

ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 9 - PHÂN SỐ
CHỦ ĐỀ 1: HỆ THỐNG KIẾN THỨC CƠ BẢN

PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Số có dạng $\frac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ gọi là phân số.

Số nguyên n được đồng nhất với phân số $\frac{n}{1}$.

Tính chất cơ bản của phân số: $\frac{a}{b} = \frac{a.m}{b.m} = \frac{a:n}{b:n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}, m, n \neq 0$ và $n \in \text{ƯC}(a, b)$.

Nếu $(a, b) = 1$ thì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Nếu $\frac{m}{n}$ là dạng tối giản của phân số $\frac{a}{b}$ thì tồn tại số nguyên k sao cho $a = mk, b = nk$.

PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Áp dụng các tính chất chia hết để giải các bài toán về phân số

I.Phương pháp giải

Bài toán tổng quát: Tìm số tự nhiên n sao cho $\frac{A(n)}{B(n)}$ có giá trị nguyên.
Cách làm:

$$\frac{A(n)}{B(n)} = \frac{1}{a} \left(b + \frac{d}{C(n)} \right) \quad (a, b, d \in \mathbb{Z}) \Rightarrow C(n) \in \text{Ư}(d).$$

Nếu $a = 1$ ta tìm được n và kết luận.

Nếu $a \neq 1$ ta tìm được n cần thử lại rồi kết luận.

Bài toán tổng quát: Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên n để phân số tối giản hoặc rút gọn được” ta làm như sau:

Gọi d là ước nguyên tố của tử và mẫu.

Dùng các phép toán cộng, trừ, nhân để khử n để từ đó tìm d .

Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên n để phân số tối giản” ta tìm n để tử số hoặc mẫu số không chia hết cho các ước nguyên tố.

Đối với các bài toán: “Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được” ta tìm n để tử số hoặc mẫu số chia hết cho các ước nguyên tố.

II.Bài toán

Bài 1: Cho $A = \frac{n-1}{n+4}$

- a) Tìm n nguyên để A là một phân số
b) Tìm n nguyên để A là một số nguyên.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

a) Để A là phân số thì
$$\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq -4 \end{cases}$$

b) Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì

$$(n-1):(n+4) \Rightarrow (n+4-5):(n+4) \Rightarrow [(n+4)-5]:(n+4)$$

Mà $(n+4):(n+4)$ nên $5:(n+4) \Rightarrow n+4 \in U^{(5)}$.

$$U^{(5)} = \{\pm 1; \pm 5\}$$

Ta có bảng sau:

$n+4$	1	-1	5	-5
n	-3	-5	1	-9
A	-4	6	0	2

Vậy $n \in \{-9; -5; -3; 1\}$.

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{n+10}{2n-8}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Để phân số A có giá trị là một số nguyên thì

$$(n+10):(2n-8) \Rightarrow (n+10):(n-4) \Rightarrow [(n-4)+14]:(n-4) \Rightarrow 14:(n-4)$$

$$\Rightarrow n-4 \in U^{(14)}$$

$$U^{(14)} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14\}$$

Mặt khác, n là số tự nhiên nên $n-4 \geq -4 \Rightarrow n-4 \in \{-2; -1; 1; 2; 7; 14\}$.

Ta có bảng sau:

$n-4$	1	-1	2	-2	7	14
n	5	3	6	2	11	18
A	$\frac{15}{2}$ (loại)	$\frac{13}{-2}$ (loại)	$\frac{16}{4} = 4$	-3	$\frac{21}{14}$ (loại)	1

Vậy $n \in \{2; 6; 18\}$.

Bình luận:

- Ngoài cách lập bảng trên ta có thể để ý rằng:

$$(n+10):(2n-8) \Rightarrow (n+10):[2(n-4)] \Rightarrow (n+10):2$$

Kết hợp với $(n-4) \in \{-2; -1; 2; 7; 14\} \Rightarrow n \in \{2; 3; 5; 6; 11; 18\} \Rightarrow n \in \{2; 6; 18\}$.

- Đối với bài toán trên với $n \in \{5; 3; 11\}$ đều là số nguyên nhưng khi thay vào A thì không được giá trị nguyên vì: theo bài ra thì $(n+10):(2n-8) \Rightarrow (n+10):(n-4)$ nhưng không có điều ngược lại.

Bài 3: Chứng minh rằng phân số $\frac{2n+3}{4n+8}$ tối giản với mọi số tự nhiên n .

Phân tích:

Để chứng minh một phân số là phân tối giản thì ta cần chứng minh ước chung lớn nhất của tử và mẫu phải bằng 1.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Giả sử ƯCLN } (2n+3, 4n+8) = d \Rightarrow \begin{cases} 2n+3:d \\ 4n+8:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6:d \\ 4n+8:d \end{cases} \Rightarrow 2:d \Rightarrow d \in \{1; 2\}$$

Vì $2n+3$ là số tự nhiên lẻ nên $d \neq 2$.

Vậy $d=1$ nên phân số $\frac{2n+3}{4n+8}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Gọi d là ước nguyên tố của $21n+3$ và $6n+4$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (21n+3):d \\ (6n+4):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (42n+6):d \\ (42n+28):d \end{cases} \Rightarrow 22:d \Rightarrow d \in \{2; 11\}$$

Nếu $d=2$ ta thấy $(6n+4):2 \forall n$ còn $(21n+3):2$ khi n lẻ.

Nếu $d=11$ thì $(21n+3):11 \Rightarrow (22n-n+3):11$ hay $22n-(n-3) \Rightarrow (n-3):11 \Rightarrow n-3=11k$
 $\Rightarrow n=11k+3 (k \in \mathbb{N})$

Với $n=11k+3$ thì $6n+4=6(11k+3)+4=(66k+22):11 \Rightarrow (6n+4):11$

Vậy n lẻ hoặc $n = 11k + 3$ thì phân số $A = \frac{21n+3}{6n+4}$ rút gọn được.

Bài 5: Tìm các số tự nhiên a, b, c, d nhỏ nhất sao cho: $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}; \frac{b}{c} = \frac{12}{21}; \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$.

Lời giải:

Điều kiện: $a, b, c, d \in \mathbb{N}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \\ \frac{b}{c} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \\ \frac{c}{d} = \frac{6}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3m \\ b = 5m = 4n \\ c = 7n = 6k \\ d = 11k \end{cases} \quad (m, n, k \in \mathbb{N}^*)$$

Suy ra $\begin{cases} 4n : 5 \\ 7n : 6 \end{cases}$ mà $(4, 5) = 1; (6, 7) = 1 \Rightarrow \begin{cases} n : 5 \\ n : 6 \end{cases} \Rightarrow n \in BC(5, 6)$ mặt khác a, b, c, d nhỏ nhất nên $n = BCNN(5, 6) \Rightarrow n = 5 \cdot 6 = 30 \Rightarrow m = 24; k = 35$
 $\Rightarrow a = 72; b = 120; c = 210; d = 385$.

Bài 6: Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Cách 1:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3) : (2n-2) \Rightarrow (n+3) : [2(n-1)] \Rightarrow (n+3) : (n-1) \Rightarrow [(n-1)+4] : (n-1) \Rightarrow 4 : (n-1)$$

Suy ra $n-1$ là ước của 4.

$U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$ mặt khác n là số tự nhiên nên $n-1 \geq -1$ nên $n-1 \in \{-1; 1; 2; 4\}$

Ta có bảng sau:

$n-1$	-1	1	2	4
n	0	2	3	5
$\frac{n+3}{2n-2}$	$-\frac{3}{2}$ Loại	$\frac{5}{2}$ Loại	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{8} = 1$

Vậy $n=5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Cách 2:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow 2(n+3):2n-2 \Rightarrow (2n+6):(2n-2) \Rightarrow (2n-2+8):(2n-2) \Rightarrow 8:(2n-2) \\ \Rightarrow 4:(n-1)$$

Suy ra $n-1$ là ước của 4

Ư(4) = {+1; +2; +4} mặt khác n là số tự nhiên nên $n-1 \geq -1$ nên $n-1 \in \{-1; 1; 2; 4\}$

Ta có bảng sau:

$n-1$	-1	1	2	4
n	0	2	3	5
$\frac{n+3}{2n-2}$	$-\frac{3}{2}$ (loại)	$\frac{5}{2}$ (loại)	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{8}=1$

Vậy $n=5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Cách 3:

Để phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên thì

$$(n+3):(2n-2) \Rightarrow (n+3):[2(n-1)] \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ (n+3):(n-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ [(n-1)+4]:(n-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ 4:(n-1) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ n-1 \in \{\pm 4; \pm 2; \pm 1\} \\ n-1 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+3):2 \\ n \in \{5; 3; 2; 0\} \\ n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow n=5$$

Vậy $n=5$ thì phân số $\frac{n+3}{2n-2}$ có giá trị nguyên.

Bài 7: Tìm số nguyên n sao cho:

a) $\frac{n+7}{3n-1}$ là số nguyên.

b) $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên.

Lời giải:

a) Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{n+7}{3n-1}$ có giá trị là một số nguyên thì

$$(n+7):(3n-1) \Rightarrow 3(n+7):(3n-1) \Rightarrow (3n+21):(3n-1) \Rightarrow (3n-1+22):(3n-1)$$

$$\Rightarrow 22:(3n-1) \Rightarrow 3n-1 \in U^{(22)}$$

$$U^{(22)} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 11; \pm 22\}$$

Ta có bảng sau:

$3n-1$	1	-1	2	-2	11	-11	22	-22
n	$\frac{2}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	0	1	$-\frac{1}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	4	$-\frac{10}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	$\frac{23}{3}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	-7
A		-7	4		1	$-\frac{5}{7}$ (loại)		0

Vậy $n \in \{0; 1; 4; -7\}$ thì $\frac{n+7}{3n-1}$ có giá trị nguyên.

b) Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên thì

$$(3n+2):(4n-5) \Rightarrow 4(3n+2):(4n-5) \Rightarrow (12n+8):(4n-5) \text{ hay } (12n-15+23):(4n-5)$$

$$\Rightarrow [3(4n-5)+23]:(4n-5)$$

Mà $3(4n-5):(4n-5)$ nên $23:(4n-5) \Rightarrow 4n-5 \in U^{(23)}$

$$U^{(23)} = \{\pm 1; \pm 23\}$$

Ta có bảng sau:

$4n-5$	1	-1	23	-23
n	$\frac{3}{2}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)	1	7	$-\frac{9}{2}$ (loại vì $n \in \mathbb{Z}$)
A		-5 (loại)	1	0

Vậy $n=7$ thì $\frac{3n+2}{4n-5}$ là số tự nhiên.

Bài 8: Tìm số tự nhiên n để phân số $A = \frac{8n+193}{4n+3}$.

a) Có giá trị là số tự nhiên.

b) Là phân số tối giản.

c) Phân số A rút gọn được với $150 < n < 170$.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

a) Để phân số A là số tự nhiên thì

$$(8n+193):(4n+3) \text{ hay } (8n+6+187):(4n+3) \Rightarrow [2(4n+3)+187]:(4n+3)$$

$$\text{Mà } 2(4n+3):(4n+3) \Rightarrow 187:(4n+3) \Rightarrow (4n+3) \in U(187)$$

$$U(187) = \{ \pm 11; \pm 17; \pm 187 \}$$

Mà n là số tự nhiên nên $4n+3 \geq 0$ hay $n \geq -\frac{3}{4}$ suy ra $n \in \{11; 17; 187\}$

Ta có bảng sau:

$4n+3$	11	17	187
n	2	$\frac{7}{2}$ (loại vì $n \in \mathbb{N}$)	46
A	19		3

Vậy $n \in \{2; 46\}$ thì $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ là số tự nhiên.

b) Gọi d là ước nguyên tố của $8n+193$ và $4n+3$ thì:

$$\begin{cases} 8n+193:d \\ 4n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n+193:d \\ 2(4n+3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n+193:d \\ 8n+6:d \end{cases} \Rightarrow [(8n+193)-(8n+6)] : d \Rightarrow 187:d$$

$\Rightarrow d \in \{11; 17\}$ với $n \in \mathbb{N}$ và d là số nguyên tố.

Với $d=11$ ta có $(4n+3):11 \Rightarrow (4n+3-11):11 \Rightarrow (4n-8):11 \Rightarrow 4(n-2):11 \Rightarrow (n-2):11$

Do đó $n-2=11k$ ($k \in \mathbb{N}$) hay $n=11k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Với $d=17$ ta có $(4n+3):17 \Rightarrow (4n+3+17):17 \Rightarrow (4n+20):17 \Rightarrow 4(n+5):17 \Rightarrow (n+5):17$

Do đó $n + 5 = 17m \ (m \in \mathbb{N})$ hay $n = 17m - 5 \ (m \in \mathbb{N}^*)$

Vậy với $n \neq 11k + 2 \ (k \in \mathbb{N})$ và $n \neq 17m - 5 \ (m \in \mathbb{N}^*)$ thì phân số $A = \frac{8n + 193}{4n + 3}$ tối giản.

c) Từ câu b) ta có:

Để phân số $A = \frac{8n + 193}{4n + 3}$ rút gọn được thì $n = 11k + 2 \ (k \in \mathbb{N})$ và $n \neq 17m - 5 \ (m \in \mathbb{N}^*)$
 Vì $150 < n < 170$ nên:

$$\text{TH1: } 150 < 11k + 2 < 170 \Rightarrow 148 < 11k < 168 \Rightarrow k \in [14; 15]$$

Với $k = 14$ thì $n = 156$

Với $k = 15$ thì $n = 167$

$$\text{TH2: } 150 < 17m - 5 < 170 \Rightarrow 155 < 17m < 175 \Rightarrow m = 10$$

Với $m = 10$ thì $n = 165$

Vậy $n \in \{156, 165, 167\}$ thì phân số $A = \frac{8n + 193}{4n + 3}$ rút gọn được.

Bài 9: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ có thể rút gọn được.

Lời giải:

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}$

Gọi d là ước nguyên tố của $18n + 3$ và $21n + 7$ thì:

$$\begin{cases} 18n + 3 : d \\ 21n + 7 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n + 3) : d \\ 6(21n + 7) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 126n + 21 : d \\ 126n + 42 : d \end{cases} \Rightarrow [(126n + 42) - (126n + 21)] : d \Rightarrow 21 : d$$

$\Rightarrow d \in \{3, 7\}$ với $n \in \mathbb{N}$ và d là số nguyên tố.

Với $d = 3$ mà $18n + 3 : 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$ nên để phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ có thể rút gọn được thì $21n + 7 : 3$

Mà $21n + 7 \not\vdots 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (vì $21n : 3$ và $7 \not\vdots 3$) $\Rightarrow d \neq 3$

Với $d = 7$ thì $21n + 7 : 7 \ \forall n$ nên để phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ rút gọn được thì

$$18n + 3 : 7 \Rightarrow 21n - (3n - 3) : 7 \Rightarrow 3(n - 1) : 7 \Rightarrow n - 1 : 7 \Rightarrow n - 1 = 7k \Rightarrow n = 7k + 1 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy với $n = 7k + 1 \ (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ rút gọn được.

Bài 10: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n + 5}{2n - 1}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

Điều kiện: $n \in \mathbb{Z}$

Để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên thì

$$(4n+5):(2n-1) \text{ hay } (4n-2+7):(2n-1) \Rightarrow [2(2n-1)+7):(2n-1)$$

$$\text{Mà } 2(2n-1):(2n-1) \Rightarrow 7:(2n-1) \Rightarrow (2n-1) \in \mathcal{U}^*(7)$$

$$\mathcal{U}^*(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$$

Ta có bảng sau:

$2n-1$	-1	1	-7	7
n	0	1	-3	4
A	-5	9	1	7

Vậy $n \in \{0; 1; -3; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên.

$$A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3}$$

Bài 11: Cho biểu thức : $A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3}$. Tìm giá trị của n để:

a) A là một phân số.

b) A là một số nguyên.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{2n+1}{n-3} + \frac{3n-5}{n-3} - \frac{4n-5}{n-3} = \frac{2n+1+3n-5-(4n-5)}{n-3} = \frac{n+1}{n-3}$$

a) Để $\frac{n+1}{n-3}$ là phân số thì $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 3 \end{cases}$

b) Để $\frac{n+1}{n-3}$ là số nguyên thì

$$(n+1):(n-3) \text{ hay } (n-3+4):(n-3) \text{ hay } [(n-3)+4):(n-3)$$

$$\text{Mà } (n-3):(n-3) \Rightarrow 4:(n-3) \Rightarrow (n-3) \in \mathcal{U}^*(4)$$

$$\mathcal{U}^*(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Ta có bảng sau:

$n-3$	1	-1	2	-2	4	-4
n	4	2	5	1	7	-1
A	5	-3	3	-1	2	0

Vậy $n \in \{-1; 1; 2; 4; 5; 7\}$ thì $\frac{n+1}{n-3}$ là số nguyên.

Bài 12: Với giá trị nào của số tự nhiên a thì :

a) $\frac{8a+19}{4a+1}$ có giá trị nguyên

b) $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Điều kiện: $a \in \mathbb{N}$

a) Để $\frac{8a+19}{4a+1}$ là số nguyên thì

$$(8a+19):(4a+1) \text{ hay } (8a+2+17):(4a+1) \text{ hay } [2(4a+1)+17]:(4a+1)$$

$$\text{Mà } 2(4a+1):(4a+1) \Rightarrow 17:(4a+1) \Rightarrow (4a+1) \in U(17)$$

$$U(17) = \{\pm 1; \pm 17\}.$$

Ta có bảng sau:

$4a+1$	1	-1	17	-17
a	0	$-\frac{1}{2}$ (loại vì $a \in \mathbb{N}$)	4	$-\frac{9}{2}$ (loại vì $a \in \mathbb{N}$)
A	19		3	

Vậy $a \in \{0, 4\}$ thì $\frac{8a+19}{4a+1}$ là số nguyên.

$$\frac{5a-17}{4a-23} = \frac{\frac{5}{4} \cdot 4a - 17}{4a-23} = \frac{\frac{5}{4} \cdot (4a-23) + \frac{47}{4}}{4a-23} = \frac{5}{4} + \frac{47}{4(4a-23)}$$

a) Ta có:

Để $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất thì $4a-23$ có giá trị nhỏ nhất

$$\text{Mà } a \in \mathbb{N} \text{ nên } 4a-23=1 \Rightarrow 4a=24 \Rightarrow a=6.$$

Vậy $a=6$ thì $\frac{5a-17}{4a-23}$ có giá trị lớn nhất.

