ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 4 – ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

CHỦ ĐỀ 4: CÁC BÀI TOÁN QUY VỀ TÌM ƯCLN VÀ BCNN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ước và Bội của một số nguyên

Với $a,b\in Z$ và $b\neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a=bq$ thì ta nói a chia hết cho b. Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a.

2. Nhận xét

- Nếu $a=bq$ thì ta nói a chia cho b được q và viết $a:b=q$

- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.

- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

3. Liên hệ phép chia có dư với phép chia hết.

Nếu số tự nhiên a chia cho số tự nhiên b được số dư là k thì số $(a-k):b$

4. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Ước chung của các số a, b, c được kí hiệu là $\vdots C(a,b,c).$

5. Bội chung của hai hay nhiều số là bội của tất cả các số đó.

Bội chung của các số a, b, c được kí hiệu là: $BC(a,b,c).$

6. Ước chung lớn nhất. Bội chung nhỏ nhất

- Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

- Bội chung nhỏ nhất của hai hay nhiều số là số nhỏ nhất khác không trong tập hợp các bội chung của các số đó.

7. Các tính chất

- $(a,1)=1;[a,1]=a$

- Nếu $a:b\Rightarrow (a,b)=b;[a,b]=a$

- Nếu a, b nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (a,b)=1;[a,b]=a.b$

- $\vdots C(a,b)=\vdots(\vdots CLN(a,b))$ và $BC(a,b)=B(BCNN(a,b))$

- Nếu $(a,b)=d\Rightarrow \begin{cases} a=dm \\ b=dn \end{cases}$ với $(m,n)=1$

- Nếu $[a,b]=c\Rightarrow \begin{cases} c=am \\ c=bn \end{cases}$ với $(m,n)=1$

$ab = (a,b).[a,b]$

-

8. Phương pháp giải

- Nếu số tự nhiên a chia cho số tự nhiên b được số dư là $k \Rightarrow (a-k) \vdots b$

- Nếu $a \vdots b$ và $a \vdots c$ mà ¦ $CLN(a,b) = 1$

$\Rightarrow a$ chia hết cho tích bc với $(a,b,c \in N)$

- Nếu $a \vdots b$ và $a \vdots c$ mà a là số nhỏ nhất

$\Rightarrow a = BCNN(a,b)(a,b,c \in N)$

- Nếu $a \vdots b$ và $m \vdots b$ mà b lớn nhất

$\Rightarrow b = UCLN(a,m)(a,b,m \in N)$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1. Bài toán đưa về tìm ƯCLN và BCNN của hai hay nhiều số

I. Phương pháp giải.

*** Phương pháp giải bài toán đưa về tìm ƯCLN**

- Nếu $a \vdots x, b \vdots x$, x lớn nhất thì $x \in ÖCLN(a,b)$

- Tìm ƯCLN theo ba bước

Bước 1: Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

Bước 2: Chọn ra các thừa số nguyên tố chung.

Bước 3: Lập tích các thừa số đã chọn mỗi thừa số lấy với số mũ nhỏ nhất của nó. Tích đó là ƯCLN phải tìm.

- Kết luận bài toán

*** Phương pháp giải bài toán đưa về tìm BCNN**

- Nếu $x \vdots a, x \vdots b$, x nhỏ nhất thì $x \in BCNN(a,b)$

- Tìm BCNN theo ba bước

Bước 1: Phân tích mỗi số ra thừa số nguyên tố.

Bước 2: Chọn ra các thừa số nguyên tố chung và riêng.

Bước 3: Lập tích các thừa số đã chọn, mỗi thừa số lấy với số mũ lớn nhất của nó. Tích đó là BCNN phải tìm.

- Kết luận bài toán

II.Bài toán.

Bài 1. Tìm số tự nhiên x lớn nhất biết rằng $125 \vdots x,\ 100 \vdots x,\ 150 \vdots x$

Lời giải

Vì $125 \vdots x,\ 100 \vdots x,\ 150 \vdots x$ và x lớn nhất nên $x = \text{ÖCLN}(125,100,150)$

Ta có: $125 = 5^3$

$100 = 2^2.5^2$

$150 = 2.3.5^2$

$\text{ÖCLN}(125,100,150) = 5^2 = 25$

$\Rightarrow x = 25$

Vậy $x = 25$

Bài 2. Tìm số tự nhiên x lớn nhất biết rằng $480 \vdots x,\ 600 \vdots x$

Lời giải

Vì $480 \vdots x,\ 600 \vdots x$ và x lớn nhất nên $x = \text{ÖCLN}(480,600)$

Ta có: $480 = 2^5.3.5$

$600 = 2^3.3.5^2$

$\text{ÖCLN}(480,600) = 2^3.3.5 = 120$

$\Rightarrow x = 120$

Vậy $x = 120$

Bài 3. Lan có một tấm bìa hình chữ nhật, kích thước 75cm và 105cm, Lan muốn cắt tấm bìa thành các mảnh nhỏ hình vuông bằng nhau sao cho tấm bìa được cắt hết không còn thừa mảnh nào,Tính độ dài lớn nhất cạnh hình vuông?

