

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu I: (3,0 điểm) Cho biểu thức

$$P = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} \text{ với } a > 0; a \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm điều kiện của a để biểu thức $Q = \frac{8}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Câu II: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - 3\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} = 0$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = 0 \\ \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y} + 2x^2 + x = 26 \end{cases}$$

Câu III: (2,0 điểm) Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(-2; 2)$, $B(4; 8)$ nằm trên (P) . Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m ($-2 < m < 4$). Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.

Câu IV: (2,0 điểm) Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x-2y)(x+2y)+4y=x+x^3.$$

Câu V: (7,0 điểm)

1. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi C là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA, CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai tương ứng là D, E . Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F ($0 < FA \leq FB$). Đường thẳng CF cắt AB tại M , cắt đường tròn (O) tại N (N không trùng với F) và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C).

a) Giả sử $\widehat{ACB} = 60^\circ$, tính DE theo R .

b) Chứng minh $CN \cdot CF = CP \cdot CM$.

c) Gọi I, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng BD, AB . Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại K . Tìm vị trí của điểm F để biểu thức $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho góc nhọn $\angle xOy$ cố định và A là điểm cố định trên Ox . Đường tròn (I) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với Ox, Oy lần lượt tại E, D . Gọi AF là tiếp tuyến thứ hai kẻ từ A đến (I) (F là tiếp điểm). Chứng minh DF luôn đi qua 1 điểm cố định.

Câu VI: (2,0 điểm)

Cho 2 số dương a, b . Chứng minh
$$\frac{(a+b-1)^2}{(a+b)^2+1} + \frac{(a-b+1)^2}{(a+1)^2+b^2} + \frac{(b-a+1)^2}{(b+1)^2+a^2} \geq \frac{3}{5}.$$

---Hết---

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm gồm 06 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.
- Đối với bài toán hình học, nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.
- Điểm toàn bài không làm tròn.

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu I: (3,0 điểm) Cho biểu thức

$$P = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} \text{ với } a>0; a \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức P

$$P = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a})^3-1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} + \frac{(1-a)(-1-a+\sqrt{a})}{\sqrt{a}(1-a)}$$

$$= \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} + \frac{-1-a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$$

b) Tìm điều kiện của a để biểu thức $Q = \frac{8}{P}$ nhận giá trị nguyên.

$$\text{Có } P = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} + 2 \geq 2\sqrt{\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}} + 2 = 4 \text{ (Theo BĐT Côsi)}$$

$$P = 4 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Leftrightarrow a = 1 \text{ (loại do } a \neq 1)$$

Vậy $P > 4 \forall a > 0, a \neq 1$.

$$\Rightarrow 0 < \frac{8}{P} < 2 \Rightarrow 0 < Q < 2$$

$$\text{Do đó đề } Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow Q=1 \Leftrightarrow P=8 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 - 6\sqrt{a} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=3-2\sqrt{2} \\ \sqrt{a}=3+2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=17-12\sqrt{2} \\ a=17+12\sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $a=17 \pm 12\sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

Câu II: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - 3\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} = 0$.

Điều kiện $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

Có $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$

Nên $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ vì $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0 \forall x$

$$(1) \Leftrightarrow 2(x-1) + (x^2 - 2x + 2) - 3\sqrt{(x-1)(x^2 - 2x + 2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} - 3 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 2x + 2}} + 1 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 2x + 2}}, t \geq 0$ ta được phương trình $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$

$$t=1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 2x + 2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2 - 2x + 2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 3 \pm \sqrt{3}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = 0 & (1) \\ \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+2} + x^2 + x = 26 & (2) \end{cases}$

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (x+2)^2 = (y+3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = y+3 \\ x+2 = -y-3 \end{cases}$$