Bài 13: Tìm x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{6}{y} = \frac{z}{10}$ và $x+z=7+y$.

Lời giải:

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{z}{10} \Rightarrow x = \frac{3}{10}z$

$$\frac{y}{6} = \frac{z}{10} \Rightarrow y = \frac{6}{10}z = \frac{3}{5}z$$

Theo đề:

$$x + z = 7 + y$$

$$\frac{3}{10}z + z = 7 + \frac{3}{5}z$$

$$\frac{3}{10}z + z - \frac{3}{5}z = 7$$

$$\frac{7}{10}z = 7$$

$$z = 10$$

Suy ra $x = \frac{3}{10} \cdot 10 = 3; y = \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$

Vậy $x = 3; y = 6; z = 10$.

Bài 14: Tìm các số nguyên x, y sao cho $\frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}$.

Lời giải: Ta có:

$$\frac{3}{x} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{y}{3}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{2y}{6}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{5 - 2y}{6}$$

Do đó: $x(5 - 2y) = 18 = 2 \cdot 3^2$.

Do x, y là các số nguyên nên $5 - 2y$ là ước của 18, mặt khác $5 - 2y$ là số lẻ. Ước lẻ của 18 là: $1; -1; 3; -3; 9; -9$. Ta có:

$5 - 2y$	1	- 1	3	- 3	9	- 9
$2y$	4	6	2	8	- 4	14
y	2	3	1	4	- 2	7
x	18	- 18	6	- 6	2	- 2

Vậy có sáu cặp số x, y ở bảng trên thỏa mãn bài toán.

Bài 15: Tìm các số tự nhiên a, b sao cho: $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{2+3}$.

Lời giải:

Ta luôn có:

$$\frac{a}{2} \geq \frac{a}{5} \quad (\text{xảy ra dấu bằng với } a=0)$$

$$\frac{b}{3} \geq \frac{b}{5} \quad (\text{xảy ra dấu bằng với } b=0)$$

Do đó: $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \geq \frac{a}{5} + \frac{b}{5} = \frac{a+b}{5}$.

Xảy ra $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = \frac{a+b}{5}$ chỉ trong trường hợp $a=b=0$.

Dạng 2: Tìm phân số biết mối liên hệ giữa tử và mẫu

Một số điều kiện cho trước thường gặp:

① Biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.

② Viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu).

③ Liên hệ về phép chia giữa phân số cần tìm với phân số đã cho.

④ Biết phân số bằng phân số nào đó và biết quan hệ ƯCLN(Tử, Mẫu) hoặc tổng (hiệu) của tử và mẫu.

⑤ Cộng một số vào tử hoặc mẫu được một phân số mới....

Phương pháp giải:

- Nếu bài toán cho tử số (mẫu số), biến đổi sao cho ba phân số đồng tử (đồng mẫu) rồi so sánh các phân số ta tìm được mẫu số (tử số) còn thiếu.
- Ở dạng toán viết phân số dưới dạng tổng các phân số đã biết cùng số tử (hoặc cùng số mẫu) ta phải tìm được bộ số thuộc các ước của mẫu sao cho tổng của chúng bằng tử. Khi đó ta tìm được bộ phân số có tổng bằng phân số ban đầu, các phân số này có tử số là ước của mẫu nên khi viết dưới dạng tối giản đều có tử số bằng 1.
- Từ các dữ kiện bài toán ta vận dụng linh hoạt các tính chất của phân số tối giản với tính chia hết để giải toán.

- Dạng toán: Tìm phân số bằng phân số $\frac{a}{b}$ ($a, b > 0$), biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là c , ta tìm phân số tối giản của $\frac{a}{b}$ sau đó nhân cả tử và mẫu phân số tối giản với c ta được số cần tìm.

Bài 1: Tìm phân số có tử là 5 , biết rằng phân số đó lớn hơn $-\frac{11}{12}$ và nhỏ hơn $-\frac{11}{15}$.

Phân tích:

$\frac{5}{x}$

Do phân số có tử số bằng 5 nên ta có thể gọi dạng phân số cần tìm là $\frac{5}{x}$, sau đó ta biến đổi cả ba phân số trên có cùng tử số. Khi so sánh hai phân số cùng tử, phân số nào có mẫu số lớn hơn thì nhỏ hơn. Khi đó ta tìm được khoảng giá trị của x và chọn được giá trị x phù hợp.

Lời giải:

Gọi mẫu phân số cần tìm là $x (x \in \mathbb{N}^*)$.

Ta có:
$$\frac{-11}{12} < \frac{5}{x} < \frac{-11}{15} \Rightarrow \frac{55}{-60} < \frac{55}{11x} < \frac{55}{-75} \Rightarrow -75 < 11x < -60 \Rightarrow x = -6$$

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$.

Bình luận: Bài toán thuộc dạng biết tử số (hoặc mẫu số), phân số cần tìm lớn hơn phân số này và nhỏ hơn phân số kia.

$\frac{7}{13}$

Bài 2: Tìm phân số có mẫu là 12 , biết rằng phân số đó lớn hơn $\frac{7}{13}$ và nhỏ hơn $\frac{11}{5}$.

Lời giải:

Gọi tử phân số cần tìm là x

Ta có:
$$\frac{7}{13} < \frac{x}{12} < \frac{11}{5} \Rightarrow \frac{420}{780} < \frac{65x}{780} < \frac{1716}{780} \Rightarrow 420 < 65x < 1716 \Rightarrow x \in \{7; 8; 9; \dots; 25; 26\}$$

Vậy các phân số cần tìm là: $\frac{7}{12}; \frac{8}{12}; \frac{9}{12}; \dots; \frac{25}{12}; \frac{26}{12}$.

$\frac{11}{15}$

Bài 3: Hãy viết phân số $\frac{11}{15}$ dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng 1 và có mẫu số khác nhau.

Phân tích: Nhận thấy nếu mẫu số bằng 15 , $U^{(15)} = \{1; 3; 5; 15\}$ ta không tìm được bộ ba số nào có tổng bằng 11. Lập lại cách thử này đối với mẫu và tử của phân số khi nhân cả tử và mẫu của phân số với cùng một số cho đến khi tìm được bộ

$\frac{44}{60}$

số thỏa mãn. Để thấy khi nhân cả tử và mẫu phân số với 4 ta được phân số $\frac{44}{60}$, $U^{(60)} = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; 15; 20; 30; 60\}$ khi đó ta tìm được bộ ba số cộng với nhau bằng 44 là $\{4; 10; 30\}$.

Lời giải:

$$\frac{11}{15} = \frac{44}{60} \Rightarrow U^{(60)} = \{1; 2; 3; 4; 5; 10; 15; 20; 30; 60\}$$

$$30+10+4=44 \Rightarrow \frac{44}{60} = \frac{10}{60} + \frac{30}{60} + \frac{4}{60} \Rightarrow \frac{11}{15} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{15}$$

Bài 4: Hãy viết phân số $\frac{5}{3}$ dưới dạng tổng của 3 phân số có tử số đều bằng 1 và có mẫu số khác nhau.

Lời giải:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} \Rightarrow \text{Ư}(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$6+3+1=10 \Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

Bài 5: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất (với $\frac{a}{b} > 0$) biết khi chia $\frac{a}{b}$ cho $\frac{7}{15}$ và $\frac{12}{25}$ được thương là các số nguyên.

Phân tích:

Do tính chất chia hết ta có: $\frac{a}{b}$ chia hết cho $\frac{7}{15}$ nên $\frac{15a}{7b}$ là số nguyên, vậy a

chia hết cho 7 , 15 chia hết cho b . Tương tự, $\frac{a}{b}$ chia hết cho $\frac{12}{25}$ nên $\frac{25a}{12b}$ là số nguyên, vậy a chia hết cho 12 , 25 chia hết cho b . Do tính chất của phân số tối giản và lớn hơn 0 nên ta có $a = \text{BCNN}(7, 12)$ và $b = \text{ƯCLN}(15, 25)$.

Lời giải:

Vì $\frac{a}{b}$ tối giản nên $a = \text{ƯCLN}(a, b) = 1$. và $\frac{a \cdot 15}{b \cdot 7}; \frac{a \cdot 25}{b \cdot 12}$ là các số nguyên nên a chia hết cho 7 và 12 còn 15 và 25 chia hết cho b .

Do đó $a \in \text{BC}(7, 12)$ và $b \in \text{ƯC}(15, 25)$.

Vì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn 0 nên $a = \text{BCNN}(7, 12)$ và $b = \text{ƯCLN}(15, 25)$ nên $a = 84; b = 5$ Do đó phân số cần tìm là $\frac{84}{5}$.

Bài 6: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ nhỏ nhất (với $\frac{a}{b} > 0$) biết khi chia $\frac{a}{b}$ cho $\frac{9}{10}$ và $\frac{11}{15}$ được thương là các số nguyên.

Lời giải:

Vì $\frac{a}{b}$ tối giản nên $a = \text{ƯCLN}(a, b) = 1$. và $\frac{a \cdot 10}{b \cdot 9}; \frac{a \cdot 15}{b \cdot 11}$ là các số nguyên nên a chia hết cho 9 và 11 còn 10 và 15 chia hết cho b .

Do đó $a \in \text{BC}(9, 11)$ và $b \in \text{ƯC}(10, 15)$.

Vì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nhỏ nhất lớn hơn 0 nên $a = \text{BCNN}(9, 11)$ và $b = \text{ƯCLN}(10, 15)$ nên $a = 99; b = 5$. Do đó phân số cần tìm là $\frac{99}{5}$.

Bài 7: Tìm phân số bằng phân số $\frac{20}{39}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 36 .

Lời giải:

Ta thấy $\text{ƯCLN}(20, 39) = 1$. Suy ra phân số $\frac{20}{39}$ là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 36 .

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{20}{39}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 36 . Vậy phân số cần tìm là $\frac{20 \cdot 36}{39 \cdot 36} = \frac{720}{1404}$.

Bài 8: Tìm phân số bằng phân số $\frac{15}{20}$, biết ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số đó là 14 .

Lời giải:

Ta thấy $\text{ƯCLN}(15, 20) = 5$. Suy ra $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ và $\frac{3}{4}$ là phân số tối giản.

Mà ƯCLN của cả tử và mẫu của phân số cần tìm là 14 .

Nên phân số cần tìm đã được rút gọn thành $\frac{3}{4}$ bằng cách chia cả tử và mẫu cho 14 . Vậy phân số cần tìm là $\frac{3 \cdot 14}{4 \cdot 14} = \frac{42}{56}$.

Bài 9: Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, lớn gấp 2 lần phân số ban đầu ?

Lời giải:

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng mẫu số vào tử số và cộng mẫu số vào mẫu số ta được phân số $\frac{a+b}{b+b} = \frac{a+b}{2b}$.

Để $\frac{a+b}{2b}$ gấp 2 lần phân số lúc đầu thì $a+b$ phải bằng 4 lần a
 $\Rightarrow$ Mẫu số b phải gấp 3 lần tử số a .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{1}{3}$.

Bình luận: Từ giả thiết bài toán ta tìm được mối liên hệ giữa tử và mẫu. Từ đó tìm được phân ban đầu.

Bài 10: Tìm một phân số tối giản, biết rằng khi cộng tử số vào tử số và cộng tử số vào mẫu số của phân số ấy thì được một phân số mới, giảm $\frac{6}{11}$ lần phân số ban đầu ?

Lời giải:

Gọi phân số tối giản lúc đầu là $\frac{a}{b}$. Nếu chỉ cộng tử số vào tử số và cộng tử số vào mẫu số ta được phân số $\frac{a+a}{b+a} = \frac{2a}{a+b}$.

Để $\frac{2a}{a+b}$ giảm $\frac{6}{11}$ lần phân số ban đầu thì $a+b$ phải bằng 11 lần b
 $\Rightarrow$ Tử số a phải gấp 10 lần mẫu số b .

Phân số tối giản thoả mãn điều kiện trên là $\frac{10}{11}$.

Bài 11: Tìm các số tự nhiên a và b biết rằng: $\frac{a}{b} = \frac{15}{35}$; ƯCLN $(a,b).BCNN(a,b) = 3549$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \Rightarrow a = 3k; b = 7k (k \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

$$\text{ƯCLN}(a,b).BCNN(a,b) = 3549 \Rightarrow ab = 3549 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $21k^2 = 3549 \Rightarrow k^2 = 169 \Rightarrow k = 13$ (Vì $k \in \mathbb{N}^*$)
 $\Rightarrow a = 3.13 = 39; b = 7.13 = 91$

Bài 12: Tìm các số tự nhiên a và b biết rằng:

$$a) \frac{a}{b} = \frac{132}{143}; \text{BCNN}(a, b) = 1092$$

$$b) \frac{a}{b} = \frac{21}{35}; \text{ƯCLN}(a, b) = 30$$

Lời giải:

a) Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{132}{143} = \frac{12}{13} \text{ nên } a = 12k; b = 13k (k \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \text{ƯCLN}(12, 13) = 1 \Rightarrow \text{ƯCLN}(12k, 13k) = k \text{ và } \text{BCNN}(12k, 13k) = 12 \cdot 13 \cdot k \quad (2)$$

$$\text{Theo đề bài thì: } \text{BCNN}(a, b) = 1092 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3)

$$\Rightarrow 12 \cdot 13 \cdot k = 1092$$

$$\Leftrightarrow 156k = 1092$$

$$\Leftrightarrow k = 1092 : 156 = 7$$

$$\text{Khi đó } a = 12 \cdot 7 = 84; b = 13 \cdot 7 = 91.$$

$$\text{Vậy } a = 84; b = 91.$$

b) Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \text{ nên } a = 3k; b = 5k (k \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \text{ƯCLN}(3, 5) = 1 \Rightarrow \text{ƯCLN}(3k, 5k) = k \quad (2)$$

$$\text{Theo đề bài thì: } \text{ƯCLN}(a, b) = 30 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) } \Rightarrow k = 30.$$

$$\text{Khi đó } a = 3 \cdot 30 = 90; b = 5 \cdot 30 = 150.$$

$$\text{Vậy } a = 90; b = 150.$$

Bài 13: Cho ba phân số $\frac{15}{42}; \frac{49}{56}; \frac{36}{51}$. Biến đổi ba phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai, mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba.

Lời giải:

$$\text{Vì mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ hai nên ta có: } \frac{49}{56} = \frac{7}{8} = \frac{42}{48}$$

$$\text{Vì mẫu của phân số thứ hai bằng tử của phân số thứ ba nên ta có: } \frac{36}{51} = \frac{12}{17} = \frac{48}{68}$$

$$\text{Vậy ba phân số cần tìm là: } \frac{15}{42}; \frac{42}{48}; \frac{48}{68}.$$

Bài 14: Trung bình cộng của tử số và mẫu số của một phân số là $\frac{68}{2}$. Cộng thêm vào tử số của phân số đó 4 đơn vị thì ta được phân số mới bằng phân số $\frac{3}{2}$. Tìm phân số ban đầu.

Lời giải:

Tổng của tử số và mẫu số là: $68 \cdot 2 = 136$

Nếu cộng thêm vào tử số 4 đơn vị thì ta được tổng mới là: $136 + 4 = 140$

Ta có sơ đồ:

Tử số: |---|---|---|

Mẫu số: |---|---|

Tử số mới là: $140 : (3 + 2) \cdot 3 = 84$

Tử số ban đầu là: $84 - 4 = 80$

Mẫu số ban đầu là: $136 - 80 = 56$

Vậy phân số ban đầu là: $\frac{80}{56}$.

Bài 15: Cho hai số a và b thỏa mãn: $a - b = 2(a + b) = \frac{a}{b}$. Chứng minh $a = -3b$. Tính $\frac{a}{b}$. Tìm a, b .

Lời giải:

$$a - b = 2(a + b)$$

$$a - b = 2a + 2b$$

$$a - 2a = 2b + b$$

$$-a = 3b$$

Ta có: $a = -3b$

Thay $a = -3b$ vào $a - b = \frac{a}{b}$ ta được:

$$-3b - b = \frac{a}{b}$$

$$-4b = -3$$

$$b = \frac{3}{4}$$

$$\text{Suy ra } a = -3 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$\text{Vậy } a = -3b, \frac{a}{b} = -3; a = -\frac{9}{4}; b = \frac{3}{4}.$$

Bài 16: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$.

Lời giải:

Theo đề bài ta có:

$$8b - 9a = 31 \Rightarrow b = \frac{31+9a}{8} = \frac{32-1+8a+a}{8} = \frac{(32+8a)+a-1}{8} = 4+a+\frac{a-1}{8}$$

Vì $a, b \in \mathbb{N}$ nên $4+a+\frac{a-1}{8} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{a-1}{8} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a-1):8 \Leftrightarrow a=8k+1 (k \in \mathbb{N})$

Khi đó:

$$b = \frac{31+9(8k+1)}{8} = \frac{40+72k}{8} = 9k+5$$

Lại có: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29} \Leftrightarrow \frac{11}{17} < \frac{8k+1}{9k+5} < \frac{23}{29}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11(9k+5) < 17(8k+1) \\ 29(8k+1) < 23(9k+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{38}{37} \\ k < \frac{86}{25} \end{cases}$$

Vì $k \in \mathbb{N}$ nên $k \in \{2; 3\}$

Với $k=2$ thì $\begin{cases} a=8k+1=8.2+1=17 \\ b=9k+5=9.2+5=23 \end{cases}$

Với $k=3$ thì $\begin{cases} a=8k+1=8.3+1=25 \\ b=9k+5=9.3+5=32 \end{cases}$

Vậy $a=17; b=23$ hoặc $a=25; b=32$.

! HẾT

ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 9-PHÂN SỐ
CHỦ ĐỀ 2:PHÂN SỐ TỐI GIẢN

PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

-Phân số tối giản hay còn gọi là phân số không thể rút gọn được nữa là phân số mà tử và mẫu chỉ có ước chung là 1 và -1.

-Giả sử ta có phân số $\frac{a}{b}$. Phân số $\frac{a}{b}$ được gọi là phân số tối giản khi và chỉ khi $\text{ÖCLN}(a,b)=1$.

