}$.

b) Chứng minh rằng biểu thức $K = \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ có giá trị là số nguyên, trong đó a, b, c là ba số thực đôi một phân biệt.

Bài 2 (5.0 điểm)

a) Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn a+b+c và ab-bc-ca cùng chia hết cho 3. Chứng minh rằng ab-bc-ca chia hết cho 9.

b) Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax + b$ có một nghiệm là $1+\sqrt{3}$ (a, b là các số hữu tỉ). Chứng minh rằng đa thức P(x) chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 2$.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thay đổi thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$.

Bài 4 (6,0 điểm). Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác nhọn ABC (AB<AC). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA lần lượt tại các điểm D, E. Qua điểm B, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BI, cắt đường thẳng AI tại điểm J. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm J trên đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng BD=CP.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng Ạ và BC. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AI} + \dfrac{1}{AJ} = \dfrac{2}{AN}$

c) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng JP và DE. Gọi K là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường thẳng BK vuông góc với đường thẳng AP.

Bài 5 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $3^x + 2^y = 1 + 2^z$.

b) Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể được đặt trên cạnh hoặc đặt nằm trong hình chữ nhật).

i) Chứng minh rằng mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá $\dfrac{1}{2}$.

ii) Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi n là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm nằm trong năm điểm đó và có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1 (5,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - x + 8 = 4\sqrt{x+3}$.

b) Chứng minh rằng biểu thức $K = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ có giá trị là số nguyên, trong đó a, b, c là ba số thực đôi một phân biệt.

Lời giải. a) Điều kiện: $x \geq -3$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4\right) = 0$$

hay
$$(x-1)^2 + \left(\sqrt{x+3} - 2\right)^2 = 0. \quad (1)$$

Vì $(x-1)^2 \geq 0$ và $\left(\sqrt{x+3} - 2\right)^2 \geq 0$ nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $(x-1)^2 = \left(\sqrt{x+3} - 2\right)^2 = 0$ tức là x=1 (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x=1.

b) Ta có

$$K = \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{a^2(b-c) + b^2(c-b+b-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)(b-c) - (b^2-c^2)(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = \frac{(a-b)(b-c)(a+b-b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1.$$

Do đó, biểu thức K luôn nhận giá trị nguyên là 1.

Bài 2 (5.0 điểm)

a) Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn a+b+c và ab-bc-ca cùng chia hết cho 3. Chứng minh rằng ab-bc-ca chia hết cho 9.

b) Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax + b$ có một nghiệm là $1 + \sqrt{3}$ (a, b là các số hữu tỉ). Chứng minh rằng đa thức P(x) chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 2$.

Lời giải. a) Từ giả thiết ta có $(a+b)(a+b+c)(ab-bc-ca)$ chia hết cho 3, hay $a^2 + b^2 + 3ab$ chia hết cho 3. Từ đó suy ra $a^2 + b^2$ cũng chia hết cho 3.

Với mọi số nguyên x, ta có x chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Suy ra a^2 và b^2 khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1. Như vậy, để $a^2 + b^2$ chia hết cho 3, ta phải có a^2 và b^2 cùng chia hết cho 3, tức a và b cùng chia hết cho 3. Mặt khác, do a+b+c chia hết cho 3 nên c cũng phải chia hết cho 3. Từ đây, dễ thấy ab-bc-ca chia hết cho 9. Ta có điều phải chứng minh.

b) Từ giải thiết, ta có $P(1+\sqrt{3}) = 0$, hay

$$(a+6)\sqrt{3}=-(a+b+10).$$

Nếu $a+6\neq 0$, ta có $\sqrt{3}=-\dfrac{a+b+10}{a+6}$ là một số hữu tỉ, mâu thuẫn vì $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ. Do đó a=-6. Từ đó suy ra $a+b+10=0$, tức b=-4. Vậy

$$P(x)=x^3-6x-4=(x^2-2x-2)(x+2)$$

Rõ ràng P(x) chia hết cho $x^2-2x-2.$

Bài 3 (2,0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thay đổi thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.