+) $x+2 = -y-3 \Leftrightarrow (x+5) + y = 0$ vô nghiệm

Vì $(x+5) + y > 0 \forall x \geq -\frac{3}{2}, y \geq 0$

+) $x+2 = y+3 \Leftrightarrow y = x-1$ thay vào (2) ta được

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{2(x-1)+2} + x^2 + x = 26$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3} - 3) + (\sqrt{2x-2} - 2) + 2x^2 + x - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}-3} + \frac{2x-2-2}{\sqrt{2x-2}-2} + (x-3)(2x+7) = 0$$

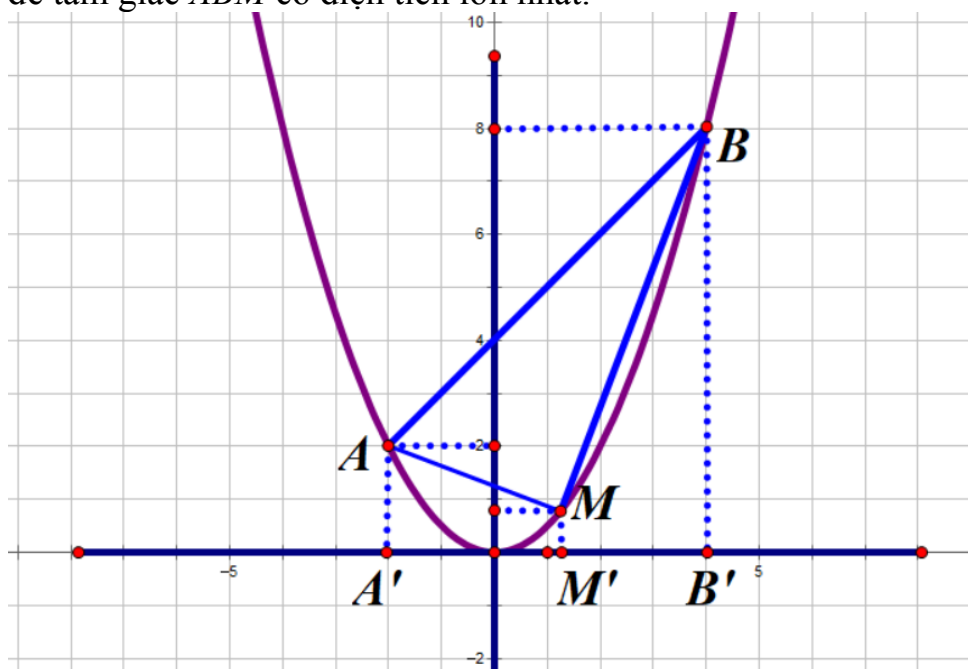
$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}-3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2}-2} + 2x+7 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=3, \text{ do } \left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}-3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2}-2} + 2x+7 \right) > 0 \forall x \geq 1$$

+) $x=3 \Rightarrow y=2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 2)$.

Câu III: (2,0 điểm) Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và hai điểm $A(-2;2)$, $B(4;8)$ nằm trên (P) . Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m ($-2 < m < 4$). Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.



Có $M\left(m; \frac{m^2}{2}\right)$

Gọi $A'(-2;0)$, $M'(m;0)$, $B'(4;0)$

$$S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')A'B}{2} = 30$$

$$S_{AMM'A'} = \frac{(AA' + MM')A'M'}{2} = \frac{(4+m^2)(2+m)}{4}$$

$$S_{MBB'M'} = \frac{(MM' + BB')M'B'}{2} = \frac{(16+m^2)(4-m)}{4}$$

$$S_{ABM} = S_{ABA'B'} - S_{AMM'A'} - S_{MBB'M'} = 30 - \frac{6m^2 - 12m + 72}{4} = \frac{27}{2} - \frac{3(m-1)^2}{2}$$

$$S_{ABM} \leq \frac{27}{2} \forall m$$

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Câu IV: (2,0 điểm) Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x-2y)(x+2y)+4y=x+x^3.$$

$$(x-2y)(x+2y)+4y=x+x^3. \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)=(2y-1)^2(1)$$

$$y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2y-1)^2 \text{ là số nguyên dương lẻ}$$

$\Rightarrow (x+1)(x^2+1)$ là số nguyên dương lẻ

$\Rightarrow x+1, x^2+1$ cùng lẻ và $1+x \geq 0$

Giả sử $(1+x, 1+x^2) = d \Rightarrow d$ là số lẻ.