Lời giải

Gọi độ dài lớn nhất cạnh hình vuông là a(cm)

Theo bài ra ta có: $75 \vdots a,\ 105 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a = \text{ÖCLN}(75,105)$

Ta có: $75 = 3.5^2$

$105 = 3.5.7$

$\text{ÖCLN}(75,105) = 3.5 = 15$

$\Rightarrow a = 15$

Vậy độ dài lớn nhất cạnh hình vuông là $15cm$.

Bài 4. Phần thưởng cho học sinh của một lớp học gồm 128 vở, 48 bút chì, 192 nhãn vở. Có thể chia được nhiều nhất thành bao nhiêu phần thưởng như nhau, mỗi phần thưởng gồm bao nhiêu vở, bút chì, nhãn vở?

Lời giải

Gọi số phần thưởng được chia là a(phần thưởng), $a \in N^*$

Theo bài ra ta có: $128 \vdots a, 48 \vdots a, 192 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a = ƯCLN(128, 48, 192)$

Ta có: $128 = 2^7$

$48 = 3.2^4$

$192 = 2^6.3$

$ƯCLN(128, 48, 192) = 2^4 = 16$

$\Rightarrow a = 16$

Vậy có thể chia được nhiều nhất 16 phần thưởng

Mỗi phần thưởng có số vở là $128 : 16 = 8$(vở)

Mỗi phần thưởng có số bút chì là $48 : 16 = 3$(bút chì)

Mỗi phần thưởng có số nhãn vở là $192 : 16 = 12$(nhãn vở)

Bài 5. Hùng có một tấm bìa hình chữ nhật, kích thước 60cm và 96cm, Hùng muốn cắt tấm bìa thành các mảnh nhỏ hình vuông bằng nhau sao cho tấm bìa được cắt hết không còn thừa mảnh nào,Tính độ dài lớn nhất cạnh hình vuông?

Lời giải

Gọi độ dài lớn nhất cạnh hình vuông là a (cm)

Theo bài ra ta có: $60 \vdots a, 96 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a = ƯCLN(60, 96)$

Ta có: $60 = 2^2.3.5$

$96 = 2^5.3$

$ƯCLN(60, 96) = 2^2.3 = 12$

$\Rightarrow a = 12$

Vậy độ dài lớn nhất cạnh hình vuông là $12cm$

Bài 6. Một đội y tế có 24 bác sĩ và 108y tá. Có thể chia đội y tế đó nhiều nhất thành mấy tổ để các bác sĩ cũng như các y tá được chia đều vào mỗi tổ ?

Lời giải

Gọi số tổ được chia là a (tổ), $a \in N^*$

Theo bài ra ta có: $24 \vdots a, 108 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a = ƯCLN(24, 108)$

Ta có: $24 = 2^3.3$

$108 = 2^2.3^3$

$ƯCLN(24, 108) = 2^2.3 = 12$

$\Rightarrow a = 12$

Vậy có thể chia được nhiều nhất 12 tổ.

Bài 7. Khối lớp 6 có 84 học sinh, khối lớp 7 có 63 học sinh, khối lớp 8 có 105 học sinh. Trong một buổi chào cờ học sinh cả ba khối xếp thành các hàng dọc như nhau. Hỏi có thể xếp nhiều nhất thành bao nhiêu hàng dọc để mỗi khối đều không có ai lẻ hàng ?

Lời giải

Gọi số hàng dọc được xếp là a (hàng), $a \in N^*$

Theo bài ra ta có: $84 \vdots a, 63 \vdots a, 105 \vdots a$ và a lớn nhất nên $a = ÖCLN(84,63,105)$

Ta có: $84 = 2^2.3.7$

$63 = 3^2.7$

$105 = 3.7.5$

$ÖCLN(84,63,105) = 3.7 = 21$

$\Rightarrow a = 21$

Vậy có thể xếp được nhiều nhất 21 hàng dọc.

Bài 8. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0 biết rằng $a \vdots 15, a \vdots 20$

Lời giải

Vì $a \vdots 15, a \vdots 20$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = BCNN(15, 20)$

Ta có: $15 = 3.5$

$20 = 2^2.5$

$BCNN(15,20) = 2^2.3.5 = 60$

$\Rightarrow a = 60$

Vậy $a = 60$

Bài 9. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0 biết rằng a chia hết cho 15 và a chia hết cho 18 .