Lời giải. Giá trị lớn nhất của biểu thức Q. Với mọi số thực x, y và z, ta có

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0.$$

Từ đó suy ra $2(xy+yz+zx)\leq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)$, hay

$$(x+y+z)^2\leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right).$$

Sử dụng kết quả này, ta được

$$Q^4=\left[\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)\right]^2\leq\left[3(a+b+b+c+c+a)\right]^2.$$

$$=36(a+b+c)^2\leq 36.3\left(a^2+b^2+c^2\right)=108.$$

Suy ra $Q\leq\sqrt[4]{108}$. Mặt khác, dễ thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$ Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức Q là $\sqrt[4]{108}.$

- Giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q. Từ giả thiết, ta có $a^2,\ b^2,\ c^2\leq 1.$ Suy ra $0\leq a,b,c\leq 1.$ Từ đây, ta có $a\geq a^2;\ b\geq b^2.$ Từ đó $a+b\geq a^2+b^2.$ mà $0\leq a^2+b^2=1-c^2\leq 1$ nên $a^2+b^2\geq\left(a^2+b^2\right)^2.$

Tóm lại, ta có $\sqrt{a+b}\geq\sqrt{a^2+b^2}\geq\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}=a^2+b^2.$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{b+c}\geq b^2+c^2,\ \sqrt{c+a}\geq c^2+a^2.$$

Từ các kết quả trên, ta suy ra

$$Q\geq a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2=2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi a=1 và b=c=0. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 2.

Bình luận. Để chứng minh $Q\geq 2$, ta còn có hai cách tiếp cận khác như sau

Cách 1. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\geq 2\sqrt[4]{(a+b)(a+c)}=2\sqrt[4]{a^2+ab+ac+bc}$$

$$\geq\sqrt[4]{a^2+b^2+c^2+bc}=2\sqrt[4]{1+bc}\geq 2.$$

Lại có $\sqrt{b+c} \geq 0$ nên $Q \geq 2.$

Cách 2. Tương từ như trong lời giải đã trình bày ở trên, ta có $0 \leq a,b,c \leq 1$ nên $a \geq a^2, b \geq b^2$ và $c \geq c^2$. Từ đây, với chú ý

$(a+b)(a+c) \geq a^2$, $(b+c)(b+a) \geq b^2, (c+a)(a+b) \geq c^2$, ta có

$$Q^2 = \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right)^2 =$$

$$2(a+b+c) + 2\left[\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(b+c)(b+a)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}\right]$$

$$\geq 2(a+b+c) + 2(a+b+c) = 4(a+b+c) \geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right) = 4$$

Suy ra $Q \geq 2.$

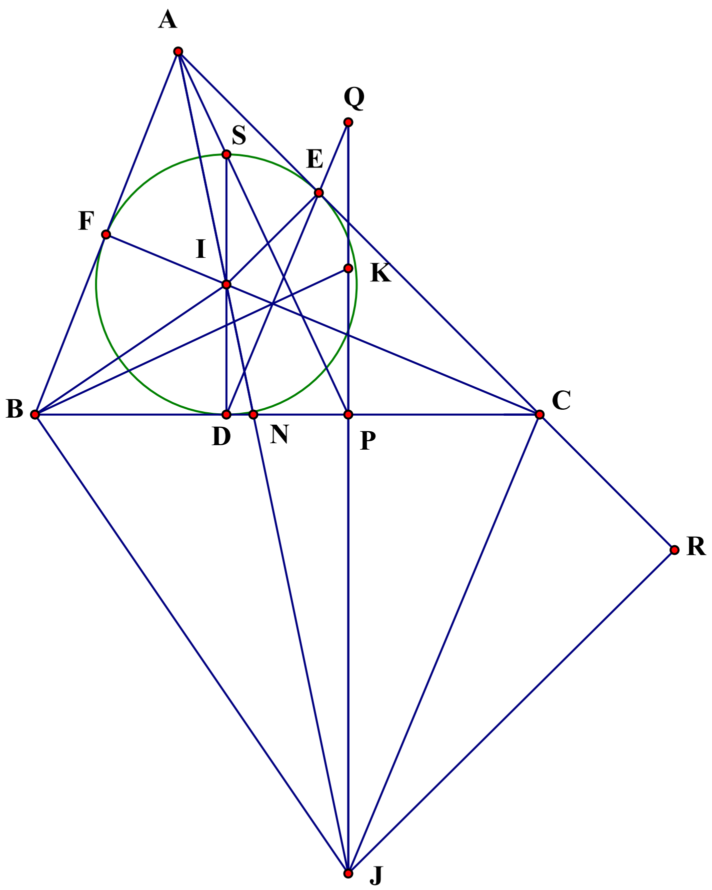
Bài 4 (6,0 điểm). Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác nhọn ABC (AB<AC). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA lần lượt tại các điểm D, E. Qua điểm B, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BI, cắt đường thẳng AI tại điểm J. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm J trên đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng BD=CP.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AJ và BC. Chứng minh rằng $\frac{1}{AI} + \frac{1}{AJ} = \frac{2}{AN}$

c) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng JP và DE. Gọi K là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường thẳng BK vuông góc với đường thẳng AP.