Do $(1+x) : d \Rightarrow (1-x^2) : d$

Lại có $(1+x^2) : d \Rightarrow [(1+x^2) + (1-x^2)] : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d = 1$ (Do d lẻ)

Mặt khác, $(1) \Rightarrow (x+1)(x^2+1)$ là số chính phương

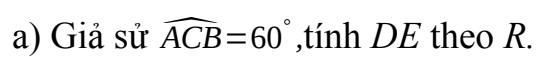
$1+x, 1+x^2$ là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $1+x, 1+x^2$ đều là số chính phương

Do x^2, x^2+1 là 2 số nguyên liên tiếp và cùng là số chính phương nên $x=0$

$x=0 \Rightarrow 4y^2+4y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$. Vậy $(x; y) = (0; 0)$ hoặc $(x; y) = (0; 1)$

Câu V: (7,0 điểm)

1. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi C là điểm thoả mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA, CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai tương ứng là D, E . Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F ($0 < FA \leq FB$). Đường thẳng CF cắt AB tại M , cắt đường tròn (O) tại N (N không trùng với F) và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C).


$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{sd\ BFA} - \widehat{sd\ DNE}}{2} \text{ (Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn)}$$

$$\widehat{BAC} = \frac{180^\circ - sd DNE}{2} \Rightarrow sd DNE = 60^\circ \Rightarrow \widehat{EOD} = 60^\circ$$

Mà $\widehat{OED} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ODE$ là tam giác đều

$$\Rightarrow OD = OE \Rightarrow ED = R$$

b) Chứng minh $CN.CF=CP.CM$

$\widehat{CPE} = \widehat{CDE}$ (2 góc nội tiếp chắn cung CE của đường tròn (O'))

Mà $\widehat{CBM} = \widehat{CDE}$ (Vì tứ giác $ABED$ nội tiếp đường tròn (O))

$\Rightarrow \widehat{CBM} = \widehat{CPE}$ nên tam giác CPE đồng dạng với tam giác CBM

$$\Rightarrow \frac{CE}{CP} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow CE \cdot CB = CM \cdot CP \quad (1)$$

Tương tự chứng minh tam giác CNE đồng dạng với tam giác CBF

$$\frac{CE}{CN} = \frac{CF}{CB} \Rightarrow CE \cdot CB = CN \cdot CF \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CN \cdot CF = CP \cdot CM$

c) Gọi I, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng BD, AB . Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại K . Tìm vị trí của điểm F để biểu

thức $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tứ giác $BIHF, BD AF$ nội tiếp $\widehat{FHK} = \widehat{FAK} (= \widehat{FBD})$, suy ra tứ giác $AKFH$ nội tiếp nên $\widehat{FKA} = 90^\circ$

Xét $\triangle DFK$ và $\triangle BFH$ có $\widehat{FKD} = \widehat{FHB} = 90^\circ$

Và $\widehat{FBH} = \widehat{FDA}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AF}$ của đường tròn (O))

$$\Rightarrow \triangle DFK \sim \triangle BFH \Rightarrow \frac{DK}{FH} = \frac{BH}{FI} \quad (1)$$

Tương tự tam giác IDF đồng dạng với tam giác $HAF \Rightarrow \frac{ID}{IF} = \frac{HA}{HF}$