Lời giải

Vì $a \vdots 15, a \vdots 18$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = BCNN(15, 20)$

Ta có: $15 = 3.5$

$18 = 3^2.2$

$BCNN(15,20) = 2.3^2.5 = 90$

$\Rightarrow a = 90$

Vậy $a = 90$

Bài 10. Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất khác 0 biết rằng a chia hết cho $15,18$ và 25

Lời giải

Vì $a \vdots 15, a \vdots 18, a \vdots 25$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = BCNN(15, 20, 25)$

Ta có: $15 = 3.5$

$18 = 3^2.2$

$25 = 5^2$

$BCNN(15, 20, 25) = 2^2.3.5^2 = 300$

$\Rightarrow a = 300$

Vậy $a = 300$

Bài 11. Hai bạn Tùng và Hải thường đến thư viện đọc sách, Tùng cứ 8 ngày đến thư viện một lần, Hải 10 ngày một lần. Lần đầu cả hai bạn cùng đến thư viện vào 1 ngày. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày nữa thì hai bạn lại cùng đến thư viện?

Lời giải

Gọi số ngày ít nhất để hai bạn cùng đến thư viện là a (ngày), $a \in N^*$

Vì $a \vdots 8, a \vdots 10$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = BCNN(8, 10)$

Ta có: $8 = 2^3$

$10 = 2.5$

$BCNN(8, 10) = 2^3.5 = 40$

$\Rightarrow a = 40$

Vậy sau 40 ngày hai bạn lại cùng đến thư viện.

Bài 12. Hai bạn An và Bách cùng trực nhật, An cứ 10 ngày lại trực nhật còn Bách 12 ngày lại trực nhật. Lần đầu cả hai bạn cùng trực nhật vào 1 ngày. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày nữa thì hai bạn lại cùng trực nhật?

Lời giải

Gọi số ngày ít nhất để hai bạn cùng trực nhật là a (ngày), $a \in N^*$

Vì $a \vdots 10, a \vdots 12$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = BCNN(10, 12)$

Ta có: $10 = 2.5$

$12 = 2^2.3$

$BCNN(10, 12) = 2^2.3.5 = 60$

$\Rightarrow a = 60$

Vậy sau 60 ngày hai bạn lại cùng trực nhật.

Bài 13. Hai bạn Minh và Nhâm cùng trực nhật, Minh cứ 12 ngày lại trực nhật còn Nhâm 18 ngày lại trực nhật. Lần đầu cả hai bạn cùng trực nhật vào 1 ngày. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày nữa thì hai bạn lại cùng trực nhật?

Lời giải

Gọi số ngày ít nhất để hai bạn cùng trực nhật là a (ngày), $a \in N^*$

Vì $a \vdots 12, a \vdots 18$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = BCNN(12, 18)$

Ta có: $12 = 2^2.3$

$18 = 2.3^2$

$BCNN(12,18) = 2^2.3^2 = 36$

$\Rightarrow a = 36$

Vậy sau 36 ngày hai bạn lại cùng trực nhật.

Bài 14. Ba con tàu cập bến theo cách sau: Tàu I cứ 15 ngày cập bến một lần, tàu II cứ 20 ngày cập bến một lần, tàu III cứ 12 ngày cập bến một lần. Lần đầu cả ba tàu cùng cập bến vào một ngày. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày cả ba tàu lại cùng cập bến ?

Lời giải

Gọi số ngày ít nhất để ba tàu lại cùng cập bến là a (ngày), $a \in N^*$

Vì $a \vdots 15, a \vdots 20, a \vdots 12$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a = BCNN(15,20,12)$

Ta có: $15 = 3.5$

$20 = 2^2.5$

$12 = 2^2.3$

$BCNN(15,20,12) = 2^2.3.5 = 60$

$\Rightarrow a = 60$

Vậy sau 60 ngày ba tàu lại cùng cập bến.

Bài 15. : Ba ô tô chở khách cùng khởi hành lúc $6h$ sáng từ 1 bến xe đi theo ba hướng khác nhau, xe thứ nhất quay về bến sau $1h5$ phút và sau 10 phút lại đi, xe thứ hai quay về bến sau 56 phút và lại đi sau 4 phút, xe thứ ba quay về bến sau 48 phút và sau 2 phút lại đi, hãy tính khoảng thời gian ngắn nhất để 3 xe cùng xuất phát lần thứ hai trong ngày và đó là lúc mấy giờ?

Lời giải.

Đổi $1h5$ phút = 65 phút

Gọi thời gian ngắn nhất để ba xe cùng xuất lần thứ 2 trong ngày là a (phút), $a \in N^*$

Thời gian xe thứ nhất đi chuyến thứ 2 là $65 + 10 = 75$ (phút)

Thời gian xe thứ hai đi chuyến thứ 2 là $56+4=60$ (phút)

Thời gian xe thứ ba đi chuyến thứ 2 là $48+2=50$ (phút)

Vì $a:75, a:60, a:50$ và a nhỏ nhất khác 0 nên $a=BCNN(75,60,50)$

Ta có:

$75=3.5^2$ $60=2^2.3.5$

$50=2.5^2$

$BCNN(75,60,50)=2^2.3.5^2=300$

$\Rightarrow a=300$(phút) $=5$ (giờ)

Vậy sau 5 giờ thì ba xe lại cùng xuất phát lần thứ 2. Lúc đó là $11h$ trưa.

Dạng 2. Bài toán đưa về tìm BCNN của hai hay nhiều số thỏa mãn điều kiện cho trước.