- Nếu phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì phân số $\frac{b}{a}$ cũng là phân số tối giản.

- Tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

-Tính chất:

$$+ \begin{cases} a:m \\ b:m \end{cases} \Rightarrow a \pm b:m$$

$$+ a:m \Rightarrow a.k:m$$

-Thuật toán Ơclit tìm ƯCLN(a;b):

Ta tìm ƯCLN(a ;b) bằng cách dùng thuật toán Euclide như sau :

$$a = bq_0 + r_1 \quad \text{với } 0 < r_1 < |b|$$

$$b = r_1 q_1 + r_2 \quad \text{với } 0 < r_2 < r_1$$

....

$$r_{n-1} = r_n q_n .$$

Thuật toán phải kết thúc với một số dư bằng 0

Do đó ta có: $(a; b) = (b; r_1) = (r_1; r_2) = \dots = (r_{n-1}; r_n) = r_n$.

PHẦN II.CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Chứng minh phân số với tham số n là phân số tối giản.

I.Phương pháp giải

Chứng minh phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, ta cần chứng minh $ƯCLN(a,b) = \pm 1$, hoặc dùng thuật toán Euclide hoặc tổng (hiệu) của một số nguyên và một phân số tối giản là một phân số tối giản.

II.Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n khác 0 thì các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{1}{n}$

b. $\frac{n+1}{n}$

c. $\frac{n-1}{n}$

Lời giải

a. $\frac{1}{n}$

Vì $ƯCLN(1,n) = 1$ nên $\frac{1}{n}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{n+1}{n}$

*Cách 1: Theo thuật toán Euclide: $ƯCLN(n+1,n) = ƯCLN(n;1) = 1$

do đó $\frac{n+1}{n}$ là phân số tối giản.

*Cách 2: Giả sử $UCLN(n+1, n) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n+1):d \\ n:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow n+1 - n : d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy $\frac{n+1}{n}$ là phân số tối giản.

*Cách 3: Ta có: $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ mà $\frac{1}{n}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{n+1}{n}$ là phân số tối giản.

Bài 2: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{Z}$ các phân số sau tối giản.

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| a. $\frac{n}{2n+1}$ | b. $\frac{1}{7n+1}$ | c. $\frac{n+5}{n+6}$ | d. $\frac{n+1}{2n+3}$ |
| e. $\frac{3n+2}{5n+3}$ | f. $\frac{7n+1}{14n+3}$ | g. $\frac{2n+7}{3n+10}$ | h. $\frac{2n+3}{4n+4}$ |

Lời giải

a. $\frac{n}{2n+1}$

Giả sử $UCLN(n, 2n+1) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} n:d \\ 2n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n:d \\ 2n+1:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2n+1) - 2n : d$$

$$\Rightarrow 2n+1 - 2n : d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{n}{2n+1}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{1}{7n+1}$

Vì $UCLN(1, 7n+1) = 1$ nên $\frac{1}{7n+1}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{n+5}{n+6}$

Giả sử $UCLN(n+5, n+6) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} n+5:d \\ n+6:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n+6) - (n+5) : d$$

$$\Rightarrow n+6 - n - 5 : d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{n+5}{n+6}$ là phân số tối giản.

d. $\frac{n+1}{2n+3}$

Giả sử $UCLN(n+1, 2n+3) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1:d \\ 2n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+2:d \\ 2n+3:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2n+3) - (2n+2) : d$$

$$\Rightarrow 2n+3 - 2n - 2 : d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{n+1}{2n+3}$ là phân số tối giản.

e. $\frac{3n+2}{5n+3}$

Giả sử $UCLN(3n+2, 5n+3) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2:d \\ 5n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3n+2):d \\ 3(5n+3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15n+10:d \\ 15n+9:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15n+10) - (15n+9) : d$$

$$\Rightarrow 15n+10 - 15n - 9 : d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{3n+2}{5n+3}$ là phân số tối giản.

f. $\frac{7n+1}{14n+3}$

Giả sử $UCLN(7n+1, 14n+3) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 7n+1:d \\ 14n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(7n+1):d \\ 14n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14n+2:d \\ 14n+3:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (14n+3) - (14n+2) : d$$

$$\Rightarrow 14n+3 - 14n - 2 : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{7n+1}{14n+3}$ là phân số tối giản.

g. $\frac{2n+7}{3n+10}$

Giả sử $UCLN(2n+7, 3n+10) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+7 : d \\ 3n+10 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+7) : d \\ 2(3n+10) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+21 : d \\ 6n+20 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+21) - (6n+20) : d$$

$$\Rightarrow 6n+21 - 6n - 20 : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{2n+7}{3n+10}$ là phân số tối giản.

h. $\frac{2n+3}{4n+4}$

Giả sử $UCLN(2n+3, 4n+4) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+3 : d \\ 4n+4 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3) : d \\ 4n+4 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6 : d \\ 4n+4 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+6) - (4n+4) : d$$

$$\Rightarrow 4n+6 - 4n - 4 : d$$

$$\Rightarrow 2 : d$$

Vì $2n+3$ là số lẻ, $4n+4$ là số chẵn nên suy ra $d=1$

Vậy phân số $\frac{2n+3}{4n+4}$ là phân số tối giản.

Bài 3: Chứng minh rằng các phân số sau tối giản:

a. $\frac{n^2+1}{n}$

b. $\frac{n}{n^2+1}$

c. $\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$

d. $\frac{n}{n^3+1}$

e. $\frac{2n^2+n+1}{n}$

Lời giải

a. $\frac{n^2+1}{n}$

$$UCLN(n^2+1, n) = UCLN(n; 1) = 1$$

Ta có: Theo thuật toán Euclide:

$$\frac{n^2+1}{n}$$

Do đó: phân số $\frac{n^2+1}{n}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{n}{n^2+1}$

$$\frac{n^2+1}{n}$$

$$\frac{n}{n^2+1}$$

Vì phân số $\frac{n^2+1}{n}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{n}{n^2+1}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$

$$UCLN(7n^2+n+1, 7n+1) = UCLN(7n+1; 1) = 1$$

Ta có: Theo thuật toán Euclide:

$$\frac{7n^2+n+1}{7n+1}$$

Do đó: phân số $\frac{7n^2+n+1}{7n+1}$ là phân số tối giản.

$$\frac{7n^2+n+1}{7n+1}$$

$$\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$$

Vì phân số $\frac{7n^2+n+1}{7n+1}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{7n+1}{7n^2+n+1}$ là phân số tối giản.

d. $\frac{n}{n^3+1}$

$$UCLN(n^3+1, n) = UCLN(n; 1) = 1$$

Ta có: Theo thuật toán Euclide:

$$\frac{n^3+1}{n}$$

Do đó: phân số $\frac{n^3+1}{n}$ là phân số tối giản.

$$\frac{n^3+1}{n}$$

$$\frac{n}{n^3+1}$$

Vì phân số $\frac{n^3+1}{n}$ là phân số tối giản nên phân số $\frac{n}{n^3+1}$ là phân số tối giản.

e. $\frac{2n^2+n+1}{n}$

$$UCLN(2n^2+n+1, n) = UCLN(n; 1) = 1$$

Ta có: Theo thuật toán Euclide:

$$\frac{2n^2+n+1}{n}$$

Do đó: phân số $\frac{2n^2+n+1}{n}$ là phân số tối giản.

$$\frac{a}{a+2}$$

Bài 4: Cho a là số tự nhiên chia 4 dư 3. Phân số $\frac{a}{a+2}$ có là phân số tối giản không?

Lời giải

Giả sử $UCLN(a, a+2) = d$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a:d \\ a+2:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+2) - a : d$$

$$\Rightarrow a+2 - a : d$$

$$\Rightarrow 2:d$$

Vì a là số tự nhiên chia 4 dư 3 nên a là số lẻ.

Suy ra: $d=1$

Vậy phân số $\frac{a}{a+2}$ là phân số tối giản.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu a là số nguyên khác -1 thì giá trị của biểu thức

$A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$A = \frac{a^3 + 2a^2 - 1}{a^3 + 2a^2 + 2a + 1} = \frac{(a+1)(a^2 + a - 1)}{(a+1)(a^2 + a + 1)} = \frac{a^2 + a - 1}{a^2 + a + 1}$$

Ta có:

Gọi $d = UCLN(a^2 + a - 1, a^2 + a + 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + a - 1:d \\ a^2 + a + 1:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [a^2 + a + 1 - (a^2 + a - 1)] : d$$

$$\Rightarrow 2:d$$

Mà $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ là số lẻ nên d lẻ $\Rightarrow d=1$

Vậy với a khác -1 thì giá trị của A là phân số tối giản.

Bài 6: Chứng minh với mọi số nguyên n khác không thì phân số $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Giả sử $d = UCLN[2n+1, 2n(n+1)]$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1:d \\ 2n(n+1):d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1:d \\ n(2n+2):d \end{cases}$$

Mà $UCLN(2n+1, 2n+2) = 1$ nên

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+1:d \\ n:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+1:d \\ 2n:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2n+1 - 2n:d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ là phân số tối giản.

Dạng 2: Tìm tham số n để phân số tối giản.

I. Phương pháp giải

- Bước 1: Giả sử d là ước chung của tử và mẫu $\Rightarrow$ Tử và mẫu cùng chia hết cho d .

- Bước 2: Vận dụng các tính chất quan hệ chia hết để tìm các giá trị của d .

- Bước 3: Xác định giá trị khác -1 và 1 của $d \Rightarrow$ tử hoặc mẫu không chia hết cho các giá trị đó $\Rightarrow$ từ đó tìm các điều kiện của ẩn.

Hoặc biến đổi phân số thành tổng hoặc hiệu của số nguyên với phân số tối giản.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{2n+3}{4n+1}$

b. $\frac{3n+2}{7n+1}$

c. $\frac{2n+7}{5n+2}$

Lời giải

a. $\frac{2n+3}{4n+1}$

Giả sử $d \in UC(2n+3, 4n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+3:d \\ 4n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3):d \\ 4n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6:d \\ 4n+1:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+6) - (4n+1):d$$

$$\Rightarrow 4n+6 - 4n-1:d$$

$$\Rightarrow 5:d \Rightarrow d \in \{ \pm 1; \pm 5 \}$$

Để phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 5$

Hay $2n+3$ không chia hết cho 5.

Ta có: $2n+3 \neq 5k \Leftrightarrow 2n+3 - 5 \neq 5k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n-1) \neq 5k$$

$$\Leftrightarrow n-1 \neq 5k \Leftrightarrow n \neq 5k+1$$

Vậy: với $n \neq 5k+1$ thì phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{3n+2}{7n+1}$

Giả sử $d \in UC(3n+2, 7n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2:d \\ 7n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(3n+2):d \\ 3(7n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21n+14:d \\ 21n+3:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (21n+14) - (21n+3):d$$

$$\Rightarrow 21n+14 - 21n - 3:d$$

$$\Rightarrow 11:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Để phân số $\frac{3n+2}{7n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 11$

Hay $7n+1$ không chia hết cho 11.

Ta có: $7n+1 \neq 11k \Leftrightarrow 7n+1 - 11k \neq 0 \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 7(n-3) \neq 11k$$

$$\Leftrightarrow n-3 \neq 11k \Leftrightarrow n \neq 11k+3$$

Vậy: với $n \neq 11k+3$ thì phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản.

c. $\frac{2n+7}{5n+2}$

Giả sử $d \in UC(2n+7, 5n+2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n+7:d \\ 5n+2:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(2n+7):d \\ 2(5n+2):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10n+35:d \\ 10n+4:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (10n+35) - (10n+4):d$$

$$\Rightarrow 10n+35 - 10n - 4:d$$

$$\Rightarrow 31:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 31\}$$

Để phân số $\frac{2n+7}{5n+2}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 31$

Hay $5n+2$ không chia hết cho 31.

Ta có: $5n+2 \neq 31k \Leftrightarrow 5n+2 - 31k \neq 0 \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n-12) \neq 31k$$

$$\Leftrightarrow n-12 \neq 31k \Leftrightarrow n \neq 31k+12$$

Vậy: với $n \neq 31k+12$ thì phân số $\frac{2n+3}{4n+1}$ là phân số tối giản.

Bài 2 : Tìm tất cả các số nguyên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{3n+4}{n-1}$

b. $\frac{2n-9}{n-1}$

c. $\frac{n^2-n-7}{n-1}$

Lời giải

a. $\frac{3n+4}{n-1}$

Ta có: $\frac{3n+4}{n-1} = \frac{3n-3+7}{n-1} = 3 + \frac{7}{n-1}$ (với $n \neq 1$)

Để $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $UCLN(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $UCLN(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1:7$ hay $n-1=7k (k \in \mathbb{Z})$ do đó $n=7k+1 (k \in \mathbb{Z})$ nên $UCLN(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$

Vậy: phân số $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$

b. $\frac{2n-9}{n-1}$

Ta có: $\frac{2n-9}{n-1} = \frac{2n-2-7}{n-1} = 2 - \frac{7}{n-1}$ (với $n \neq 1$)

Để $\frac{2n-9}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $UCLN(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $UCLN(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1:7$ hay $n-1=7k (k \in \mathbb{Z})$ do đó $n=7k+1 (k \in \mathbb{Z})$ nên $UCLN(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$

Vậy: phân số $\frac{3n+4}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$

c. $\frac{n^2 - n - 7}{n-1}$

Ta có: $\frac{n^2 - n - 7}{n-1} = n - \frac{7}{n-1}$ (với $n \neq 1$)

Để $\frac{n^2 - n - 7}{n-1}$ là phân số tối giản thì $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản.

Mà $\frac{7}{n-1}$ là phân số tối giản ta phải có $UCLN(7, n-1) = 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $UCLN(7, n-1) \neq 1$ thì $n-1:7$ hay $n-1=7k (k \in \mathbb{Z})$ do đó $n=7k+1 (k \in \mathbb{Z})$ nên $UCLN(7, n-1) = 1$ khi $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$

Vậy: phân số $\frac{n^2 - n - 7}{n-1}$ là phân số tối giản khi $n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{Z})$

Bài 3: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{3}{2n+3}$ là phân số tối giản.
Lời giải

Vì 3 là số nguyên tố nên $\frac{3}{2n+3}$ là phân số tối giản khi $2n+3$ không chia hết cho 3.

Do $3:3$ nên $2n \not: 3$ khi $n \not: 3$ hay $n \neq 3k (k \in \mathbb{Z})$

Bài 4: Tìm các số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{4n^2 + 6n + 3}{n+3}$

b. $\frac{18n+3}{21n+7}$

c. $\frac{8n+193}{4n+3}$

Lời giải

a. $\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n+3}$

Giả sử $d \in UC(4n^2 + 6n + 3, 2n + 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n^2 + 6n + 3 : d \\ 2n + 3 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n^2 + 6n + 3 : d \\ 2n(2n + 3) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n^2 + 6n + 3 : d \\ 4n^2 + 6n : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n^2 + 6n + 3) - (4n^2 + 6n) : d$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 6n + 3 - 4n^2 - 6n : d$$

$$\Rightarrow 3:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n + 3}$$

Để phân số $\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n + 3}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 3$

Hay $2n + 3$ không chia hết cho 3.

Ta có: $2n + 3 \neq 3k \Leftrightarrow 2n + 3 - 9 \neq 3k \Leftrightarrow 2n - 6 \neq 3k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n - 3) \neq 3k$$

$$\Leftrightarrow n - 3 \neq 3k \Leftrightarrow n \neq 3k + 3$$

$$\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n + 3}$$

Vậy: với $n \neq 3(k + 1)$ thì phân số $\frac{4n^2 + 6n + 3}{2n + 3}$ là phân số tối giản.

$$\frac{18n + 3}{21n + 7}$$

b. $\frac{18n + 3}{21n + 7}$

Giả sử d là ước chung nguyên tố của $(18n + 3)$ và $(21n + 7)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18n + 3 : d \\ 21n + 7 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n + 3) : d \\ 6(21n + 7) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 126n + 21 : d \\ 126n + 42 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (126n + 42) - (126n + 21) : d$$

$$\Rightarrow 126n + 42 - 126n - 21 : d$$

$$\Rightarrow 21 : d \Rightarrow d \in \{3; 7\}$$

$$+ d = 3 \Rightarrow 21n + 7 : 3 \Rightarrow 7 : 3 \text{ (vô lí)}$$

$$+ d = 3 \Rightarrow 18n + 3 : 7 \Rightarrow 18n + 3n - 3n + 3 : 7 \Rightarrow 21n - 3n + 3 : 7 \Rightarrow 3 - 3n : 7 \Rightarrow n - 1 : 7$$

$$\Rightarrow n - 1 = 7k \Rightarrow n = 7k + 1$$

$$\frac{18n + 3}{21n + 7}$$

Vậy: với $n \neq 7k + 1$ thì phân số $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ là phân số tối giản.

$$\frac{8n + 193}{4n + 3}$$

c. $\frac{8n + 193}{4n + 3}$

Giả sử d là ước chung nguyên tố của $(8n + 193)$ và $(4n + 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8n + 193 : d \\ 4n + 3 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n + 193 : d \\ 2(4n + 3) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8n + 193 : d \\ 8n + 6 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (8n + 193) - (8n + 6) : d$$

$$\Rightarrow 8n + 193 - 8n - 6 : d$$

$$\Rightarrow 187 : d \Rightarrow d \in \{11; 17\}$$

$$+ d = 11 \Rightarrow 4n + 3 : 11 \Rightarrow 4n + 3 - 11 : 11 \Rightarrow 4n - 8 : 11$$

$$\Rightarrow 4(n-2):11 \Rightarrow n-2:11 \Rightarrow n=11k+2 \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ d=17 \Rightarrow 4n+3:17 \Rightarrow 4n+3+17:17 \Rightarrow 4n+20:17 \Rightarrow 4(n+5):17$$

$$\Rightarrow n+5:17 \Rightarrow n=17l-5 \ (l \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k+2, n \neq 17l-5 \ (k, l \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{8n+193}{4n+3}$ là phân số tối giản.