Tương tự tam giác AFK đồng dạng tam giác BFI nên: $\frac{AK}{FK} = \frac{BI}{FI} \quad (2)$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{DK}{FK} - \frac{AK}{FK} = \frac{BH}{FH} - \frac{BI}{FI} \text{ hay } \frac{DA}{FK} = \frac{BH}{FH} - \frac{BI}{FI}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{BD}{FI} - \frac{BI}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{ID}{FI}$$

$$\text{Mà } \frac{ID}{FI} = \frac{HA}{FH} \text{ suy ra: } \frac{DA}{FK} + \frac{BD}{FI} = \frac{BH}{FH} + \frac{HA}{FH} = \frac{AB}{FH}$$

$$\text{Vậy: } \frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK} = \frac{2AB}{FH}$$

Nên $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK}$ nhỏ nhất khi FH lớn nhất khi F là trung điểm cung AB

A geometric diagram illustrating a triangle ODE with an inscribed circle (green). The circle is tangent to the sides OD , DE , and OA . Points A , J , F , D , and I are marked on the sides and internal lines. The diagram shows the construction of the internal angle bisectors and the circle's tangency points.

Góc $\widehat{AJI} = 90^\circ \Rightarrow J$ là điểm cố định

Câu VI: (2,0 điểm)

Cho 2 số dương a, b . Chứng minh $\frac{(a+b-1)^2}{(a+b)^2+1} + \frac{(a-b+1)^2}{(a+1)^2+b^2} + \frac{(b-a+1)^2}{(b+1)^2+a^2} \geq \frac{3}{5}$. (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(a+b-1)^2}{(a+b)^2+1} + \frac{\left(\frac{a+1}{b}-1\right)^2}{\left(\frac{a+1}{b}\right)^2+1} + \frac{\left(\frac{b+1}{a}-1\right)^2}{\left(\frac{b+1}{a}\right)^2+1} \geq \frac{3}{5} (*)$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{a+b+1}; y = \frac{b}{a+b+1}; z = \frac{1}{a+b+1}$$

Ta được $\frac{b+1}{a} = \frac{1}{x} - 1; \frac{a+1}{b} = \frac{1}{y} - 1; a+b = \frac{1}{z} - 1$

Vì $a; b > 0 \Rightarrow x; y; z > 0$

Ta lại có $x+y+z=1 \Rightarrow 0 < x; y; z < 1$

Thay vào (*) ta được $\frac{(1-2z)^2}{z^2+(1-z)^2} + \frac{(1-2y)^2}{y^2+(1-y)^2} + \frac{(1-2x)^2}{x^2+(1-x)^2} \geq \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{4z^2-4z+1}{2z^2-2z+1} + \frac{4y^2-4y+1}{2y^2-2y+1} + \frac{4x^2-4x+1}{2x^2-2x+1} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2z^2-2z+1} + \frac{1}{2y^2-2y+1} + \frac{1}{2x^2-2x+1} \leq \frac{27}{5}$$

Ta có $\frac{1}{2t^2-2t+1} \leq \frac{9}{5} + \frac{54}{25} \left(t - \frac{1}{3}\right)$ (*) với mọi t thuộc khoảng $(0; 1)$

$$\text{Thật vậy (*)} \Leftrightarrow \frac{1}{2t^2-2t+1} \leq \frac{9}{5} + \frac{18(3t-1)}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{18(3t-1)}{25} + \frac{9}{5} - \frac{1}{2t^2-2t+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{18(3t-1)}{25} + \frac{18t^2-18t+4}{5(2t^2-2t+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9(3t-1)}{5} + \frac{(3t-2)(3t-1)}{2t^2-2t+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3t-1) \left[\frac{9}{5} + \frac{3t-2}{2t^2-2t+1} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3t-1)(18t^2-3t-1) \geq 0 \text{ luôn đúng với mọi } t \text{ thỏa mãn } 0 < t < 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $t = \frac{1}{3}$

Sử dụng (*) 3 lần cho $x; y; z$ rồi cộng từng vế 3 bất đẳng thức cùng chiều ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ hay $a=b=1$