Lời giải.



a) Có J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC.

$$\Rightarrow CP = BD = \frac{BA + BC - AC}{2}$$

Hoặc lấy trung điểm M của IJ, khi đó MB=MC, MD=MP nên BD=CP.

b) Tính chất của hàng điểm điều hòa (kiến thức lớp 10)

Có: BI, BJ là phân giác trong,ngoài của tam giác ABN $\Rightarrow \frac{IA}{IN} = \frac{JA}{JN}$ cách biến đổi đại số: đặt $k = \frac{IA}{IN} = \frac{JA}{JN}, AN = a$ từ đó tính được AI, AJ theo a, k. Thay vào ta có điều phải chứng minh. Cách khác:

$$\frac{IN}{IA} = \frac{JN}{JA} \Rightarrow \frac{AN}{AJ} - 1 = 1 - \frac{AN}{AJ} \Rightarrow \frac{AN}{AI} + \frac{AN}{AJ} = 2 \Rightarrow \frac{1}{AN} + \frac{1}{AJ} = \frac{2}{AN}$$

c) Bài quen thuộc. Gọi DI cắt AP tại S. Kẻ $JR \perp AC$, có $\frac{IS}{JP} = \frac{AI}{AJ} = \frac{IE}{JR} \Rightarrow IS = ID$.

Do

$$IC \perp DE,\ PQ \perp DC \Rightarrow \Delta IDC \sim \Delta DPQ\ (g.g) \Rightarrow \frac{DI}{DC} = \frac{PD}{PQ} \Rightarrow \frac{DS}{BP} = \frac{DP}{PK}$$

$$\Rightarrow \Delta DSP \sim \Delta PBK\ (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{DSP} = \widehat{PBK} \Rightarrow BK \perp AP.$$

Bài 5 (2,0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $3^x + 2^y = 1 + 2^z$.

b) Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể được đặt trên cạnh hoặc đặt nằm trong hình chữ nhật).

i) Chứng minh rằng mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá $\frac{1}{2}$.

ii) Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi n là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm nằm trong năm điểm đó và có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

Lời giải. a) Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: y=1. Trong trường hợp này, ta có

$$2^z - 1 = 3^x$$

Suy ra $2^z \equiv 1 (\bmod\ 3)$. Nếu z là số lẻ, tức z=2k+1 với k là số tự nhiên, thì ta có $2^z = 2^{2k+1} = 2.4^k \equiv 2\ (\bmod\ 3)$, mâu thuẫn. Do đó z là số chẵn tức z=2k với k nguyên dương.