Bài 5: Tìm tất cả số tự nhiên n để các phân số sau là phân số tối giản.

a. $\frac{3-2n}{4n+5}$

b. $\frac{16n+5}{6n+1}$

Lời giải

a. $\frac{3-2n}{4n+5}$

Giả sử $d \in \text{OC}(3-2n, 4n+5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3-2n:d \\ 4n+5:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3-2n):d \\ 4n+5:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6-4n:d \\ 4n+5:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6-4n)+(4n+5):d$$

$$\Rightarrow 6-4n+4n+5:d$$

$$\Rightarrow 11:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Để phân số $\frac{3-2n}{4n+5}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 11$

Hay $3-2n$ không chia hết cho 11.

Ta có: $3-2n \neq 11k \Leftrightarrow 3-2n-11 \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow -2(n+4) \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n+4 \neq 11k \Leftrightarrow n \neq 11k-4 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k-4 \ (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{3-2n}{4n+5}$ là phân số tối giản.

b. $\frac{16n+5}{6n+1}$

Giả sử $d \in \text{UC}(16n+5, 6n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16n+5:d \\ 6n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(16n+5):d \\ 8(6n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48n+15:d \\ 48n+8:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (48n+15)-(48n+8):d$$

$$\Rightarrow 48n+15-48n-8:d$$

$$\Rightarrow 7:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để phân số $\frac{16n+5}{6n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 7$

Hay $6n+1$ không chia hết cho 7.

Ta có: $6n+1 \neq 7k \Leftrightarrow 6n+1-7n \neq 7k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow -1(n-1) \neq 7k \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n-1 \neq 7k \Leftrightarrow n \neq 7k+1 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k-4 \ (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{3-2n}{4n+5}$ là phân số tối giản.

Bài 6: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ tối giản.

Lời giải

Giả sử $d \in UC(3n^2+2n+3, 2n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2+2n+3:d \\ 2n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3n^2+2n+3):d \\ 3n(2n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n^2+4n+6:d \\ 6n^2+3n:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n^2+4n+6) - (6n^2+3n):d$$

$$\Rightarrow 6n^2+4n+6-6n^2-3n:d$$

$$\Rightarrow n+6:d \Rightarrow 2(n+6):d$$

$$\Rightarrow 2n+12:d$$

$$\Rightarrow 11:d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 11\}$$

Để phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 11$

Hay $2n+1$ không chia hết cho 11.

Ta có: $2n+1 \neq 11k \Leftrightarrow 2n+1+11 \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(n+6) \neq 11k \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow n+6 \neq 11k \Leftrightarrow n \neq 11k-6 \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy: với $n \neq 11k-6 \ (k \in \mathbb{Z})$ thì phân số $\frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ là phân số tối giản.

Dạng 3: Tìm tham số n để phân số không tối giản.

1. Phương pháp giải

Để một phân số không tối giản thì tử số và mẫu số phải có ít nhất một ước chung là một số nguyên tố.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm tất cả các số nguyên n để $\frac{7}{n-1} (n \neq 1)$ là phân số chưa tối giản.

Lời giải

Để $\frac{7}{n-1} (n \neq 1)$ không là phân số tối giản ta phải có $UCLN(n-1; 7) \neq 1$

Vì 7 là số nguyên tố do đó nếu $UCLN(n-1; 7) \neq 1$ thì $n-1 \vdots 7$

hay $n-1 = 7k (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$, do đó $n = 7k + 1 (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên n để $A = \frac{63}{3n+1}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Ta có $63 = 3^2 \cdot 7$ nên A không phải là phân số tối giản khi $3n+1$ chia hết cho 3 hoặc 7.

Vì $3n+1$ không chia hết cho 3 nên $3n+1$ phải chia hết cho 7.

hay $3n+1 \vdots 7 \Rightarrow 3(n-2) \vdots 7 \Rightarrow n-2 \vdots 7$ (vì $(3; 7) = 1$)

do đó $n = 7k + 2 (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$

Vậy $n = 7k + 2$ để $A = \frac{63}{3n+1}$ không là phân số tối giản.

Bài 3: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $B = \frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $6n+7$ và $3n+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6n+7 \vdots d \\ 3n+2 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+7 \vdots d \\ 6n+4 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+7) - (6n+4) \vdots d \text{ hay } 3 \vdots d$$

Vì d là ước nguyên tố nên $d = 3$

Khi đó $(3n+2) \vdots 3 \Rightarrow 2 \vdots 3$ vô lý

Vậy không có số tự nhiên n để phân số $B = \frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Bài 4: Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số $\frac{3n^2 + 2n + 3}{2n + 1}$ không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $3n^2 + 2n + 3$ và $2n + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2 + 2n + 3 : d \\ 2n + 1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3n^2 + 2n + 3) : d \\ 3n(2n + 1) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [2(3n^2 + 2n + 3) - 3n(2n + 1)] : d \text{ hay } 2n + 12 : d \Rightarrow 2n + 1 + 11 : d$$

$$\text{Suy ra } 11 : d \Rightarrow d = 11$$

$$\text{Khi đó } (2n + 1 - 11) : 11 \text{ hay } 2(n - 5) : 11 \Rightarrow n - 5 : 11$$

$$\Rightarrow n = 11k + 5 (k \in \mathbb{N})$$

Vậy với $n = 11k + 5 (k \in \mathbb{N})$ để phân số $\frac{3n^2 + 2n + 3}{2n + 1}$ không là phân số tối giản.

Bài 5: Chứng minh rằng: $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}$ là phân số chưa tối giản.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}} = \frac{\overline{ab} \cdot 101}{\overline{cd} \cdot 101} = \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$$

Vậy $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}$ là phân số chưa tối giản.

Bài 6: Phân số $\frac{4n + 7}{6n + 5} (n \in \mathbb{N})$ rút gọn cho những số nguyên dương nào?

Lời giải

Gọi $d (d \in \mathbb{Z}^+)$ là ước chung (nếu có) của $4n + 7$ và $6n + 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n + 7 : d \\ 6n + 5 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(4n + 7) : d \\ 2(6n + 5) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [3(4n + 7) - 2(6n + 5)] : d$$

$$\text{Suy ra } 11 : d \Rightarrow d = 11$$

Vậy phân số $\frac{4n + 7}{6n + 5} (n \in \mathbb{N})$ hoặc tối giản hoặc chỉ rút gọn được cho 11.

Dạng 4: Chứng minh phân số tối giản với điều kiện cho trước

1. Phương pháp giải

- Dùng phương pháp phản chứng.
- Dùng định nghĩa phân số tối giản.

II. Bài toán

Bài 1: Cho phân số $\frac{p}{q}$ ($q \in \mathbb{N}^*$) tối giản. Chứng minh rằng phân số $\frac{p+q}{q}$ tối giản.

Lời giải

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $\frac{p+q}{q}$ không tối giản tức là tử $p+q$ và mẫu q có một ước chung $d \neq 1$.

$$p+q : d; q : d \Rightarrow p : d$$

suy ra

như vậy p và q có một ước chung $d \neq 1$.

Điều này trái với đề bài đã có $\frac{p}{q}$ tối giản

Vậy $\frac{p+q}{q}$ là phân số tối giản.

Bài 2: Cho phân số $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$) là phân số chưa tối giản. Chứng minh rằng

phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng chưa tối giản.

Lời giải

Vì phân số $\frac{a}{b}$ là phân số chưa tối giản nên $UCLN(a, b) = d$ ($d \in \mathbb{Z}, d \neq 0, d \neq \pm 1$)

$$\Rightarrow a : d, b : d \Rightarrow (a+b) : d$$

$$\Rightarrow d \in UC(a+b, b) \text{ mà } d \neq 0, d \neq \pm 1$$

Do đó phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng chưa tối giản.

Bài 3: Cho phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$) xét xem phân số $\frac{11a+2b}{18a+5b}$ có là phân số tối giản không?

Lời giải

Gọi $UCLN(11a+2b; 18a+5b) = d$ thì

$$\begin{cases} 18a + 5b : d \\ 11a + 2b : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11(18a + 5b) : d \\ 18(11a + 2b) : d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 \cdot 18a + 55b : d \\ 11 \cdot 18a + 36b : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (11.18n + 55b) - (11.18b + 36b) : d$$

$$\Rightarrow 55b - 36b = 19b : d \Rightarrow b : d \text{ hoặc } 19 : d$$

+ Nếu $b : d$ ta có

$$\begin{cases} 18a + 5b : d \\ 11a + 2b : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.(18a + 5b) : d \\ 5.(11a + 2b) : d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 54a + 15b : d \\ 55a + 10b : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - 5b : d \text{ mà } b : d \text{ nên } \Rightarrow 5b : d \Rightarrow a : d$$

Mặt khác do $\frac{a}{b}$ tối giản nên $d = 1$ (1)

+ Nếu $19 : d$ thì $d = 19$ hoặc $d = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{11a + 2b}{18a + 5b}$ hoặc tối giản hoặc rút gọn được cho 19.

Bài 4: Tìm số tự nhiên m nhỏ nhất khác 1 để các phân số $\frac{15}{m}, \frac{28}{m}$ đều tối giản.
Lời giải

Xét phân số $\frac{15}{m}$, có $15 = 3 \cdot 5$

Nên phân số $\frac{15}{m}$ tối giản khi $m \neq 3k; m \neq 5k (k \in \mathbb{Z}^+)$

Xét phân số $\frac{28}{m}$, có $28 = 2^2 \cdot 7$

Nên phân số $\frac{28}{m}$ tối giản khi $m \neq 2k; m \neq 7k (k \in \mathbb{Z}^+)$

Vậy các phân số $\frac{15}{m}, \frac{28}{m}$ cùng tối giản khi $m \neq 3k; m \neq 5k; m \neq 2k; m \neq 7k (k \in \mathbb{Z}^+)$

Mặt khác, m là số tự nhiên nhỏ nhất khác 1 nên ta chọn $m = 11$.

Vậy $m = 11$ thì các phân số $\frac{15}{m}, \frac{28}{m}$ đều tối giản.

Bài 5: Tìm các số nguyên $b (21 \leq b \leq 31)$ sao cho các phân số $\frac{7}{b}, \frac{10}{b}, \frac{11}{b}$ đều là phân số tối giản.

Lời giải

Ta có $10 = 2 \cdot 5$ nên để các phân số $\frac{7}{b}, \frac{10}{b}, \frac{11}{b}$ đều là phân số tối giản thì $b \neq 2k; b \neq 5k; b \neq 7k; b \neq 11k (k \in \mathbb{Z}^+)$

Vì $b \in \mathbb{Z}, 21 \leq b \leq 31$ nên ta chọn $b \in \{23; 27; 29; 31\}$.

Vậy $b \in \{23; 27; 29; 31\}$ thì các phân số $\frac{7}{b}; \frac{10}{b}; \frac{11}{b}$ đều là phân số tối giản.

Bài 6: Tìm số tự nhiên m nhỏ nhất để các phân số $\frac{7}{m+9}; \frac{8}{m+10}; \dots; \frac{31}{m+33}$ đều tối giản.

Lời giải

Ta có
$$\frac{7}{m+9} = \frac{7}{7+(m+2)}$$

$$\frac{8}{m+10} = \frac{8}{8+(m+2)}$$

.....

$$\frac{31}{m+33} = \frac{31}{31+(m+2)}$$

Các phân số trên có dạng $\frac{a}{a+(m+2)}$

Để các phân số trên tối giản thì a và $m+2$ là hai số nguyên tố cùng nhau (vì nếu chúng không là hai số nguyên tố cùng nhau thì chúng cùng chia hết cho số $d \neq 1$ suy ra phân số rút gọn được cho d)

Ta cần tìm số tự nhiên m sao cho $m+2$ nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $7; 8; \dots; 31$

Như vậy $m+2$ phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn 31 đó là số 37
 $m+2 = 37 \Rightarrow m = 35$

Vậy với $m = 35$ thì các phân số $\frac{7}{m+9}; \frac{8}{m+10}; \dots; \frac{31}{m+33}$ đều tối giản.

Bài 7: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số $\frac{5}{n+8}; \frac{6}{n+9}; \dots; \frac{17}{n+20}$ đều tối giản.

Lời giải

Ta có
$$\frac{5}{n+8} = \frac{5}{5+(n+3)}$$

$$\frac{6}{n+9} = \frac{6}{6+(n+3)}$$

.....

$$\frac{17}{n+20} = \frac{17}{17+(n+3)}$$

Các phân số trên có dạng $\frac{a}{a+(n+3)}$

Để các phân số trên tối giản thì a và $n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau (vì nếu chúng không là hai số nguyên tố cùng nhau thì chúng cùng chia hết cho số $d \neq 1$ suy ra phân số rút gọn được cho d)

Ta cần tìm số tự nhiên n sao cho $n+3$ nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $5; 6; \dots; 17$

Như vậy $n+3$ phải là số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn 17 đó là số 19
 $n+3=19 \Rightarrow n=16$

Vậy với $n=16$ thì các phân số $\frac{5}{n+8}; \frac{6}{n+9}; \dots; \frac{17}{n+20}$ đều tối giản.

Bài 8: Tìm $n \in \mathbb{N}, n > 2$ để phân số $\frac{n+7}{n-2}$ tối giản.

Lời giải

Ta có phân số $\frac{n+7}{n-2}$ tối giản nên $UCLN(n+7, n-2)=1$

Mà $(n+7)-(n-2)=9$ nên $UCLN(n-2; 9)=1$

Do đó $n-2 \nmid 9$

Đặt $n-2 \neq 3a (a \in \mathbb{N})$

Vậy $n \neq 2+3a (a \in \mathbb{N})$

Bài 9: Chứng minh rằng $5n^2+1 \nmid 6$, với $n \in \mathbb{N}$ thì $\frac{n}{2}; \frac{n}{3}$ là các phân số tối giản.

Lời giải

Vì với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $5n^2+1 \nmid 6 \Rightarrow n^2 \nmid 6 \Rightarrow n \nmid 6$ và n không chia hết cho 3

Vậy $\frac{n}{2}; \frac{n}{3}$ là các phân số tối giản.

Bài 10: Chứng tỏ rằng nếu $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì:

a) Phân số $\frac{a+b}{b}$ cũng là phân số tối giản, suy ra $\frac{246913579}{123456790}$ là tối giản.

b) Phân số $\frac{a-b}{b}$ hoặc $\frac{b-a}{b}$ cũng là phân số tối giản.

Lời giải

a) Vì phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nên $UCLN(a, b) = 1$

$$UCLN(a, b) = UCLN(a+b, b) = 1$$

mà

Do đó phân số $\frac{a+b}{b}$ là phân số tối giản.

$$\frac{246913579}{123456790} = \frac{123456789}{123456790} + 1$$

Suy ra

$$\frac{123456789}{123456790}$$

Mà $\frac{123456790}{123456790}$ là phân số tối giản

$$\frac{246913579}{123456790}$$

Vậy $\frac{246913579}{123456790}$ là phân số tối giản.

b) Ta có phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản nên $UCLN(a, b) = 1$

mà $UCLN(a, b) = UCLN(a-b, b) = UCLN(b-a, b) = 1$

nên phân số $\frac{a-b}{b}$ hoặc $\frac{b-a}{b}$ là phân số tối giản.

Bài 11: CMR nếu $(a-1; b+1)=1$ thì $A = \frac{3a+5b+2}{5a+8b+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = UCLN(3a+5b+2; 5a+8b+3) \Rightarrow 5(3a+5b+2) - 3(5a+8b+3); d$

$$\Rightarrow b+1; d \quad (1)$$

$$\text{Và } 8(3a+5b+2) - 5(5a+8b+3); d \Rightarrow a-1; d \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d \in UC(a-1; b+1)$

Mà $UCLN(a-1; b+1) = 1 \Rightarrow d = \pm 1$

Vậy nếu $(a-1; b+1)=1$ thì $A = \frac{3a+5b+2}{5a+8b+3}$ là phân số tối giản.

Dạng 5: Tìm phân số tối giản thỏa mãn điều kiện cho trước

1. Phương pháp giải

Dùng định nghĩa hai phân số bằng nhau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) mà giá trị của nó không đổi khi cộng thêm tử với 4, mẫu với 10.

Lời giải

Với $b \neq 0$, ta có:

Khi cộng thêm tử với 4, mẫu với 10 vào phân số $\frac{a}{b}$ ta được phân số $\frac{a+4}{b+10}$

Lúc này ta có: $\frac{a}{b} = \frac{a+4}{b+10}$

Từ tính chất hai phân số bằng nhau đã học ta có $a(b+10) = b(a+4)$

Suy ra $10a = 4b$ nên $\frac{a}{b} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$.

Bài 2: Tìm phân số tối giản biết rằng khi cộng mẫu vào tử và cộng mẫu vào tử thì giá trị của phân số đó tăng lên gấp 2 lần.

Lời giải

Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), theo đề bài ta có: $\frac{a+b}{b+b} = \frac{2a}{b}$ hay $\frac{a+b}{2b} = \frac{2a}{b}$

suy ra $ab + bb = 4ab$ hay $3ab = bb$

suy ra $\frac{ab}{bb} = \frac{1}{3}$ hay $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ (vì $b \neq 0$)

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

Bài 3: Tìm phân số dương tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) nhỏ nhất sao cho khi nhân phân số

này với các phân số $\frac{14}{5}; \frac{12}{25}$ thì kết quả là các số nguyên dương.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} \cdot \frac{14}{5} = \frac{14a}{5b} \in \mathbb{N}$

Mà $UCLN(a, b) = 1$ nên a là bội của 5 và b là ước của 14⁽¹⁾

Lại có $\frac{a}{b} \cdot \frac{12}{25} = \frac{12a}{25b} \in \mathbb{N}$

Mà $UC(a.b)=1$ nên a là bội của 25 và b là ước của 12 ⁽²⁾

Từ ⁽¹⁾ và ⁽²⁾ suy ra $a = BCNN(5;25) = 25$; $b = UCLN(14;12) = 2$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{25}{2}$.

Bài 4: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \in N^*$) biết rằng lấy tử cộng với 6 , lấy mẫu cộng với 14 thì được một phân số bằng $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a+6}{b+14} = \frac{3}{7}$

Suy ra $7(a+6) = 3(b+14)$

$$7a + 42 = 3b + 42$$

$$7a = 3b$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$.

Bài 5: Tìm phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($b \in N^*$) biết rằng lấy tử cộng với 7 , lấy mẫu cộng với 20 thì giá trị của phân số không đổi.

Lời giải

Ta có $\frac{a+7}{b+20} = \frac{a}{b}$

Suy ra $b(a+7) = a(b+20)$

$$ab + 7b = ab + 20a$$

$$7b = 20a$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{20}$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{7}{20}$.