I. Phương pháp giải.

– Phân tích đề bài, suy luận để đưa về việc tìm bội chung của hai hay nhiều số cho trước.

Nếu $x:a, x:b\Rightarrow x\in BCNN(a,b)$

Nếu x chia cho a dư n, x chia cho b dư $n\Rightarrow x-n\in BCNN(a,b)$

– Tìm BCNN của các số đó.

– Tìm BC của các số là các bội của BCNN này .

– Chọn trong số đó các bội thỏa mãn điều kiện đã cho.

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm số tự nhiên x biết rằng $x:12, x:21, x:28$ và $150<x<200$

Lời giải

Vì $x:12, x:21, x:28$ nên $x\in BC(12,21,28)$

Ta có: $12=2^2.3$

$21=3.7$

$28=2^2.7$

$BCNN(12,21,28)=2^2.3.7=84$

$BC(12,21,28)=B(84)=\{0;84;168;252;336;...\}$

Vì $150<x<200$ nên $x=168$

Vậy $x=168$

Bài 2. Tìm số tự nhiên x biết rằng $x:12, x:20, x:25$ và $0<x<450$

Lời giải

Vì $x \vdots 12, x \vdots 20, x \vdots 25$ nên $x \in BC(12,20,25)$

Ta có: $12 = 2^2.3$

$20 = 2^2.5$

$25 = 5^2$

$BCNN(12,20,25) = 2^2.3.5^2 = 300$

$BC(12,20,25) = B(300) = \{0; 300; 600; 900; ...\}$

Vì $0 < x < 450$ nên $x = 300$

Vậy $x = 300$

Bài 3. Một số sách khi xếp thành từng bó 10 cuốn, 12 cuốn, 18 cuốn đều vừa đủ. Tính số sách đó biết số sách trong khoảng 200 đến 500.

Lời giải

Gọi số sách cần tìm là x (cuốn) , $200 \le x \le 500$, $x \in N^*$

Vì số sách khi xếp thành từng bó 10 cuốn, 12 cuốn, 18 cuốn đều vừa đủ nên $x \vdots 10, x \vdots 12, x \vdots 18$

$\Rightarrow x \in BC(10,12,18)$

Ta có: $10 = 2.5$

$12 = 2^2.3$

$18 = 2.3^2$

$BCNN(10,12,18) = 2^2.3^2.5 = 180$

$BC(10,12,18) = B(180) = \{0; 180; 360; 540; ...\}$

Vì $200 \le x \le 500$ nên $x = 360$

Vậy số sách cần tìm là 360 cuốn.

Bài 4. Một trường tổ chức cho khoảng 800 đến 900 học sinh đi tham quan. Tính số học sinh biết nếu xếp 35 hoặc 40 học sinh lên xe thì vừa đủ.

Lời giải

Gọi số học sinh cần tìm là x (học sinh) , $800 \le x \le 900$, $x \in N^*$

Vì xếp 35 hoặc 40 học sinh lên xe thì vừa đủ nên $x \vdots 35, x \vdots 40$

$\Rightarrow x \in BC(35,40)$

Ta có: $35 = 5.7$

$40 = 2^3.5$

$BCNN(35,40)=2^3.5.7=280$

$BC(35,40)=B(280)=\{0;280;560;840;1120;...\}$

Vì $800\le x\le 900$ nên $x=840$

Vậy trường đó có 840 học sinh.

Bài 5. Một trường tổ chức cho khoảng 700 đến 800 học sinh đi tham quan. Tính số học sinh biết nếu xếp 40người hoặc 45 người lên xe ô tô thì vừa đủ.

Lời giải

Gọi số học sinh của trường là: $n(n\in N^*)$

Theo bài ta có: $700\le n\le 800$

Vì $n:45;n:40\Rightarrow n\in BC(40,45)\Rightarrow n\in B(BCNN(40,45))$

Ta có: $40=2^3.5$

$45=3^2.5$

$$BCNN(40,45)=2^3.3^2.5=360\Rightarrow \begin{cases} n\in B(360) \\ 700\le n\le 800 \end{cases}\Rightarrow n=700$$

Vậy số học sinh của trường đó là 700

Bài 6. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có ba chữ số chia cho $18;30;45$có số dư lần lượt $8;20;35$.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x\in N$, $100\le x\le 999$

Vì x chia cho $18;30;45$có số dư lần lượt $8;20;35$ nên $x+10:18,30,45$

$\Rightarrow x+10\in BC(18,30,45)$

Ta có: $18=2.3^2$

$30=2.3.5$

$45=3^2.5$

$BCNN(18,30,45)=2.3^2.5=90$

$BC(18,30,45)=B(90)=\{0;90;180;270;360;450;540;630;720;810;900;990;1080;...\}$

Vì $100\le x\le 999$ nên $110\le x+10\le 1009$và x nhỏ nhất

$\Rightarrow x+10=180$

$x=170$

Vậy số cần tìm là 170

Bài 7. Tìm số tự nhiên có ba chữ số, sao cho chia nó cho $17;25$ có số dư lần lượt 8 và 16.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, x\in N, 100\le x\le 999$

Vì x chia cho $17;25$ có số dư lần lượt 8 và 16 nên $x+9:17, 25$

$\Rightarrow x+9\in BC(17,25)$

$BCNN(17,25)=17.25=425$

$BC(17,25)=B(425)=\{0; 425; 850; 1275;...\}$

Vì $100\le x\le 999$ nên $109\le x+9\le 1008$

$\Rightarrow x+9\in\{425;850\}$

$\Rightarrow x\in\{416;841\}$

Vậy số cần tìm là 416 hoặc 841.