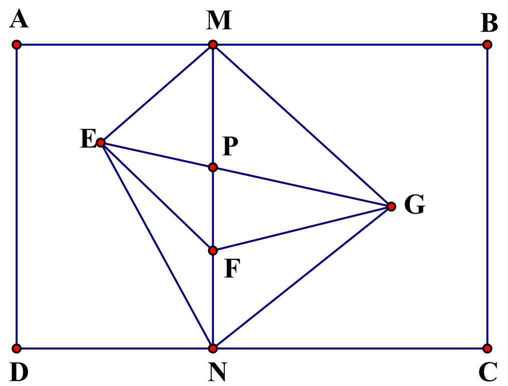
Khi đó, ta có

$$3^x = 2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1).$$

Suy ra $2^k - 1;\ 2^k + 1$ đều là lũy thừa của 2. Mà hai số này không cùng chia hết cho 3 (do $(2^k + 1) - (2^k - 1) = 2$ không chia hết co 3) nên trong hai số này phải có một số bằng 1. Lại có $2^k - 1 < 2^k + 1$ nên $2^k - 1 = 1$, tức k=1. Một cách tương ứng, ta tính được z=2 và x=1. Thử lại ta thấy thỏa mãn.
Trường hợp 2: $y \geq 2$. Vì $3^x > 1$ nên từ phương trình đã cho, ta có $2^z > 2^y$, tức z>y. Suy ra 2^y và 2^z cùng chia hết cho 4. Từ đó ta có $3^x \equiv 1 \pmod{4}$. Nếu x là số lẻ, tức x=2l+1 với l là số tự nhiên, thì $3^x = 3^{2l+1} = 3.9^l \equiv 3 \pmod{4}$, mâu thuẫn. Do đó x là số chẵn, tức x=2l với l là số nguyên dương.
- Giả sử $y \geq 4$. Khi đó, ta có $2^y,\ 2^z$ cùng chia hết cho 16 nên $3^x \equiv 1 \pmod{16}$. Nếu l là số lẻ, tức l=2t+1 với t là số tự nhiên, thì $3^x = 3^{4t+2} = 9.81^t \equiv 9 \pmod{16}$, mâu thuẫn. Do đó l là số chẵn, tức l=2t với t là số nguyên dương. Suy ra $3^x = 3^{4t} = 81^t \equiv 1 \pmod{5}$ Từ đó $2^z - 2^y \vdots 5$ hay là $2^{z-y} \equiv 1 \pmod{5}$.
- Nếu z-y là số lẻ, tức z-y=2u+1 với u là số tự nhiên, thì $2^{z-y} = 2.4^u \equiv \pm 2 \pmod{5}$, mâu thuẫn. Do đó z-y là số chẵn, tức z-y=2u với u là số nguyên dương. Khi đó, ta có $2^{z-y} = 2^y(4^u - 1) \vdots 3$. Lại có $3^x \vdots 3$ nên 1 chia hết cho 3, mâu thuẫn.
- Như vậy, ta phải có $y \leq 3$. Nếu y=2 thì ta có $3^x + 3 = 2^z$, suy ra $2^z \vdots 3$, mâu thuẫn. Do đó y=3. Khi đó $2^z - 3^{2l} = 7$.
Từ đây, ta có $2^z \equiv 1 \pmod{3}$. Chứng minh tương tự trường hợp 1, ta suy ra z là số chẵn, tức z=2m với m nguyên dương. Khi đó ta có

$$(2^m - 3^l)(2^m + 3^l) = 7$$

Vì $2^m - 3^l < 2^m + 3^l;\ 2^m + 3^l > 0$ nên $2^m - 3^l = 1;\ 2^m + 3^l = 7$. Từ đó m=2, l=1, hay ta có z=4 và x=2. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
Vậy có hai bộ số (x, y, z) thỏa mãn yêu cầu là (1; 1; 2) và (2; 3; 4)
b)
i) Trước hết, ta chứng minh kết quả sau: Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích S. Xét ba điểm E, F, G không thẳng hàng thuộc miền mặt phẳng giới hạn bởi hình chữ nhật ABCD. Khi đó $S_{EFG} \leq \frac{1}{2}S$.

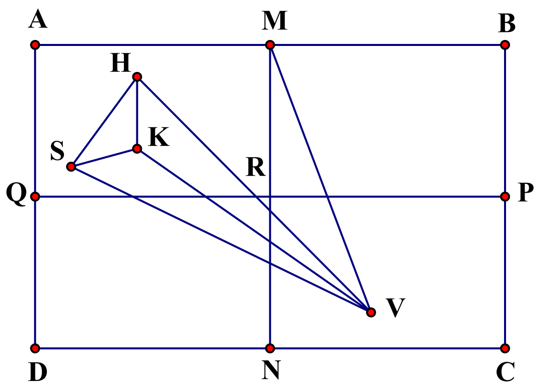


Qua ba điểm E, F, G kẻ các đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB. Trong các đường thẳng này, có một đường thẳng nằm giữa hoặc trùng với một trong hai đường thẳng kia. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là đường thẳng d qua điểm F. Khi đó, đường thẳng d sẽ cắt đoạn EG tại điểm P nào đó. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng d và hai đường thẳng AB, CD. Khi đó, ta có

$$S_{EFG} = S_{EPF} + S_{GPF} \le S_{EMN} + S_{GMN} = \frac{1}{2}.d(E, MN).MN \frac{1}{2}.d(G, MN).MN$$