Bài 6: Tìm một phân số tối giản biết rằng khi cộng mẫu vào tử để có tử mới và lấy mẫu trừ tử để có mẫu mới thì được một số chính phương chẵn bé nhất.

Lời giải

Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{b}$ ($b \in \mathbb{N}^*, a \neq b$), theo đề bài ta có: $\frac{a+b}{b-a} = 4$

suy ra $a+b = 4b-4a$ hay $5a=3b$

suy ra $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

Bài 7: Tìm phân số tối giản có mẫu là 11 , biết rằng khi cộng tử với -18 , nhân mẫu với 7 thì được một phân số bằng phân số ban đầu.

Lời giải

Gọi phân số cần tìm là $\frac{x}{11}$ ($x \in \mathbb{Z}$). Theo đề bài ta có:

$$\frac{x}{11} = \frac{x+(-18)}{11 \cdot 7}$$

$$\Rightarrow \frac{7x}{11 \cdot 7} = \frac{x+(-18)}{11 \cdot 7} \Rightarrow 7x = x - 18$$

$$\Rightarrow 6x = -18$$

$$\Rightarrow x = -3$$

Vậy phân số cần tìm là $\frac{-3}{11}$.

Bài 8: Tìm một phân số khi chưa tối giản có tổng của tử và mẫu là 1100 , sau khi

rút gọn được $\frac{3}{7}$. Tìm phân số ban đầu.

Lời giải

Phân số ban đầu cần tìm $\frac{3n}{7n}$ và $3n+7n=1100$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Hay $10n=1100 \Rightarrow n=110$

Vậy phân số ban đầu là $\frac{330}{770}$.

Bài 9: a) Với a là một số nguyên tố nào thì phân số $\frac{a}{74}$ là phân số tối giản.

b) Với b là một số nguyên tố nào thì phân số $\frac{b}{225}$ là phân số tối giản.

Lời giải

a) Ta có $\frac{a}{74} = \frac{a}{2 \cdot 37}$ là phân số tối giản khi a là số nguyên tố khác 2 và 37 .

b) Ta có $\frac{b}{225} = \frac{b}{3^2 \cdot 5^2}$ là phân số tối giản khi b là số nguyên tố khác 3 và 5.

Bài 10: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để $\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{255}{1083}$.

Lời giải

$$UCLN(n^3 + 5n + 1; n^4 + 6n^2 + n + 5) = d \quad (d \in \mathbb{N}^*) \text{ suy ra}$$

Gọi

$$\begin{cases} n^3 + 5n + 1 : d \\ n^4 + 6n^2 + n + 5 : d \end{cases} \Rightarrow [(n^4 + 6n^2 + n + 5) - n(n^3 + 5n + 1)] : d$$

Hay $n^2 + 5 : d$

$$\text{Do đó } [(n^3 + 5n + 1) - n(n^2 + 5)] : d \text{ hay } 1 : d \Rightarrow d = 1$$

$$\text{Ta có } \frac{255}{1083} = \frac{85}{361}$$

$$\frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5}; \frac{85}{361} \text{ tối giản và } \frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{85}{361}$$

Vì dạng tối giản của phân số là duy nhất nên

$$\begin{cases} n^3 + 5n + 1 = 85 \\ n^4 + 6n^2 + n + 5 = 361 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 5n + 1 = 85 \\ n(n^3 + 5n + 1) + n^2 + 5 = 361 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^2 + 85n - 356 = 0$$

$$n^2 - 4n + 89n - 365 = 0$$

$$n(n - 4) + 89(n - 4) = 0$$

$$(n - 4)(n + 89) = 0$$

$$\Rightarrow n - 4 = 0 \quad (\text{vì } n + 89 > 0)$$

$$n = 4$$

$$\text{Vậy với } n = 4 \text{ thì } \frac{n^3 + 5n + 1}{n^4 + 6n^2 + n + 5} = \frac{255}{1083}$$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: (HUYỆN HOA LƯ NĂM 2020-2021)

Cho $A = \frac{2n+5}{n+3}$. Chứng tỏ A là phân số tối giản.

Lời giải

ĐK: $n \neq -3$

Gọi $UCLN(n+3, 2n+5) : d$

$$\Rightarrow (n+3);d;(2n+5);d$$

$$\Rightarrow 2(n+3);d;(2n+5);d$$

$$\Rightarrow [(2n+6)-(2n+5)];d$$

$$\Rightarrow 1;d$$

$$\Rightarrow d=1$$

Vậy A là phân số tối giản

Bài 2: (HUYỆN PHÙ CÁT NĂM 2020-2021)

Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Gọi } UCLN(n+1, 3n-1) = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1;d \\ 3n-1;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n+3;d \\ 3n-1;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3n+3)-(3n-1);d$$

$$\Rightarrow 4;d$$

$$\Rightarrow d \in \{1;2;4\}$$

Để $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản thì $d \notin \{2;4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 \not\vdots 2 \\ n+1 \not\vdots 4 \end{cases} \Rightarrow n+1 \not\vdots 2$$

$$\Rightarrow n+1 \neq 2k (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow n \neq 2k-1$$

Vậy $n \neq 2k-1 (k \in \mathbb{N}^*)$ thì phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản

Bài 3: (HUYỆN THANH BA NĂM 2020-2021)

Chứng minh phân số sau là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n : $\frac{12n+1}{30n+2}$.

Lời giải

$$\text{Gọi } UCLN(12n+1, 30n+2) = d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+1;d \\ 30n+2;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1);d \\ 2(30n+2);d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n + 5) - (60n + 4) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Bài 4: (HUYỆN CHƯƠNG MỸ NĂM 2020-2021)

$$P = \frac{3n+5}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Cho phân số

a) Chứng tỏ rằng phân số P tối giản.

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của biểu thức P.

Lời giải

$$P = \frac{3n+5}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Cho phân số

a) Gọi $UCLN(3n+5, n+2) = d$

$$\Rightarrow 3n+5 \vdots d \text{ và } n+2 \vdots d$$

$$\Rightarrow 3(n+2) - (3n+5) \vdots d$$

$$\Rightarrow 1 \vdots d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Suy ra phân số $P = \frac{3n+5}{n+2} \quad (n \in \mathbb{Z})$ tối giản.

b) Ta có: $P = \frac{3n+5}{n+2} \quad (n \in \mathbb{Z})$

$$P = \frac{3(n+2) - 1}{n+2}$$

$$P = 3 - \frac{1}{n+2}$$

Để P đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{1}{n+2}$ đạt giá trị âm nhỏ nhất, mà $n \in \mathbb{Z}$ nên $n+2$ đạt giá trị nguyên âm lớn nhất khi $n = -3$.

Khi đó giá trị lớn nhất của P là: $P = 3 - \frac{1}{-3+2} = 4$.

Để P đạt giá trị nhỏ nhất thì $\frac{1}{n+2}$ đạt giá trị dương lớn nhất; mà $n \in \mathbb{Z}$ nên $n+2$ đạt giá trị nguyên dương nhỏ nhất khi $n = -1$.

Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là: $P = 3 - \frac{1}{-1+2} = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 4, đạt tại $n = -3$

Giá trị nhỏ nhất của P bằng 2, đạt tại $n = -1$.

Bài 5: (HSG SƠN TỊNH NĂM 2020-2021)

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n , phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $UCLN(12n+5, 15n+6) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12n+5 : d \\ 15n+6 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+5) : d \\ 4(15n+6) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+25) - (60n+24) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Bài 6: (HUYỆN NHÓ QUAN NĂM 2020-2021)

Chứng tỏ rằng với n là số nguyên dương thì $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = UCLN(14n+3, 24n+5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14n+3 : d \\ 24n+5 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 \cdot (14n+3) : d \\ 7 \cdot (24n+5) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 168n+36 : d \\ 168n+35 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (168n+36) - (168n+35) : d$$

$$\Rightarrow 168n+36 - 168n - 35 : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Vậy: phân số $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 7: (HUYỆN TRIỆU SƠN NĂM 2020-2021)

Tìm các số tự nhiên n để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = \text{ÖCLN}(1-3n; 2n-3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-3n:d \\ 2n-3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.(1-3n):d \\ 3.(2n-3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-6n:d \\ 6n-9:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2-6n) + (6n-9):d$$

$$\Rightarrow 2-6n+6n-9:d$$

$$\Rightarrow -7:d \Rightarrow d = \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản thì $d \neq \pm 7$

Hay $2n-3$ không chia hết cho 7

$$\Rightarrow 2n-3 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-3-7 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-10 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n-5 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n \neq 7k+5$$

Vậy: với $n \neq 7k+5$ phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Bài 8: (THỊ XÃ THÁI HÒA NĂM 2020-2021)

Chứng minh rằng phân số $\frac{4n+1}{6n+1}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Gọi $d = \text{ÖCLN}(4n+1; 6n+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4n+1:d \\ 6n+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.(4n+1):d \\ 2.(6n+1):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12n+3:d \\ 12n+2:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (12n+3) - (12n+2):d$$

$$\Rightarrow 12n+3-12n-2:d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số $\frac{4n+1}{6n+1}$ là phân số tối giản với $n \in \mathbb{N}$.

Bài 9: (HUYỆN ANH SƠN NĂM 2020-2021)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $\frac{3n+2}{5n+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d = \text{ÖCLN}(3n+2; 5n+3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+2:d \\ 5n+3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5.(3n+2):d \\ 3.(5n+3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15n+10:d \\ 15n+9:d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15n+10) - (15n+9):d$$

$$\Rightarrow 15n+10 - 15n - 9:d$$

$$\Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Vậy phân số phân số $\frac{3n+2}{5n+3}$ là phân số tối giản với $n \in \mathbb{Z}$.

Bài 10: (HUYỆN PHÚ LƯƠNG NĂM 2020-2021)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \dots, \frac{100}{n+102}$$

Lời giải

Ta có các phân số đã cho đều có dạng $\frac{x}{x+(n+2)}$ với $x \in \{7; 8; 9; \dots; 100\}$

Do đó để các phân số đều tối giản thì x và $n+2$ phải nguyên tố cùng nhau.

Suy ra $n+2$ phải nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $7; 8; 9; \dots; 100$

$\Rightarrow n+2$ là số nguyên tố nhỏ nhất và lớn hơn 100

$$\Rightarrow n+2=101$$

$$\Rightarrow n=99$$

!HẾT

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 9 - PHÂN SỐ

CHỦ ĐỀ 3: SO SÁNH HAI PHÂN SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. SO SÁNH HAI PHÂN SỐ CÙNG MẪU

Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

2. SO SÁNH HAI PHÂN SỐ KHÔNG CÙNG MẪU

Muốn so sánh hai phân số không cùng mẫu số, ta viết chúng dưới dạng hai phân số cùng mẫu dương rồi so sánh các tử số với nhau.

Tuy nhiên, nhiều bài toán sẽ gặp khó khăn khi quy đồng mẫu số các phân số. Bởi vậy, có rất nhiều cách khác nhau để so sánh các phân số, ta sẽ đi tìm hiểu ở phần sau.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: So sánh hai phân số cùng mẫu

I. Phương pháp giải

Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

II. Bài toán

Bài 1: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: $\frac{7}{36}, \frac{24}{36}, \frac{13}{36}, \frac{1}{36}, \frac{43}{36}, \frac{36}{36}$

Lời giải:

Vì các phân số trên đều có cùng mẫu số nên ta được:

$$\frac{1}{36} < \frac{7}{36} < \frac{13}{36} < \frac{24}{36} < \frac{36}{36} < \frac{43}{36}$$

Bài 2: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự giảm dần: $\frac{-5}{48}, \frac{11}{-48}, \frac{-7}{48}, \frac{13}{-48}, \frac{9}{-48}, \frac{-27}{48}$.

Lời giải:

Viết lại các phân số dưới dạng mẫu dương:

$$\frac{11}{-48} = \frac{-11}{48}; \frac{13}{-48} = \frac{-13}{48}; \frac{9}{-48} = \frac{-9}{48}.$$

Vì $-27 < -13 < -11 < -9 < -7 < -5$ nên $\frac{-27}{48} < \frac{-13}{48} < \frac{-11}{48} < \frac{-9}{48} < \frac{-7}{48} < \frac{-5}{48}$.

Vậy các phân số được sắp xếp theo thứ tự giảm dần là:

$$\frac{-5}{48}; \frac{-7}{48}; \frac{-9}{48}; \frac{-11}{48}; \frac{-13}{48}; \frac{-27}{48}.$$

Bài 3: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần:

$$\frac{-15}{24}, \frac{-36}{24}, \frac{2}{24}, \frac{-7}{24}, \frac{1}{24}, \frac{-72}{24}, \frac{-97}{24}.$$

Lời giải:

Vì $-97 < -72 < -36 < -15 < -7 < 1 < 2$ nên $\frac{-97}{24} < \frac{-72}{24} < \frac{-36}{24} < \frac{-15}{24} < \frac{-7}{24} < \frac{1}{24} < \frac{2}{24}$

Vậy các phân số được sắp xếp theo thứ tự giảm dần là:

$$\frac{-97}{24}; \frac{-72}{24}; \frac{-36}{24}; \frac{-15}{24}; \frac{-7}{24}; \frac{1}{24}; \frac{2}{24}.$$

Bài 4: Viết các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 1 mà có mẫu là 7. Sắp xếp các phân số đó theo thứ tự tăng dần.

Lời giải:

Các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 1 mà có mẫu là 7 là:

$$\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7} < \frac{6}{7} < \frac{7}{7}$$

Bài 5: Viết các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 4. Sắp xếp các phân số đó theo thứ tự tăng dần.

Lời giải:

Các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 4 là:

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < \frac{4}{4} < \frac{5}{4} < \frac{6}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4}$$

Bài 6: Viết các phân số lớn hơn hoặc bằng -1 và nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 7. Sắp xếp các phân số đó theo thứ tự giảm dần.

Lời giải:

Các phân số lớn hơn hoặc bằng -1 và nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 7 là:

$$\frac{14}{7} > \frac{13}{7} > \frac{12}{7} > \frac{11}{7} > \frac{10}{7} > \frac{9}{7} > \frac{8}{7} > \frac{7}{7} > \frac{6}{7} > \frac{5}{7} > \frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7} > \frac{0}{7} > \frac{-1}{7} > \frac{-2}{7} > \frac{-3}{7} > \frac{-4}{7} > \frac{-5}{7} > \frac{-6}{7} > \frac{-7}{7}$$

$$\frac{-9}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{-4}{11}$$

Bài 7: Điền số thích hợp vào chỗ chấm:

Lời giải:

Do các phân số đều có cùng mẫu (dương) nên ta sẽ điền tử số là dãy các số nguyên tăng dần.

$$\frac{-9}{11} < \frac{-8}{11} < \frac{-7}{11} < \frac{-6}{11} < \frac{-5}{11} < \frac{-4}{11}$$

Vậy ta điền được kết quả là:

Bài 8: Điền số thích hợp vào chỗ trống

a) $\frac{-11}{13} < \frac{\dots}{13} < \frac{\dots}{13} < \frac{\dots}{13} < \frac{-7}{13}$

b) $\frac{-8}{34} < \frac{\dots}{34} < \frac{\dots}{34} < \frac{\dots}{34} < \frac{-4}{34}$

Lời giải:

a) $\frac{-11}{13} < \frac{-10}{13} < \frac{-9}{13} < \frac{-8}{13} < \frac{-7}{13}$

b) $\frac{-8}{34} < \frac{-7}{34} < \frac{-6}{34} < \frac{-5}{34} < \frac{-4}{34}$

Bài 9: Tìm số x nguyên thỏa mãn:

a) $\frac{1}{7} < \frac{x}{7} < \frac{4}{7}$

b) $\frac{-11}{15} < \frac{x}{15} < \frac{-8}{15}$

c) $\frac{3}{7} < \frac{x}{21} < \frac{2}{3}$

Lời giải:

a) $\frac{1}{7} < \frac{x}{7} < \frac{4}{7} \Rightarrow x \in \{2; 3\}$

b) $\frac{-11}{15} < \frac{x}{15} < \frac{-8}{15} \Rightarrow x \in \{-10; -9\}$

$$c) \frac{3}{7} < \frac{x}{21} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{9}{21} < \frac{x}{21} < \frac{14}{21} \Rightarrow x \in \{10; 11; 12; 13\}$$

Dạng 2: So sánh hai phân số không cùng mẫu bằng cách quy đồng mẫu dương

I. Phương pháp giải

Quy đồng mẫu dương rồi so sánh các tử: Tử nào lớn hơn thì phân số đó lớn hơn

II. Bài toán

Bài 1: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu: a) $\frac{1}{3}$ và $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ và $\frac{3}{7}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ mà $\frac{2}{6} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{5}{6}$

b) Ta có $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$; $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$ mà $\frac{28}{35} > \frac{15}{35} \Rightarrow \frac{4}{5} > \frac{3}{7}$.

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu:

a) $\frac{-3}{11}$ và $\frac{-4}{13}$

b) $\frac{-5}{6}$ và $\frac{63}{-70}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{-3}{11} = \frac{-39}{143}$; $\frac{-4}{13} = \frac{-44}{143}$ mà $\frac{-39}{143} > \frac{-44}{143} \Rightarrow \frac{-3}{11} > \frac{-4}{13}$

b) Ta có $\frac{-5}{6} = \frac{-50}{60}$; $\frac{63}{-70} = \frac{-9}{10} = \frac{-54}{60}$ mà $\frac{-50}{60} > \frac{-54}{60} \Rightarrow \frac{-5}{6} > \frac{63}{-70}$.

Bài 3: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu:

a) $\frac{1}{2}$ và $\frac{5}{6}$

b) $\frac{4}{7}$ và $\frac{5}{9}$

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Vì $3 < 5$ nên $\frac{3}{6} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{5}{6}$

b) Ta có: $\frac{4}{7} = \frac{36}{63}$; $\frac{5}{9} = \frac{35}{63}$. Vì $36 > 35$ nên $\frac{36}{63} > \frac{35}{63} \Rightarrow \frac{4}{7} > \frac{5}{9}$

Bài 4: So sánh các phân số sau:

a) $\frac{45}{105}$ và $\frac{84}{147}$;

b) $\frac{39}{52}$ và $\frac{98}{112}$;

Lời giải:

a) $\frac{45}{105} = \frac{3}{7}$; $\frac{84}{147} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{45}{105} < \frac{84}{147}$.

b) $\frac{39}{52} = \frac{3}{4}$; $\frac{98}{112} = \frac{7}{8}$; $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} < \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{39}{52} < \frac{98}{112}$.