Bài 8. Tìm số tự nhiên n lớn nhất có ba chữ số, sao cho n chia cho 8 thì dư 7, chia cho 31 thì dư 28.

Lời giải

Vì n chia cho 8 thì dư 7, chia cho 31 thì dư 28 nên

$$\begin{cases} n=8k+7 \\ n=31m+28 \end{cases} \text{ với } k,m\in N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+65=8k+72:8 \\ n+65=31m+93:31 \end{cases}$$

$BCNN(8,31)=8.31=248$

$BC(8,31)=B(248)=\{0; 248; 496; 744; 992; 1240;...\}$

Vì n là số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số nên $n+65=992$

$\Rightarrow n=927$

Vậy $n=927$

Bài 9. Tìm số tự nhiên nhỏ hơn 500, sao cho chia nó cho 15; cho 35 có số dư lần lượt 8 và 13.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, x\in N, x<500$

Vì x chia cho 15; 35 có số dư lần lượt 8 và 13 nên

$$\begin{cases} x=15k+8 \\ x=35m+13 \end{cases} \text{ với } k,m\in N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+232=15k+240 \vdots 15 \\ x+232=35m+245 \vdots 35 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+232 \in BC(15;35)$$

Ta có: $15=3.5$

$35=5.7$

$BCNN(15,35)=3.5.7=105$

$BC(15,35)=B(105)=\{0;105;210;315;420;525;630;735;...\}$

Vì $0<x<500$ nên $232<x+232<732$

$$\Rightarrow x+232 \in \{315;420;525;630\}$$

$$\Rightarrow x \in \{83;188;293;398\}$$

Vậy $x \in \{83;188;293;398\}$

Bài 10. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 12, cho 18, cho 23 có số dư theo thứ tự là $11,17,9$.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là: a ($a \in N$)

Theo bài ta có: $a=12k+11=18q+17=2.3.p+9 \ (k,p,q \in N)$

$\Rightarrow a+37=12k+48 \vdots 12; a+37=18q+54 \vdots 18; a+37=23p+46 \vdots 23 \Rightarrow a+37 \in BC(12,18,23)$

Vì a nhỏ nhất

$\Rightarrow a+37=BCNN(12,18,23); 12=2^2.3; 18=2.3^2; 23=23 \Rightarrow BCNN(12,18,23)=2^2.3^2.23=828$

$\Rightarrow a=828-37=791$

Vậy số tự nhiên cần tìm là 791

Bài 11. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 5, cho 7, cho 9 có số dư theo thứ tự là $3,4,5$.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x \in N$

Vì x chia cho 5, cho 7, cho 9 có số dư theo thứ tự là $3,4,5$ nên

$$\begin{cases} x=5k+3 \\ x=7m+4 \\ x=9n+5 \end{cases} \text{ với } k,m,n \in N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=10k+6 \\ 2x=14m+8 \\ 2x=18n+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=10k+5 \vdots 5 \\ 2x-1=14m+7 \vdots 7 \\ 2x-1=18n+9 \vdots 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x-1\in BC(5,7,9)$ mà x nhỏ nhất $\Rightarrow 2x-1\in BCNN(5,7,9)$

$BCNN(5,7,9)=5.7.9=315$

$\Rightarrow 2x-1=315$

$2x=316$

$x=158$

Vậy $x=158$

Bài 12. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất chia cho 8 dư 6, chia cho 12 dư 10, chia cho 15 dư 13 và chia hết cho 23.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, x\in N$

Vì x chia cho 8 dư 6, chia cho 12 dư 10, chia cho 15 dư 13

nên $x+2:8, x+2:12, x+2:15$

$\Rightarrow x+2\in BC(8,12,15)$

Ta có: $8=2^3$

$12=2^2.3$

$15=3.5$

$BCNN(8,12,15)=2^3.3.5=120$

$BC(8,12,15)=BC(120)=\{0;120;240;360;480;600;...\}$

$\Rightarrow x+2\in\{120;240;360;480;600;...\}$

$\Rightarrow x\in\{118;238;358;478;598;...\}$

Vì x nhỏ nhất, x chia hết cho 23 nên $x=598$.

Vậy $x=598$

Bài 13. Một đội thiếu niên khi xếp hàng $2,3,4,5$ đều thừa 1 người, Tính số đội viên biết số đó nằm trong khoảng 100 đến 150?