$$\le \frac{1}{2}.d(A, MN).MN + \frac{1}{2}.d(B, MN).MN = \frac{1}{2}AB.MN = \frac{1}{2}S,$$

trong đó d(X,ZT) được ký hiệu là khoảng cách từ điểm X đến đường thẳng ZT.
Từ kết quả vừa chứng minh trên, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.
ii) Trước hết, ta sẽ chứng minh $n \ge 2$. Thật vậy, giả sử $n \le 1$. Gọi hình chữ nhật đã cho là hình chữ nhật ABCD. Chia hình chữ nhật ABCD thành bốn hình chữ nhật nhỏ bằng nhau AMRQ, BMRP, CPRN, DQRN như hình vẽ bên dưới.
Xét hai hình chữ nhật AMND và BMNC. Ta thấy mỗi điểm trong năm điểm đã cho sẽ thuộc một trong hai miền mặt phẳng giới hạn bởi hai hình chữ nhật này. Do đó, có ba điểm thuộc cùng một hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát, giả sử ba điểm đó là H, K, S và chúng cùng thuộc hình chữ nhật AMND.
Xét hai hình chữ nhật AMRQ và DQRN. Ta thấy mỗi điểm trong ba điểm H, K, S sẽ thuộc một trong hai miền mặt phẳng giới hạn bởi hai hình chữ nhật này. Do đó, có hai điểm thuộc cùng một hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát, giả sử hai điểm đó là H, K và chúng cùng thuộc hình chữ nhật AMRQ.



Áp dụng kết quả đã chứng minh ở phần i), ta có

$$S_{HKS} \le \frac{1}{2}S_{AMND} = \frac{1}{4}R$$

Gọi hai điểm còn lại trong năm điểm là V và W. Nếu có một điểm nào đó trong hai điểm này thuộc đa giác ABPRND, chẳng hạn là V thì bằng cách sử dụng kết quả đã chứng minh ở phần i), ta cũng có $S_{HKV} \le \frac{1}{4}.$ Suy ra $n \ge 2$, mâu thuẫn. Do đó, cả hai điểm V, W phải nằm trong hình chữ nhật CPRN.
Nếu S thuộc một trong hai hình chữ nhật DQRN hoặc BMRP thì bằng cách sử dụng kết quả đã chứng minh ở phận i), ta có $S_{SVW} \le \frac{1}{4}$, mâu thuẫn. Do đó S nằm trong hình chữ nhật AMRQ.

Gọi S_1 là diện tích của tứ giác (không nhất thiết lồi) tạo bởi các điểm H, K, S và V. Khi đó, rõ ràng

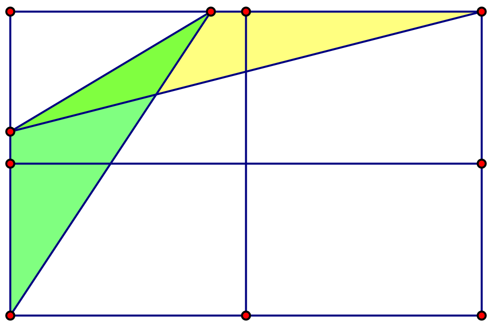
$$S_1 \le S_{VMAQ} + S_{VQR} + S_{VMR} \le \frac{1}{4} + S_{NQR} + S_{PMR} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, trong ba tia VH, VK, VS luôn có một tia nằm giữa hai tia còn lại, chẳng hạn là VK. Do đó

$$S_1 = S_{VKH} + S_{VKS} \ge 2m\{S_{VHKH}, S_{VKS}\}.$$

Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra $\min\{S_{VKH}, S_{VKS}\} \le \frac{1}{4}$. Từ đó, kết hợp với $S_{HKS} \le \frac{1}{4}$, ta có $n \ge 2$, mâu thuẫn. Vậy ta phải có $n \ge 2$.

Mặt khác, ta có n=2 được thỏa mãn trong trường hợp sau.



Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 2.

Bình luận. Bài 5a) là một sự tương tự hóa của bài số học trong đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2019: Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn

$$7^x + 2^y = 1 + 2^z.$$

Trường hợp đặc biệt của bài toán cũng đã được sử dụng để chọn đội tuyển Đại học Vinh tham dự kỳ thi học sinh giỏi cấp Quốc gia 2019: Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn

$$1 + 2^x = 3^y + 2.4^z.$$