Bài 5: So sánh các phân số :

a) $\frac{20}{19}$ và $\frac{21}{20}$

b) $\frac{12}{129}$ và $\frac{21}{172}$

c) $\frac{63}{81}$ và $\frac{103}{135}$

Lời giải:

a) Vì $(19, 20) = 1$ nên mẫu chung là $19 \cdot 20$.

Ta có : $\frac{20}{19} = \frac{20 \cdot 20}{19 \cdot 20} = \frac{400}{380}$; $\frac{21}{20} = \frac{21 \cdot 19}{20 \cdot 19} = \frac{399}{380}$

Vì $400 > 399$ nên $\frac{20}{19} > \frac{21}{20}$.

b) Ta rút gọn các phân số trước : $\frac{12}{129} = \frac{4}{43}$

Chú ý là $172 = 43 \cdot 4$, nên ta viết $\frac{4}{43} = \frac{4 \cdot 4}{43 \cdot 4} = \frac{16}{172}$

Do $\frac{16}{172} < \frac{21}{172}$ nên $\frac{4}{43} < \frac{21}{172}$ hay $\frac{12}{129} < \frac{21}{172}$

c) Ta có : $\frac{63}{81} = \frac{7}{9}$ và $135 = 15 \cdot 9$ nên ta biến đổi như sau :

$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 15}{9 \times 15} = \frac{105}{135}$, do $105 > 103$ nên $\frac{105}{135} > \frac{103}{135} \Rightarrow \frac{63}{81} > \frac{103}{135}$

$\frac{42}{105}, \frac{144}{192}, \frac{435}{290}, \frac{1950}{910}, \frac{25025}{24024}$

Bài 6: Cho các phân số:

1. Quy đồng mẫu của các phân số ấy.

2. Sắp xếp các phân số theo thứ tự tăng dần.

Lời giải:

1) Quy đồng mẫu chung, ta được các phân số tương ứng là:

$\frac{336}{840}, \frac{630}{840}, \frac{1260}{840}, \frac{1800}{840}, \frac{875}{840}$.

2) Sau khi so sánh, ta xếp được các số theo thứ tự tăng dần như sau:

$\frac{42}{105}, \frac{144}{192}, \frac{25025}{24024}, \frac{435}{290}, \frac{1950}{910}$.

Bài 7: Tìm số nguyên dương x sao cho $\frac{1}{5} < \frac{x}{30} < \frac{1}{4}$.

Lời giải:

Trước tiên ta sẽ quy đồng mẫu số các phân số:

$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{12}{60}, \frac{x}{30} = \frac{x \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{2x}{60}, \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{15}{60}$

Vì $\frac{1}{5} < \frac{x}{30} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{60} < \frac{2x}{60} < \frac{15}{60}$ Suy ra $2x = 13$ hoặc $2x = 14$

Mà x là số nguyên dương $\Rightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7$.

Bài 8: Tìm số nguyên dương x , biết:

$$\text{a) } \frac{3}{x} \geq 1; \quad \text{b) } 1 < \frac{4}{x} \leq 2; \quad \text{c) } \frac{6}{x} < \frac{x}{3} < \frac{13}{x}.$$

Lời giải:

$$\text{a) } \frac{3}{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{x} \geq \frac{x}{x} \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$$

$$\text{b) } 1 < \frac{4}{x} \leq 2 \Rightarrow \frac{x}{x} < \frac{4}{x} \leq \frac{2x}{x} \Rightarrow x < 4 \leq 2x \Rightarrow 2 \leq x < 4 \Rightarrow x \in \{2; 3\}.$$

$$\text{c) } \frac{6}{x} < \frac{x}{3} < \frac{13}{x} \Rightarrow \frac{18}{3x} < \frac{x^2}{3x} < \frac{39}{3x} \Rightarrow 18 < x^2 < 39 \Rightarrow x^2 \in (25; 36] \\ \Rightarrow x \in (5; 6] \quad (\text{vì } x > 0).$$

Bài 9: Tìm $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $\frac{9}{56} < \frac{a}{8} < \frac{b}{7} < \frac{13}{28}$.

Lời giải:

$$\text{Từ } \frac{9}{56} < \frac{a}{8} < \frac{b}{7} < \frac{13}{28} \text{ suy ra } \frac{9}{56} < \frac{7a}{56} < \frac{8b}{56} < \frac{26}{56} \Rightarrow 9 < 7a < 8b < 26.$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}$, từ đó ta tìm được $a=2, b=2; a=2, b=3; a=3, b=3$.

Bài 10: Tìm ba phân số có mẫu khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{4}$ và nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

Quy đồng các phân số với mẫu số chung là 48 , ta được:

$$\frac{1}{4} = \frac{1.12}{4.12} = \frac{12}{48}; \quad \frac{1}{3} = \frac{1.16}{3.16} = \frac{16}{48}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{12}{48} < \frac{13}{48} < \frac{14}{48} < \frac{15}{48} < \frac{16}{48}$$

$$\text{Rút gọn các phân số trên ta được: } \frac{1}{4} < \frac{13}{48} < \frac{7}{24} < \frac{5}{16} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy ba phân số cần tìm là: } \frac{13}{48}, \frac{7}{24} \text{ và } \frac{5}{16}.$$

Bài 11: Tìm hai phân số có mẫu khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{5}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Quy đồng hai phân số $\frac{1}{5}$ và $\frac{1}{4}$ với mẫu số chung là 60, ta được:

$$\frac{1}{5} = \frac{1.12}{5.12} = \frac{12}{60}; \quad \frac{1}{4} = \frac{1.15}{4.15} = \frac{15}{60}.$$

Ta có: $\frac{12}{60} < \frac{13}{60} < \frac{14}{60} < \frac{15}{60}.$

Rút gọn các phân số trên ta được: $\frac{1}{5} < \frac{13}{60} < \frac{7}{30} < \frac{1}{4}.$

Vậy hai phân số cần tìm là: $\frac{13}{60}$ và $\frac{7}{30}.$

Bài 12: Tìm hai phân số có mẫu số khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{3}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{2}.$

Lời giải:

Chọn mẫu chung là 18, ta có: $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}; \quad \frac{1}{2} = \frac{9}{18}.$

Ta có $\frac{6}{18} < \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$

Rút gọn các phân số này ta được: $\frac{1}{3} < \frac{7}{18} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}.$

Ta tìm được hai phân số $\frac{7}{18}$ và $\frac{4}{9}$ có mẫu khác nhau, lớn hơn $\frac{1}{3}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{2}.$

Nhận xét:

Có nhiều cặp phân số thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Chẳng hạn, chọn mẫu chung là 120,

ta có: $\frac{1}{3} = \frac{40}{120}; \quad \frac{1}{2} = \frac{60}{120}.$

Trong các phân số từ $\frac{41}{120}$ đến $\frac{59}{120}$ ta có thể chọn các cặp như: $\frac{41}{120}$ và $\frac{42}{120} = \frac{21}{60}$

hoặc $\frac{44}{120} = \frac{11}{30}$ và $\frac{45}{120} = \frac{15}{40}$... đều thỏa mãn bài toán.

Bài 13: Tìm các phân số có mẫu số là 5 và nhỏ hơn $\frac{1}{2}$, lớn hơn $\frac{1}{3}$

Lời giải:

Phân số có dạng : $\frac{1}{3} < \frac{a}{5} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{10}{30} < \frac{6a}{30} < \frac{15}{30}$

Suy ra $6a = 12 \Rightarrow a = 2$

Vậy phân số cần tìm là: $\frac{2}{5}$

Bài 14: Tìm ba phân số mà lớn hơn $\frac{-1}{3}$ và nhỏ hơn $\frac{-1}{4}$.

Lời giải:

Gọi phân số cần tìm $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$)

Ta có: $-\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{16}{48} < \frac{a}{b} < -\frac{12}{48}$

Lấy $b = 48$ và $a \in \{-13, -14, -15\}$ ta được các phân số: $\frac{-13}{48}; \frac{-14}{48}; \frac{-15}{48}$.

Bài 15: Hãy tìm các phân số, thoả mãn mỗi điều kiện sau

a) Có mẫu là 30 , lớn hơn $\frac{5}{17}$ và nhỏ hơn $\frac{6}{17}$:

b) Có mẫu là 5 , lớn hơn $\frac{2}{-3}$ và nhỏ hơn $\frac{1}{-6}$;

Trong mỗi trường hợp trên hãy sắp xếp các phân số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn

Lời giải:

a) Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{30}$. trong đó $a \in \mathbb{Z}$, ta có: $\frac{5}{17} < \frac{a}{30} < \frac{6}{17}$

Quy đồng mẫu chung của ba phân số, ta được: $\frac{150}{510} < \frac{17a}{510} < \frac{180}{510}$

Suy ra $150 < 17a < 180$, do đó $\frac{150}{17} < a < \frac{180}{17}$, mà $a \in \mathbb{Z}$, nên $a \in \{9; 10\}$.

Có hai phân số phải tìm là : $\frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ và $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Sắp xếp các phân số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: $\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{6}{17}$.

b) Gọi phân số phải tìm là $\frac{b}{5}$ ($b \in \mathbb{Z}$), ta có: $\frac{2}{-3} < \frac{b}{5} < \frac{1}{-6}$

Biến đổi các phân số đã cho sao cho có mẫu dương, ta được: $\frac{-2}{3} < \frac{b}{5} < \frac{-1}{6}$

Quy đồng mẫu các phân số: $\frac{-20}{30} < \frac{6b}{30} < \frac{-5}{30}$, suy ra $-20 < 6b < -5$

Do đó $-3\frac{1}{3} < b < -\frac{5}{6}$, mà $b \in \mathbb{Z}$, nên $b = -3 : -2$ và -1 .

Ba số phải tìm là : $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}$ và $\frac{-1}{5}$.

Sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: $\frac{-2}{3} < \frac{-3}{5} < \frac{-2}{5} < \frac{-1}{5} < \frac{-1}{6}$.

Bài 16: Cho hai phân số $\frac{1}{6}$ và $\frac{2}{3}$. Hãy tìm :

a) Năm phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho các phân số đó lớn hơn $\frac{2}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{2}{3}$;

b) Hai mươi phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho các phân số lớn hơn $\frac{1}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{2}{3}$;

c) Có nhận xét gì về số các phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho phân số đó lớn hơn $\frac{1}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

a) Quy đồng mẫu chung hai phân số $\frac{1}{6}$ và $\frac{2}{3}$, chú ý chọn mẫu sao cho xen giữa hai phân số này có 5 phân số. Ta có: $\frac{1}{6} < \frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$;

b) Tương tự a), chọn mẫu chung là 42. Các phân số cần tìm là: $\frac{8}{42}, \frac{9}{42}, \frac{10}{42}, \dots, \frac{25}{42}, \frac{26}{42}, \frac{27}{42}$.

c) Có nhiều phân số thỏa mãn đề bài. Các phân số cần tìm phụ thuộc vào cách tìm mẫu chung. Nếu mẫu chung càng lớn thì số các phân số cần tìm càng lớn.

Chẳng hạn chọn mẫu chung là 120, khi đó $\frac{1}{6} = \frac{20}{120}$ và $\frac{2}{3} = \frac{80}{120}$, vì thế xen giữa hai phân số $\frac{20}{120}$ và $\frac{80}{120}$ có 59 phân số là: $\frac{21}{120}, \frac{22}{120}, \frac{23}{120}, \dots, \frac{77}{120}, \frac{78}{120}, \frac{79}{120}$.

$$A = \frac{10^{19} + 1}{10^{20} + 1} \quad \text{và} \quad B = \frac{10^{20} + 1}{10^{21} + 1}$$

Bài 17: So sánh hai phân số sau:

Lời giải:

Quy đồng mẫu hai phân số với $MC: (10^{20} + 1)(10^{21} + 1)$, ta có :

$$A = \frac{(10^{19} + 1)(10^{21} + 1)}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)} = \frac{10^{40} + 10^{21} + 10^{19} + 1}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)};$$

Hãy chứng tỏ rằng $10^{21} + 10^{19} > 10^{20} + 10^{20}$ để suy ra $10^{40} + 10^{21} + 10^{19} + 1 > 10^{40} + 10^{20} + 10^{20} + 1$

Dạng 3: So sánh hai phân số không cùng mẫu bằng cách quy đồng tử

Quy đồng tử dương rồi so sánh các mẫu: Mẫu nào lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn

Bài 1: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a) $\frac{3}{4}$ và $\frac{6}{7}$

b) $\frac{17}{-21}$ và $\frac{51}{-31}$

a) Ta có $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ mà $\frac{6}{8} < \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{6}{7}$

b) Ta có $\frac{17}{-21} = \frac{51}{-63}$ mà $\frac{51}{-63} > \frac{51}{-31} \Rightarrow \frac{17}{-21} > \frac{51}{-31}$.

a) $\frac{-4}{9}$ và $\frac{-1}{1}$

b) $\frac{-4}{-11}$ và $\frac{-6}{-19}$

a) Ta có $\frac{-4}{9} = \frac{-12}{27}$; $\frac{-3}{13} = \frac{-12}{52}$ mà $\frac{-12}{27} < \frac{-12}{52} \Rightarrow \frac{-4}{9} < \frac{-3}{13}$

b) Ta có $\frac{-4}{-11} = \frac{12}{33}$; $\frac{-6}{-19} = \frac{12}{38}$ mà $\frac{12}{33} > \frac{12}{38} \Rightarrow \frac{-4}{-11} > \frac{-6}{-19}$.

a) $\frac{2}{5}$ và $\frac{5}{7}$

b) $\frac{-3}{4}$ và $\frac{-6}{7}$

c) $\frac{101}{506}$ và $\frac{707}{3534}$

a) Ta có: $\frac{2}{5} = \frac{10}{25}$ và $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$; Vì $\frac{10}{25} < \frac{10}{14} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{5}{7}$

b) Ta có: $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = \frac{6}{-8}$ và $\frac{-6}{7} = \frac{6}{-7}$; Vì $\frac{6}{-8} > \frac{6}{-7} \Rightarrow \frac{-3}{4} > \frac{-6}{7}$.

c) Ta có: $\frac{101}{506} = \frac{101 \times 7}{506 \times 7} = \frac{707}{3542}$

Hai phân số $\frac{707}{3542}$ và $\frac{707}{3534}$ có tử bằng nhau, nhưng $3542 > 3534$ nên $\frac{707}{3542} < \frac{707}{3534}$
 hay $\frac{101}{506} < \frac{707}{3534}$.

$$A = \frac{2489 - 36}{7467 - 108}; B = \frac{2929 - 303}{8787 + 1717}.$$

Bài 4: So sánh các phân số sau:

Lời giải:

$$A = \frac{2489 - 36}{3 \cdot (2489 - 36)} = \frac{1}{3}; B = \frac{101 \cdot (29 - 3)}{101 \cdot (87 + 17)} = \frac{26}{104} = \frac{1}{4}.$$

Vì $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ nên $A > B$.

Bài 5: So sánh các phân số sau: $A = \frac{8056}{2012 \cdot 16 - 1982}$;

$$B = \frac{1.2.6 + 2.4.12 + 4.8.24 + 7.14.42}{1.6.9 + 2.12.18 + 4.24.36 + 7.42.63}$$

Lời giải:

$$A = \frac{8056}{2012 \cdot 16 - 1982} = \frac{4 \cdot 2014}{2012 \cdot 15 + 2012 - 1982} = \frac{4 \cdot 2014}{2012 \cdot 15 + 30} = \frac{4 \cdot 2014}{15 \cdot (2012 + 2)} = \frac{4}{15}. \quad (1)$$

$$B = \frac{2 \cdot (1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21)}{9 \cdot (1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21)} = \frac{2}{9}. \quad (2)$$

Ta có: $\frac{2}{9} = \frac{4}{18} < \frac{4}{15}$ nên từ (1) và (2) suy ra $A > B$.

Bài 6: Tìm số tự nhiên y sao cho: $\frac{5}{8} < \frac{4}{y} < \frac{5}{7}$.

Lời giải:

Trước tiên ta sẽ quy đồng tử số các phân số:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{20}{32}, \frac{4}{y} = \frac{4 \cdot 5}{y \cdot 5} = \frac{20}{5y}, \frac{5}{7} = \frac{20}{7 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$$

Vì $\frac{5}{8} < \frac{4}{y} < \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{20}{32} < \frac{20}{5y} < \frac{20}{28}$ Suy ra $5y = 31, 5y = 30$ hoặc $5y = 29$

Mà y là số tự nhiên $\Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow y = 6$.

Bài 7: Tìm số $x \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$\text{a) } \frac{7}{6} < \frac{7}{x} < \frac{7}{3} \quad \text{b) } \frac{17}{-5} < \frac{-17}{x} < \frac{17}{-10} \quad \text{c) } \frac{2}{3} < \frac{10}{x} < \frac{5}{6}$$

Lời giải:

$$a) \frac{7}{6} < \frac{7}{x} < \frac{7}{3} \Rightarrow 3 < x < 6 \Rightarrow x \in \{5; 4\}$$

$$\frac{17}{-5} < \frac{-17}{x} < \frac{17}{-10} \Rightarrow \frac{17}{-5} < \frac{17}{-x} < \frac{17}{-10} \Rightarrow 10 > x > 5 \Rightarrow x \in \{9; 8; 7; 6\}$$

b)

$$c) \frac{2}{3} < \frac{10}{x} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{10}{15} < \frac{10}{x} < \frac{10}{12} \Rightarrow 12 < x < 15 \Rightarrow x \in \{14; 13\}$$

Bài 8: Tìm phân số có tử số là 4 và lớn hơn $\frac{1}{7}$, nhỏ hơn $\frac{1}{5}$.

Lời giải:

$$\text{Phân số cần tìm có dạng : } \frac{1}{7} < \frac{4}{b} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4}{28} < \frac{4}{b} < \frac{4}{20}$$

$$\text{Suy ra: } 20 < b < 28 \Rightarrow b \in \{21; 22; 23; 24; 25; 26; 27\}$$

$$\text{Ta có 7 phân số: } \frac{4}{21}; \frac{4}{22}; \frac{4}{23}; \frac{4}{24}; \frac{4}{25}; \frac{4}{26}; \frac{4}{27}.$$

Dạng 4: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1.