Lời giải

Gọi số đội viên cần tìm là x (đội viên) , $100\le x\le 150$, $x\in N^*$

Đội thiếu niên khi xếp hàng $2,3,4,5$ đều thừa 1 người nên x chia cho $2,3,4,5$ đều dư 1

$\Rightarrow x-1:2, x-1:3, x-1:4, x-1:5$

$\Rightarrow x-1\in BC(2,3,4,5)$

$BCNN(2,3,4,5)=2^2.3.5=60$

$BC(2,3,4,5) = B(60) = \{0; 60; 120; 180; ...\}$

Vì $100 \le x \le 150$ nên $x = 120$

Vậy số đội viên là 120 đội viên

Bài 14. Số học sinh khối 6 của một trường THCS trong khoảng từ 200 đến 400, khi xếp hàng $12,15$ và 18 đều thừa 5 học sinh. Tính số học sinh của trường đó.

Lời giải

Gọi số học sinh của trường đó là x (học sinh), $200 \le x \le 400$, $x \in N^*$

Khi xếp hàng $12,15,18$ đều thừa 5 học sinh nên x chia cho $12,15,18$ đều dư 5

$\Rightarrow x - 5 : 12, x - 5 : 15, x - 5 : 18$

$\Rightarrow x - 5 \in BC(12,15,18)$

Ta có:

$12 = 2^2.3$

$15 = 3.5$

$18 = 2.3^2$

$BCNN(12,15,18) = 2^2.3^2.5 = 180$

$BC(12,15,18) = B(180) = \{0; 180; 360; 540; ...\}$

Vì $200 \le x \le 400$ nên $x = 360$

Vậy số học sinh của trường đó là 360 học sinh.

Bài 15. Một trường học có số lượng học sinh không quá 1000. Khi xếp hàng $20,25,30$ thì đều dư 15. Nhưng khi xếp hàng 41 thì vừa đủ. Tính số học sinh của trường đó.

Lời giải

Gọi số học sinh của trường đó là: n ($n \in N^*$)

Theo bài ra ta có: $n \le 1000$

Lại có: $n - 15 : 20,25,30;\ n : 41$

$n - 15 \in BC(20,25,30) \in B(BCNN(20,25,30) = 300 \Rightarrow n - 15 \in B(300)$

Mà $n - 15 \le 1000 - 15 = 985 \Rightarrow n - 15 \in \{300,600,900\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \in \{315,615,915\} \\ n : 41 \end{cases} \Rightarrow n = 615$$

Vậy số học sinh của trường là 615 học sinh.

Bài 16. Một buổi tập đồng diễn thể dục có khoảng từ 350 đến 500 người tham gia. Khi tổng chỉ huy cho xếp $5,6,8$ hàng thì thấy lẻ 1 người, Khi cho đoàn xếp hàng 13 thì vừa vặn không thừa người nào. Hỏi số người tham gia tập đồng diễn là bao nhiêu ?

Lời giải

Gọi số người tham gia tập đồng diễn là x (người), $350 \le x \le 500$, $x \in N^*$

Khi tổng chỉ huy cho xếp $5,6,8$ hàng thì thấy lẻ 1 người

$$\Rightarrow x-1 \vdots 5, x-1 \vdots 6, x-1 \vdots 8$$

$$\Rightarrow x-1 \in BC(5,6,8)$$

Ta có: $5=5$

$6=2.3$

$8=2^3$

$BCNN(5,6,8)=2^3.3.5=120$

$BC(5,6,8)=BC(120)=\{0;120;240;360;480;600;...\}$

$$\Rightarrow x-1 \in \{0;120;240;360;480;600;...\}$$

$$\Rightarrow x \in \{1;121;241;361;481;...\}$$

Vì $350 \le x \le 500$ và x chia hết cho 13 nên $x=481$

Vậy số người tham gia đồng diễn là 481 người

Bài 17. Một khối học sinh khi xếp hàng $2,3,4,5,6$ đều thiếu 1 người nhưng xếp hàng 7 thì vừa đủ, biết số học sinh chưa đến 300. Tính số học sinh của khối đó ?

Lời giải

Gọi số học sinh cần tìm là x (học sinh), $x<300$, $x \in N^*$

Một khối học sinh khi xếp hàng $2,3,4,5,6$ đều thiếu 1 người nên

$$\Rightarrow x+1 \vdots 2, x+1 \vdots 3, x+1 \vdots 4, x+1 \vdots 5, x+1 \vdots 6$$

$$\Rightarrow x+1 \in BC(2;3;4;5,6)$$

$BCNN(2,3,4,5,6)=2^2.3.5=60$

$BC(2,3,4,5,6)=B(60)=\{0;\ 60;\ 120;\ 180;240;300;...\}$

$$\Rightarrow x+1 \in \{60;\ 120;\ 180;240;300;...\}$$

$$\Rightarrow x \in \{59;\ 119;\ 179;239;299;...\}$$

Khối học sinh xếp hàng 7 thì vừa đủ nên x chia hết cho 7 và $x<300$ nên $x=119$

Vậy số học sinh của khối đó là 119

Bài 18. Số học sinh tham gia nghi thức đội là một số có ba chữ số lớn hơn $800.$ Nếu xếp hàng 20 thì dư 9 em, nếu xếp hàng 30 thì thiếu 21em và xếp hàng 35 thì thiếu 26em. Hỏi có tất cả bao nhiêu học sinh tham gia?

Lời giải

Gọi số học sinh tham gia nghi thức đội là x(học sinh), $x\in N^*$, $800<x<999$

Nếu xếp hàng 20 thì dư 9 em, nếu xếp hàng 30 thì thiếu 21em và xếp hàng 35 thì thiếu 26em nên

$$\begin{cases} x-9:20 \\ x+21:30 \\ x+26:35 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=20k+9 \\ x=30m-21 \\ x=35n-26 \end{cases} \text{ với } k,m,n\in N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-9=20k:20 \\ x-9=30m-30:30 \\ x-9=35n-35:35 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x-9\in BC(20,30,35)$$

Ta có: $20=2^2.5$

$30=2.3.5$

$35=5.7$

$BCNN(20,30,35)=2^2.3.5.7=420$

$BC(20,30,35)=BC(420)=\{0;420;840;1260;...\}$

$\Rightarrow x-9\in\{0;420;840;1260;...\}$

$\Rightarrow x\in\{9;429;849;1269;...\}$

Vì $800<x<999$ nên $x=849$

Vậy số học sinh tham gia nghi thức đội là 849em

Bài 19. Người ta đếm số trứng trong một rổ. Nếu đếm theo từng chục cũng như theo tá hoặc theo từng 15 quả thì lần nào cũng dư 1quả. Tính số trứng trong rổ, biết rằng số trứng đó lớn hơn 150 và nhỏ hơn 200 quả.

Lời giải

Gọi số trứng trong rổ là n ($n\in N^*$)

Ta có: $150 < n < 200\,(1); (n-1) \vdots 10,12,15$

$\Rightarrow n-1 \in BC(10,12,15) \Rightarrow n-1 \in B(60)$

Theo (1) $\Rightarrow 149 < n-1 < 199 \Rightarrow n-1 = 180 \Rightarrow n = 181$

Vậy số trứng trong rổ là 181 quả

Bài 20. Một người bán năm giỏ xoài và cam. Mỗi giỏ chỉ đựng một loại quả với số lượng là: 65kg; 71 kg; 58 kg; 72kg; 93kg. Sau khi bán một giỏ cam thì số lượng xoài còn lại gấp ba lần số lượng cam còn lại. Hãy cho biết giỏ nào đựng cam, giỏ nào đựng xoài ?

Lời giải

Tổng số xoài và cam lúc đầu: $65+71+58+72+93 = 359(kg)$

Vì số xoài còn lại gấp ba lần số cam còn lại nên tổng số xoài và cam còn lại là số chia hết cho 4, mà 359 chia cho 4 dư 3nên giỏ cam bán đi có khối lượng chia cho 4dư 3.

Trong các số $65; 71; 58; 72; 93$ chỉ có 71 chia cho 4dư 3.

Vậy giỏ cam bán đi là giỏ 71 kg.

Số xoài và cam còn lại: $359 - 71 = 288(kg)$

Số cam còn lại: $288 : 4 = 72(kg)$

Vậy: các giỏ cam là giỏ đựng 71 kg ; 72 kg .

Các giỏ xoài là giỏ đựng 65kg; 58 kg; 93kg.

Bài 21. Một số tự nhiên chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư 4. Nếu đem số đó chia cho 91 thì dư bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số đó là a

Vì a chia cho 7 dư 5, chia cho 13 dư $4 \Rightarrow a+9 \vdots 7; a+9 \vdots 13$

mà ƯCLN(7, 13) = 1 nên $\Rightarrow a+9 \vdots 7.13 = 91$

$\Rightarrow a+9 = 91k \Rightarrow a = 91k-9 = 91k-91+82 = 91(k-1)+82 (k \in N)$

Vậy a chia cho 91 dư 82 .

Bài 22. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng số đó khi chia cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2, còn chia cho 7 thì dư 3.

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là a $(a \in N, a > 3)$

Khi chia a cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 đều dư là 2

$\Rightarrow a-2 \in BC(3;4;5;6)=\{60;120;180;240;....\}$

Nên a nhận các giá trị $62;122;182;242;...$

Mặt khác a là số nhỏ nhất chia cho 7 thì dư 3 tức là $(a-3)$ là số nhỏ nhất chia hết cho 7

$\Rightarrow a=122$ (vì $a=62$ thì $62-3=59$ không chia hết cho 7).

Vậy số cần tìm là 122.