I. Phương pháp giải

+ Định nghĩa: Cho phân số $\frac{a}{b} < 1$, ta gọi *phần bù đến đơn vị* của phân số $\frac{a}{b}$ là hiệu $1 - \frac{a}{b}$, tức là $\frac{b-a}{b}$.

+ Nếu $\frac{a}{b} - M = 1; \frac{c}{d} - N = 1$ mà $M > N$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

- M, N là phần thừa so với 1 của 2 phân số đã cho.
- Phân số nào có phần thừa lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

+ Nếu $\frac{a}{b} + M = 1; \frac{c}{d} + N = 1$ mà $M > N$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

- M, N là phần thiếu hay phần bù đến đơn vị của 2 phân số đó.
- Phân số nào có phần bù lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

II. Bài toán

Bài 1: So sánh các phân số sau mà không quy đồng mẫu số và tử số:

$$a) \frac{47}{57} \text{ và } \frac{66}{76}$$

$$b) \frac{23}{32} \text{ và } \frac{39}{48}$$

Lời giải:

a) Nhận thấy hai phân số này đều lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1 nên ta sẽ sử dụng phần bù đến đơn vị.

$$\text{Ta có: } 1 - \frac{47}{57} = \frac{57}{57} - \frac{47}{57} = \frac{10}{57}, \quad 1 - \frac{66}{76} = \frac{76}{76} - \frac{66}{76} = \frac{10}{76}$$

$$\text{Có } \frac{10}{57} > \frac{10}{76} \Rightarrow \frac{47}{57} < \frac{66}{76}.$$

$$\text{b) Ta có: } 1 - \frac{23}{32} = \frac{32}{32} - \frac{23}{32} = \frac{9}{32}, \quad 1 - \frac{39}{48} = \frac{48}{48} - \frac{39}{48} = \frac{9}{48}$$

$$\text{Có } \frac{9}{32} > \frac{9}{48} \Rightarrow \frac{23}{32} < \frac{39}{48}.$$

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1 .

$$\text{a) } \frac{26}{27} \text{ và } \frac{96}{97}$$

$$\text{b) } \frac{102}{103} \text{ và } \frac{103}{105}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } \frac{26}{27} + \frac{1}{27} = 1; \quad \frac{1}{27} > \frac{1}{97} \Rightarrow \frac{26}{27} < \frac{96}{97}.$$

$$\text{b) Ta có } \frac{102}{103} + \frac{1}{103} = 1; \quad \frac{103}{105} + \frac{2}{105} = 1 \quad \text{mà} \quad \frac{1}{103} = \frac{2}{206} < \frac{2}{105} \Rightarrow \frac{102}{103} > \frac{103}{105}.$$

Bài 3: So sánh các phân số sau:

$$\text{a) } \frac{-37}{47} \text{ và } \frac{-56}{66};$$

$$\text{b) } \frac{-29}{38} \text{ và } \frac{-13}{22}.$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \frac{37}{47} = \frac{47-10}{47} = 1 - \frac{10}{47} \quad (1)$$

$$\frac{56}{66} = \frac{66-10}{66} = 1 - \frac{10}{66} \quad (2)$$

$$\text{Vì } \frac{10}{47} > \frac{10}{66} \text{ nên từ (1) và (2) suy ra } \frac{37}{47} < \frac{56}{66}.$$

$$\text{Do đó } \frac{-37}{47} > \frac{-56}{66}.$$

$$\text{b) Làm tương tự câu a) ta có: } \frac{-29}{38} < \frac{-13}{22}.$$

Bài 4: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1 .

$$\text{a) } \frac{2020}{2019} \text{ và } \frac{2019}{2018}$$

$$\text{b) } \frac{73}{64} \text{ và } \frac{51}{45}$$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{2020}{2019} - \frac{1}{2019} = 1$; $\frac{2019}{2018} - \frac{1}{2018} = 1$ mà $\frac{1}{2019} < \frac{1}{2018} \Rightarrow \frac{2020}{2019} < \frac{2019}{2018}$.

b) Ta có $\frac{73}{64} - \frac{9}{64} = 1$; $\frac{51}{45} - \frac{6}{45} = 1$ mà $\frac{9}{64} = \frac{18}{128} > \frac{6}{45} = \frac{18}{135} \Rightarrow \frac{73}{64} > \frac{51}{45}$.

Bài 5: So sánh: a) $\frac{19}{18}$ và $\frac{2005}{2004}$ b) $\frac{72}{73}$ và $\frac{98}{99}$

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{19}{18} - \frac{1}{18} = 1$ và $\frac{2005}{2004} - \frac{1}{2004} = 1$; Vì $\frac{1}{18} > \frac{1}{2004} \Rightarrow \frac{19}{18} > \frac{2005}{2004}$

b) Ta có: $\frac{72}{73} + \frac{1}{73} = 1$ và $\frac{98}{99} + \frac{1}{99} = 1$; Vì $\frac{1}{73} > \frac{1}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} < \frac{98}{99}$.

Bài 6: So sánh các phân số sau bằng cách hợp lí nhất:

a) $\frac{13}{19}$ và $\frac{47}{53}$; b) $\frac{41}{91}$ và $\frac{411}{911}$.

Lời giải:

a) $\frac{13}{19} = \frac{19-6}{19} = 1 - \frac{6}{19}$; $\frac{47}{53} = \frac{53-6}{53} = 1 - \frac{6}{53}$.

Vì $\frac{6}{19} > \frac{6}{53}$ suy ra $\frac{13}{19} < \frac{47}{53}$.

d) $\frac{41}{91} = \frac{410}{910} = \frac{910-500}{910} = 1 - \frac{500}{910}$ (1)

$\frac{411}{911} = \frac{911-500}{911} = 1 - \frac{500}{911}$ (2)

Vì $\frac{500}{910} > \frac{500}{911}$ nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{41}{91} < \frac{411}{911}$.

Bài 7: So sánh các biểu thức sau: $A = \frac{100^{10} + 1}{100^{10} - 1}$; $B = \frac{100^{10} - 1}{100^{10} - 3}$

Lời giải:

$A = \frac{100^{10} + 1}{100^{10} - 1} = 1 + \frac{2}{100^{10} - 1}$ (1)

$B = \frac{100^{10} - 1}{100^{10} - 3} = 1 + \frac{2}{100^{10} - 3}$ (2)

Vì $\frac{2}{100^{10} - 1} < \frac{2}{100^{10} - 3}$ nên từ (1) và (2) suy ra $A < B$.

Bài 8: So sánh: $A = \frac{2003 \cdot 2004 - 1}{2003 \cdot 2004}$ và $B = \frac{2004 \cdot 2005 - 1}{2004 \cdot 2005}$

Lời giải:

Ta có:
$$A = \frac{2003 \cdot 2004 - 1}{2003 \cdot 2004} = \frac{2003 \cdot 2004}{2003 \cdot 2004} - \frac{1}{2003 \cdot 2004} = 1 - \frac{1}{2003 \cdot 2004}$$

$$B = \frac{2004 \cdot 2005 - 1}{2004 \cdot 2005} = \frac{2004 \cdot 2005}{2004 \cdot 2005} - \frac{1}{2004 \cdot 2005} = 1 - \frac{1}{2004 \cdot 2005}$$

Vì $\frac{1}{2003 \cdot 2004} > \frac{1}{2004 \cdot 2005}$ nên $A < B$.

Bài 9: So sánh phân số sau bằng cách nhanh nhất:

a) $\frac{2012}{2013}$ và $\frac{2013}{2014}$

b) $\frac{1006}{1007}$ và $\frac{2013}{2015}$

Lời giải:

a) Ta có: $1 - \frac{2012}{2013} = \frac{1}{2013}$; $1 - \frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}$.

Vì $\frac{1}{2013} > \frac{1}{2014}$ nên $\frac{2012}{2013} < \frac{2013}{2014}$

b) Ta có: $1 - \frac{1006}{1007} = \frac{1}{1007} = \frac{2}{2014}$; $1 - \frac{2013}{2015} = \frac{2}{2015}$.

Vì $\frac{2}{2014} > \frac{2}{2015}$ nên $\frac{1006}{1007} < \frac{2013}{2015}$.

Bài 10: Hãy so sánh bốn phân số:

a) $A = \frac{222221}{222222}$;

b) $B = \frac{444443}{444445}$;

c) $C = \frac{666664}{666667}$;

d) $D = \frac{888885}{888889}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{222222 - 1}{222222} = 1 - \frac{1}{222222} \Rightarrow 1 - A = \frac{1}{222222} \Rightarrow \frac{1}{1 - A} = 222222$$

$$B = \frac{444445 - 2}{444445} = 1 - \frac{2}{444445} \Rightarrow 1 - B = \frac{2}{444445} \Rightarrow \frac{1}{1 - B} = 222222 + \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{666667 - 3}{666667} = 1 - \frac{3}{666667} \Rightarrow 1 - C = \frac{3}{666667} \Rightarrow \frac{1}{1 - C} = 222222 + \frac{1}{3}$$

$$D = \frac{888889 - 4}{888889} = 1 - \frac{4}{888889} \Rightarrow 1 - D = \frac{4}{888889} \Rightarrow \frac{1}{1 - D} = 222222 + \frac{1}{4}$$

Suy ra $\frac{1}{1 - A} < \frac{1}{1 - D} < \frac{1}{1 - C} < \frac{1}{1 - B} \Rightarrow A < D < C < B$ (Do đó $A, B, C, D < 1$).

Dạng 6: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian

1. Phương pháp giải

1. Dùng số $0,1$ làm trung gian:

a) Nếu $\frac{a}{b} > 0$ và $0 > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

$$\text{b) Nếu } \frac{a}{b} > 1 \text{ và } 1 > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

2. Dùng 1 phân số hoặc số xấp xỉ làm trung gian: (Phân số này có tử là tử của phân số thứ nhất, có mẫu là mẫu của phân số thứ hai)

*Nhận xét: Trong hai phân số, phân số nào vừa có tử lớn hơn, vừa có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn (điều kiện các tử và mẫu đều dương).

$$\text{*Tính bắc cầu : } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ và } \frac{c}{d} > \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{m}{n}$$

II. Bài toán

Bài 1: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

$$\text{a) } \frac{7}{9} \text{ và } \frac{19}{17}$$

$$\text{b) } \frac{311}{256} \text{ và } \frac{199}{203}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } \frac{7}{9} < 1 < \frac{19}{17} \Rightarrow \frac{7}{9} < \frac{19}{17}$$

$$\text{c) Ta có } \frac{311}{256} > 1 > \frac{199}{203} \Rightarrow \frac{311}{256} > \frac{199}{203}$$

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

$$\text{a) } \frac{-16}{19} \text{ và } \frac{15}{17}$$

$$\text{b) } \frac{419}{-723} \text{ và } \frac{-699}{-692}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } \frac{-16}{19} < 0 < \frac{15}{17} \Rightarrow \frac{-16}{19} < \frac{15}{17}$$

$$\text{b) Ta có } \frac{419}{-723} < 0 < \frac{-699}{-692} \Rightarrow \frac{419}{-723} < \frac{-699}{-692}$$

Bài 3: So sánh hai phân số sau:

$$\text{a) } \frac{-371}{459} \text{ và } \frac{-371}{-459}$$

$$\text{b) } \frac{-29}{73} \text{ và } \frac{-80}{49}$$

Lời giải:

$$\text{a) } \frac{-371}{459} < 0 < \frac{-371}{-459} \Rightarrow \frac{-371}{459} < \frac{-371}{-459}$$

$$\text{b) } \frac{-29}{73} > \frac{-73}{73} = -1. \quad (1)$$

$$\frac{-80}{49} < \frac{-49}{49} = -1. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{-29}{73} > \frac{-80}{49}$$

Bài 4: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

$$a) \frac{18}{31} \text{ và } \frac{15}{37}$$

$$b) \frac{72}{73} \text{ và } \frac{58}{99}$$

Lời giải:

$$a) \text{ Vì } \frac{18}{31} > \frac{18}{37} \text{ và } \frac{18}{37} > \frac{15}{37} \Rightarrow \frac{18}{31} > \frac{15}{37}$$

$$b) \text{ Cách 1: Vì } \frac{72}{73} > \frac{72}{99} \text{ và } \frac{72}{99} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$$

$$\text{Cách 2: Vì } \frac{72}{73} > \frac{58}{73} \text{ và } \frac{58}{73} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$$

Bài 5: So sánh các phân số sau:

$$a) \frac{3}{121} \text{ và } \frac{6}{241};$$

$$b) \frac{31}{67} \text{ và } \frac{29}{73}.$$

Lời giải:

$$a) \text{ Quy đồng tử số ta được: } \frac{3}{121} = \frac{6}{242}.$$

$$\text{Rõ ràng } \frac{6}{242} < \frac{6}{241} \text{ tức là } \frac{3}{121} < \frac{6}{241}.$$

$$b) \text{ Chọn phân số trung gian là } \frac{31}{73} \text{ ta có:}$$

$$\frac{31}{67} > \frac{31}{73} > \frac{29}{73} \text{ do đó } \frac{31}{67} > \frac{29}{73}.$$

$$\text{Bài 6: So sánh: } \frac{n}{n+3} \text{ và } \frac{n+1}{n+2}; (n \in \mathbb{N}^*)$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{n}{n+3} < \frac{n}{n+2} \text{ và } \frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{n}{n+3} < \frac{n+1}{n+2}; (n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 7: So sánh hai phân số bằng cách dùng số xấp xỉ làm trung gian.

$$a) \frac{12}{47} \text{ và } \frac{19}{77}$$

$$b) \frac{11}{32} \text{ và } \frac{16}{49}$$

$$c) \frac{12}{37} \text{ và } \frac{19}{54}$$

Lời giải:

$$a) \text{ Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là } \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{12}{47} > \frac{12}{48} = \frac{1}{4} \text{ \& } \frac{19}{77} < \frac{19}{76} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{47} > \frac{19}{77}.$$

$$b) \text{ Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là } \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta có : } \frac{11}{32} > \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \text{ \& } \frac{16}{49} < \frac{16}{48} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{11}{32} > \frac{16}{49}$$

c) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có : } \frac{12}{37} < \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \text{ \& } \frac{19}{54} > \frac{18}{54} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12}{37} < \frac{19}{54}$$

$$\text{Bài 8: So sánh: } A = \frac{3535.232323}{353535.2323}; B = \frac{3535}{3534}; C = \frac{2323}{2322}$$

Lời giải:

$$A = \frac{3535.232323}{353535.2323} = \frac{35.101.23.10101}{35.10101.23.101} = 1$$

$$B = \frac{3535}{3534} = 1 + \frac{1}{3534}$$

$$C = \frac{2323}{2322} = 1 + \frac{1}{2322}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{3534} < \frac{1}{2322} \text{ nên } A < B < C$$

$$\text{Bài 9: So sánh: } A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52} \text{ và } B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 540}$$

Lời giải:

$$A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52} = \frac{5.11.13(1.1 - 2.2)}{22.26(1.1 - 2.2)} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 540} = \frac{138(138 - 5)}{137(137 - 4)} = \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{4} > \frac{1}{137} \text{ nên } A > B$$

$$\text{Bài 10: So sánh } A = \frac{2004^{2003} + 1}{2004^{2004} + 1} \text{ và } B = \frac{2004^{2002} + 1}{2004^{2003} + 1}$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 2004A = \frac{2004^{2004} + 2004}{2004^{2004} + 1} = 1 + \frac{2003}{2004^{2004} + 1}$$

$$2004B = \frac{2004^{2003} + 2004}{2004^{2003} + 1} = 1 + \frac{2003}{2004^{2003} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{2003}{2004^{2004} + 1} < \frac{2003}{2004^{2003} + 1} \Rightarrow 1 + \frac{2003}{2004^{2004} + 1} < 1 + \frac{2003}{2004^{2003} + 1} \\ \Rightarrow 2004A < 2004B$$

$$\Rightarrow A < B$$

Vậy $A < B$.

Dạng 7: So sánh hai phân số bằng cách dùng tính chất phân số.

I. Phương pháp giải

1. Tính chất 1: Với $m \neq 0$ ta có :

$$*\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$$

$$*\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+m}{b+m}.$$

$$*\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

$$*\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

2. Tính chất 2: Với các số nguyên dương a, b, c, d :

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

II. Bài toán

Bài 1: Tìm 3 phân số mà: lớn hơn $-\frac{1}{3}$ và nhỏ hơn $-\frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Vì } -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} \text{ nên } -\frac{1}{3} < \frac{-1-1}{3+4} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{2}{7} < -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } -\frac{1}{3} < -\frac{2}{7} < -\frac{1}{4} \text{ nên } -\frac{1}{3} < \frac{-1+(-2)}{3+7} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{3}{10} < -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vì } -\frac{1}{3} < -\frac{3}{10} < -\frac{1}{4} \text{ nên } -\frac{1}{3} < \frac{-1+(-3)}{3+10} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{4}{13} < -\frac{1}{4}$$

$$\text{Ta có ba phân số cần tìm là: } -\frac{2}{7}, -\frac{3}{10}, -\frac{4}{13}.$$

Bài 2: Tìm ba phân số khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{4}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Từ } \frac{1}{4} < \frac{1}{3} \text{ suy ra } \frac{1}{4} < \frac{1+1}{4+3} < \frac{1}{3} \text{ hay } \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ } \frac{1}{4} < \frac{2}{7} \text{ suy ra } \frac{1}{4} < \frac{1+2}{4+7} < \frac{2}{7} \text{ hay } \frac{1}{4} < \frac{3}{11} < \frac{2}{7}.$$

$$\text{Từ } \frac{2}{7} < \frac{1}{3} \text{ suy ra } \frac{2}{7} < \frac{2+1}{7+3} < \frac{1}{3} \text{ hay } \frac{2}{7} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy, ta có } \frac{1}{4} < \frac{3}{11} < \frac{2}{7} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}.$$

Bài 3: So sánh $\frac{-387}{386}$ và $\frac{-592}{591}$

Lời giải:

$$\frac{387}{386} > 1 \Rightarrow \frac{387}{386} > \frac{387+205}{386+205} = \frac{592}{591}$$

Ta có: $\frac{387}{386} > \frac{592}{591}$ nên $\frac{-387}{386} < \frac{-592}{591}$.

Bài 4: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1}$ và $B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} < 1$ (vì tử nhỏ hơn mẫu)

$$\Rightarrow A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} < \frac{(10^{11} - 1) + 11}{(10^{12} - 1) + 11} = \frac{10^{11} + 10}{10^{12} + 10} = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 5: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}$; $B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Lời giải:

Vì $\frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1$ (vì tử nhỏ hơn mẫu)

$$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17^{18} + 17}{17^{19} + 17} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

nên

Vậy $A < B$.

Bài 6: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{98^{89} + 1}{98^{99} + 1}$ và $B = \frac{98^{88} + 1}{98^{98} + 1}$.

Lời giải:

Ta thấy $A = \frac{98^{89} + 1}{98^{99} + 1} < 1$ (vì tử nhỏ hơn mẫu) nên:

$$A = \frac{98^{89} + 1}{98^{99} + 1} < \frac{98^{89} + 1 + 97}{98^{99} + 1 + 97} = \frac{98^{89} + 98}{98^{99} + 98} = \frac{98 \cdot (98^{88} + 1)}{98 \cdot (98^{98} + 1)} = \frac{98^{88} + 1}{98^{98} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 7: So sánh hai phân số sau: $C = \frac{15^{16} + 1}{15^{17} + 1}$ và $D = \frac{15^{15} + 1}{15^{16} + 1}$.

Lời giải:

Ta thấy $C = \frac{15^{16} + 1}{15^{17} + 1} < 1$ (vì tử nhỏ hơn mẫu) nên:

$$C = \frac{15^{16} + 1}{15^{17} + 1} < \frac{15^{16} + 1 + 14}{15^{17} + 1 + 14} = \frac{15^{16} + 15}{15^{17} + 15} = \frac{15 \cdot (15^{15} + 1)}{15 \cdot (15^{16} + 1)} = \frac{15^{15} + 1}{15^{16} + 1} = D$$

Vậy $C < D$.

Bài 8: So sánh hai phân số sau: $M = \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006}$ và $N = \frac{2004 + 2005}{2005 + 2006}$

Lời giải:

Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2004}{2005} > \frac{2004}{2005 + 2006} \\ \frac{2005}{2006} > \frac{2005}{2005 + 2006} \end{array} \right\} \text{ Cộng theo vế ta có kết quả } M > N.$$

Bài 9: So sánh hai phân số sau: $\frac{37}{39}$ và $\frac{3737}{3939}$?

Lời giải:

$$\frac{37}{39} = \frac{3700}{3900} = \frac{3700 + 37}{3900 + 39} = \frac{3737}{3939} \quad \left(\text{áp dụng } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \right)$$

Vậy $\frac{37}{39} = \frac{3737}{3939}$.

Bài 10: So sánh hai phân số : $A = \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1}$ và $B = \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1}$.

Lời giải:

$$\text{Vì } A = \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} > 1 \quad \text{nên} \quad \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} > \frac{(100^{100} + 1) + 99}{(100^{90} + 1) + 99}$$

$$\Rightarrow \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} > \frac{100^{100} + 100}{100^{90} + 100} \Rightarrow \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} > \frac{100(100^{99} + 1)}{100(100^{89} + 1)} = B$$

Vậy $A > B$.

Bài 11: So sánh hai phân số: $A = \frac{2003^{2003} + 1}{2003^{2004} + 1}$ và $B = \frac{2003^{2002} + 1}{2003^{2003} + 1}$

Lời giải:

Dễ thấy $A < 1$ nên:

$$A = \frac{2003^{2003} + 1}{2003^{2004} + 1} < \frac{2003^{2003} + 1 + 2002}{2003^{2004} + 1 + 2002}$$

$$= \frac{2003^{2003} + 2003}{2003^{2004} + 2003} = \frac{2003 \cdot (2003^{2002} + 1)}{2003(2003^{2003} + 1)}$$

$$= \frac{2003^{2002} + 1}{2003^{2003} + 1} = B$$

Vậy $A < B$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG. (Khoảng 15 bài)

Bài 1. So sánh P và Q biết $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$

Lời giải:

Ta có:

$$Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013} = \frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: $2010; 2011; 2012$ thấy được các phân số của P đều lớn hơn các phân số của Q .

Vậy $P > Q$

So sánh không qua quy đồng: $A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}; B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Bài 2:

Lời giải:

Ta có

$$A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}} \Rightarrow A > B$$

Ta thấy

Bài 3: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}} = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-10}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2011}}$$

$$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}} = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2010}} + \frac{-9}{10^{2010}}$$

$$\frac{-10}{10^{2011}} > \frac{-10}{10^{2010}} \Rightarrow A > B$$

Ta thấy

Bài 4: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

So sánh A với $\frac{3}{4}$?

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+2017).1009}{2}}$$

$$= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018} = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 5: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014}$ và $B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014} = 1 - \frac{1}{2013.2014}$$

$$B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2014.2015}$$

Vì $\frac{1}{2013.2014} > \frac{1}{2014.2015}$ nên $A < B$.

Bài 6: Cho: $A = \frac{10^{2001} + 1}{10^{2002} + 1}$; $B = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$. Hãy so sánh A và B .

Lời giải:

Ta có: $10A = \frac{10^{2002} + 10}{10^{2002} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2002} + 1} \quad (1)$

Tương tự: $10B = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta thấy: $\frac{9}{10^{2002} + 1} > \frac{9}{10^{2003} + 1} \Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B$.

Bài 7: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Lời giải:

Xét: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$

Vậy $N > M$

Bài 8: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$.

Lời giải:

$N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2006}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{6}{10^{2006}} < \frac{6}{10^{2005}}$

Vậy $N < M$.

Bài 9: So sánh A và B biết:

$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Lời giải:

$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1 \Rightarrow A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$

Vì

Bài 10: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải:

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

Vậy $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80}$

$= \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1)$

Vì $\frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60}$ và $\frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$

Ta có
$$\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right)$$

$$= \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Bài 11: Không quy đồng mẫu hãy so sánh hai phân số sau: $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}$.

Lời giải:

$$\frac{300}{670} > \frac{300}{677} \quad \text{mà} \quad \frac{300}{670} = \frac{30}{67} \Rightarrow \frac{30}{67} > \frac{300}{677} \quad (1)$$

Ta có: $1 - \frac{37}{67} = \frac{30}{67}$ và $1 - \frac{377}{677} = \frac{300}{677}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{377}{677} > \frac{37}{67}$.

Bài 12: So sánh: $A = \frac{2005^{2005} + 1}{2005^{2006} + 1}$ và $B = \frac{2005^{2004} + 1}{2005^{2005} + 1}$.

Lời giải:

$$A = \frac{2005^{2005} + 1}{2005^{2006} + 1} < \frac{2005^{2005} + 1 + 2004}{2005^{2006} + 1 + 2004} = \frac{2005(2005^{2004} + 1)}{2005(2005^{2005} + 1)} = \frac{2005^{2004} + 1}{2005^{2005} + 1} = B.$$

Vậy $A < B$.

So sánh: $A = \frac{2006^{2006} + 1}{2007^{2007} + 1}$ và $B = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1}$.

Bài 13:

Lời giải:

Ta có nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n} (n \in \mathbb{N}^*)$

$$A = \frac{2006^{2006} + 1}{2006^{2007} + 1} < \frac{2006^{2006} + 1 + 2005}{2006^{2007} + 2005 + 1} = \frac{2006^{2006} + 2006}{2006^{2007} + 2006} = \frac{2006(2006^{2005} + 1)}{2006(2006^{2006} + 1)} = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 14: So sánh các biểu thức: $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$.

Lời giải:

$$A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717} = \frac{121212:10101}{171717:10101} + \frac{2}{17} - \frac{404:101}{1717:101}$$

$$\Rightarrow A = \frac{12}{17} + \frac{2}{17} - \frac{4}{17} = \frac{12+2-4}{17}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{10}{17} \text{ hay } A = B = \frac{10}{17}$$

$$A = \frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1}; \quad B = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$$

Bài 15: Cho: . Hãy so sánh A và B .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 10A = \frac{10^{2021} + 10}{10^{2021} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2021} + 1} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } 10B = \frac{10^{2022} + 10}{10^{2022} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta thấy: } \frac{9}{10^{2021} + 1} > \frac{9}{10^{2022} + 1} \Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B.$$

Bài 16: a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

b) So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Lời giải:

a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

$$\frac{15}{301} < \frac{15}{300} = \frac{1}{20} = \frac{25}{500} < \frac{25}{499}. \text{ Vậy } \frac{15}{301} < \frac{25}{499}$$

b) So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có: } \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n}$$

$$VP = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{2(n+1)}{2^n} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{2n+2-n-2}{2^n} = \frac{n}{2^n} = VT \quad (\text{đpcm})$$

Với $\forall n \geq 2$ ta có: $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n}$. Từ đó ta có:

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^2}\right) + \left(\frac{4}{2^2} - \frac{5}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{2008}{2^{2006}} - \frac{2009}{2^{2007}}\right) = 2 - \frac{2009}{2^{2007}} < 2. \text{ Vậy } S < 2$$

Bài 17: Tìm các số tự nhiên a, b thoả mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$

Lời giải:

$$8b - 9a = 31 \Rightarrow b = \frac{31+9a}{8} = \frac{32-1+8a+a}{8} \in \mathbb{N} \Rightarrow (a-1):8 \Rightarrow a = 8q+1 (q \in \mathbb{N})$$

$$b = \frac{31+9(8q+1)}{8} = 9q+5 \Rightarrow \frac{11}{17} < \frac{8q+1}{9q+5} < \frac{23}{29}$$

$$11(9q+5) < 17(8q+1) \Rightarrow 37q > 38 \Rightarrow q > 1$$

$$29(8q+1) < 23(9q+5) \Rightarrow 25q < 86 \Rightarrow q < 4 \Rightarrow q \in \{2; 3\}$$

$$q=2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{23}{17}; q=3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{32}{25}$$

$$\text{Bài 18: So sánh: } M = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1} \text{ và } N = \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}.$$

(Đề thi HSG 6 trường THCS Lê Ngọc Hân năm học 1997-1998)

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 1999^{1999} + 1 > 1999^{1989} + 1$$

$$1999^{2000} + 1 < 1999^{2009} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1} > \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}$$

Vậy $M > N$.

Bài 19: Hãy so sánh hai phân số sau bằng tất cả các cách có thể được:

$$\text{a) } \frac{1999}{2000}; \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{b) } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 2$$

(Đề thi HSG 6_ Quận Hai Bà Trưng 1999 - 2000)

Lời giải:

a) Cách 1 : Qui đồng mẫu số rồi so sánh tử.

$$\frac{1999}{2000} = \frac{19991999}{20002000} < \frac{19992000}{20002000}$$

Cách 2:

$$\frac{1999}{2000} + \frac{1}{2000} = \frac{19992000}{20002000} + \frac{10000}{20002000} = 1$$

Cách 3: Ta có:

$$\frac{1}{2000} = \frac{10000}{20000000} > \frac{10000}{20002000} \Rightarrow \frac{1999}{2000} < \frac{19992000}{20002000}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{4n-1}{4n^2-2n} > \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2$$

Bài 20: Thực hiện so sánh:

$$\text{a) } A = \frac{2009^{2008} + 1}{2009^{2009} + 1} \text{ với } B = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$$

b) $C = 1.3.5.7.....99$ với $D = \frac{51}{2} \cdot \frac{52}{2} \cdot \frac{53}{2} \cdot \frac{100}{2}$.

(HSG 2013 - 2014)

Lời giải:

a) Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{(2009^{2008} + 1)(2009^{2010} + 1)}{(2009^{2009} + 1)(2009^{2010} + 1)} = \frac{2009^{4018} + 2009^{2010} + 2009^{2008} + 1}{(2009^{2009} + 1)(2009^{2010} + 1)}$$

$$B = \frac{(2009^{2009} + 1)(2009^{2009} + 1)}{(2009^{2010} + 1)(2009^{2009} + 1)} = \frac{2009^{4018} + 2009^{2009} + 2009^{2009} + 1}{(2009^{2010} + 1)(2009^{2009} + 1)}$$

Vì $2009^{2010} + 2009^{2008} = 2008(2009^2 + 1)$

$$2009^{2009} + 2009^{2009} = 2009^{2008} (2009 + 2009)$$

Do $2009^2 + 1 > 2009 + 2009$ nên $A > B$.

(Có thể chứng tỏ $A - B > 0$ để kết luận $A > B$).

Cách khác: Có thể so sánh 2009^A với 2009^B trước.

$$C = 1.3.5.7.....99 = \frac{1.3.5.7.....99.2.4.6.....100}{2.4.6.....100} = \frac{1.3.5.7.....99.2.4.6.....100}{(1.2)(2.2)(3.2)(4.2).....(50.2)}$$

b)

$$= \frac{1.2.3.....50.51.52.53.....100}{1.2.3.....50.\underbrace{2.2.2.....2}_{50 \text{ c.s } 2}} = \frac{51}{2} \cdot \frac{52}{2} \cdot \frac{53}{2} \cdot \frac{100}{2} = D$$

Vậy $C = D$.

Bài 21: So sánh: $\frac{2013^{2012} + 1}{2013^{2013} + 1}$ với $B = \frac{2013^{2013} + 1}{2013^{2014} + 1}$.

(HSG THANH OAI 2013 - 2014)

Lời giải:

$$A = \frac{(2013^{2012} + 1)(2013^{2014} + 1)}{(2013^{2013} + 1)(2013^{2014} + 1)} = \frac{2013^{4026} + 2013^{2012} + 2013^{2014} + 1}{(2013^{2013} + 1)(2013^{2014} + 1)}$$

$$B = \frac{(2013^{2013} + 1)(2013^{2013} + 1)}{(2013^{2014} + 1)(2013^{2013} + 1)} = \frac{2013^{4026} + 2013^{2013} + 2013^{2013} + 1}{(2013^{2014} + 1)(2013^{2013} + 1)}$$

$$2013^{2014} + 2013^{2012} = 2013^{2012} (2013^2 + 1)$$

$$2013^{2013} + 2013^{2013} = 2013^{2012} (2013 + 2013)$$

Do $2013^2 + 1 > 2013 + 2013$ nên $A > B$.

(Có thể chứng tỏ $A - B > 0$ để kết luận $A > B$).

Cách khác: Có thể so sánh 2013^A với 2013^B trước.

Bài 22: So sánh $A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}}$ với $B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}}$

Lời giải:

Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

$$B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

Ta có: $37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39} = 2012^{38} (37^{2012} \cdot 2012 + 2012)$

$$37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38} = 2012^{38} (37^{2012} + 2)$$

mà $37^{2012} \cdot 2012 + 2012 > 37^{2012} + 2$. Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 23: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

(Đề thi HSG 6 Kinh Môn 2017 - 2018)

Lời giải:

Ta có: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018E = \frac{2018^{100} - 2018}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot E = 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1}$

$$F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = \frac{2018^{99} - 2018}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

Vì $\frac{2017}{2018^{100} - 1} < \frac{2017}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1} > 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$

Hay $2018E > 2018F \Rightarrow E > F$

Vậy $E > F$.

Bài 24: So sánh các phân số sau: $\frac{23}{99}, \frac{23232323}{99999999}, \frac{2323}{9999}, \frac{232323}{999999}$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{23}{99} = \frac{23 \cdot 101}{99 \cdot 101} = \frac{2323}{9999}$$

$$\frac{23}{99} = \frac{23 \cdot 10101}{99 \cdot 10101} = \frac{232323}{999999}$$

$$\frac{23}{99} = \frac{23 \cdot 1010101}{99 \cdot 1010101} = \frac{23232323}{99999999}$$

$$\Rightarrow \frac{23}{99} = \frac{2323}{9999} = \frac{232323}{999999} = \frac{23232323}{99999999}$$

Bài 25: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014}$ và $B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015}$

(Đề thi HSG 6 huyện Bạch Thông 2018-2019)

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014} = 1 - \frac{1}{2013.2014}$

$$B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2014.2015}$$

Vì $\frac{1}{2013.2014} > \frac{1}{2014.2015}$ nên $A < B$

Bài 26: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

(Đề thi HSG 6 huyện Lý Nhân 2018-2019)

Lời giải:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2011}\right) + \left(1 - \frac{1}{2012}\right) + \left(1 + \frac{2}{2010}\right)$$

$$A = 3 + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2012}\right)$$

$$\Rightarrow A > 3$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{17}\right)$$

$$B < \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \Rightarrow B < 3$$

Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 27: Cho 2 phân số $\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$

Tìm 10 phân số có dạng $\frac{a}{b}$ sao cho $\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$

Có thể tìm được bao nhiêu phân số $\frac{a}{b}$ thỏa mãn điều kiện trên ?

(Đề HSG Toán 6_Đặng Chánh Kỷ_2018-2019)

Lời giải:

a) $\frac{3}{21} < \frac{a}{b} < \frac{14}{21} \Rightarrow 10$ phân số $\frac{a}{b}$ thỏa mãn là: $\frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \dots, \frac{13}{21}$

b) Có vô số phân số thỏa mãn điều kiện trên vì các phân số cần tìm phụ thuộc vào mẫu chung. Nếu mẫu chung càng lớn thì phân số càng nhiều

Bài 28: Cho biết $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{130}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$
(Đề HSG Toán 6 huyện Thanh Oai 2013-2014)

Lời giải:

$$\begin{aligned}
 & \text{+) Chứng minh } S < \frac{91}{330} \\
 S &= \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{111} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{121} + \dots + \frac{1}{130} \right) \\
 S &< \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right) \\
 S &< \frac{1}{100} \cdot 10 + \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \\
 S &< \frac{66 + 60 + 55}{660} \\
 S &< \frac{181}{660} < \frac{182}{660} \quad \text{hay} \quad S < \frac{91}{330} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{+) Chứng minh } \frac{1}{4} < S \\
 S &> \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{130} + \dots + \frac{1}{130} \right) \\
 S &> \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 + \frac{1}{130} \cdot 10 = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} \\
 S &> \frac{156 + 143 + 132}{1716} \\
 S &> \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716} \quad \text{Hay} \quad S > \frac{1}{4} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$.

! HẾT

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>