Bài 23. Hai lớp 6A; 6B cùng thu nhặt một số giấy vụn bằng nhau. Lớp 6A có 1 bạn thu được 26 kg còn lại mỗi bạn thu được 11 kg. Lớp 6B có 1 bạn thu được 25 kg còn lại mỗi bạn thu được 10 kg. Tính số học sinh mỗi lớp biết rằng số giấy mỗi lớp thu được trong khoảng 200 kg đến 300 kg.

Lời giải

Gọi số giấy mỗi lớp thu được là $x(kg) \Rightarrow (x-26) \vdots 11$ và $(x-25) \vdots 10$

Do đó $(x-15) \in BC(10;11)$ và $200<x<300 \Rightarrow x-15=220 \Rightarrow x=235$

Số học sinh lớp 6A là: $(235-26):11+1=20$ (học sinh)

Số học sinh lớp 6B là: $(235-25):10+1=22$ (học sinh)

Vậy lớp 6A có 20 học sinh

Lớp 6B có 22 học sinh.

Bài 24. Số học sinh khối 6 của một trường chưa đến 400 bạn, biết khi xếp hàng $10;12;15$ đều dư 3 nhưng nếu xếp hàng 11 thì không dư. Tính số học sinh khối 6 của trường đó.

Lời giải

Gọi số học sinh là $a(a \in N^*)$

Vì số học sinh khi xếp hàng $10;12;15$ đều dư $3 \Rightarrow a-3 \in BC(10;12;15)$

Mà $BCNN(10;12;15)=60 \Rightarrow a-3=60k(k \in N^*) \Rightarrow a=60k+3$

Ta có bảng sau:

k	1	2	3	4	5	6	7
a	63	123	183	243	303	363	423

Vì số học sinh chưa đến 400 bạn và khi xếp hàng 11 thì không dư nên $a<400$ và $a \vdots 11$

Trong các giá trị trên, chỉ có $a=363$ thỏa mãn bài toán

Vậy số học sinh cần tìm là 363 học sinh.

Dạng 3. Bài toán đưa về tìm ƯCLN của hai hay nhiều số thỏa mãn điều kiện cho trước.

I. Phương pháp giải.

– Phân tích đề bài, suy luận để đưa về việc tìm ước chung của hai hay nhiều số cho trước.

Nếu $a:x,b:x\Rightarrow x\in ÖC(a,b)$

Nếu a chia x cho dư n, b chia cho x dư m $\Rightarrow \begin{cases} a-n:x \\ b-m:x \end{cases} \Rightarrow x\in ÖC(a-n,b-m)$

– Tìm ƯCLN của các số đó.

– Tìm ƯC của các số là các ước của ƯCLN này .

– Chọn trong số đó các ước thỏa mãn điều kiện đã cho.

II. Bài toán.

Bài 1. Tìm số tự nhiên a biết rằng khi chia 24 cho a thì dư 3 và khi chia 38 cho a cũng dư 3

Lời giải

Vì chia 24 cho a thì dư 3 và khi chia 38 cho a cũng dư 3 nên

$24-3:a$ và $a>3$

$38-3:a$ và $a>3$

$\Rightarrow \begin{cases} 21:a \\ 35:a \end{cases}$

$\Rightarrow a\in ÖC(21,35)$

Ta có : $21=3.7$

$35=5.7$

$ÖCLN(21,35)=7$

$ÖC(21,35)=Ö(7)=\{1;7\}$

$\Rightarrow a\in\{1;7\}$

Vì $a>3$ nên $a=7$

Vậy $a=7$

Bài 2. Tìm số tự nhiên a biết rằng 156 chia a dư 12 và 280 chia a dư 10.

Lời giải

Vì 156 chia a dư 12 và 280 chia a dư 10 nên

$156-12:a$ và $a>12$

$280-10:a$ và $a>10$

$\Rightarrow \begin{cases} 144:a \\ 270:a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \text{ÖC}(144,270)$

Ta có : $144 = 2^4.3^2$

$270 = 2.3^3.5$

$\text{ÖCLN}(144,270) = 2.3^2 = 18$

$\text{ÖC}(144,270) = \text{Ö}(18) = \{1;2;3;6;9;18\}$

$\Rightarrow a \in \{1;2;3;6;9;18\}$

Vì $a > 12$ nên $a = 18$

Vậy $a = 18$

Bài 3. Tìm số tự nhiên n biết 288 chia n dư 38 và 414 chia n dư 14.

Lời giải

Vì 288 chia n dư 38 và 414 chia n dư 14 nên

$288 - 38 : n$ và $n > 38$

$414 - 14 : n$ và $n > 14$

$\Rightarrow \begin{cases} 250 : n \\ 400 : n \end{cases}$

$\Rightarrow n \in \text{ÖC}(250,400)$

Ta có : $250 = 2.5^3$

$400 = 2^4.5^2$

$\text{ÖCLN}(250,400) = 2.5^2 = 50$

$\text{ÖC}(250,400) = \text{Ö}(50) = \{1;2;5;10;25;50\}$

$\Rightarrow n \in \{1;2;5;10;25;50\}$

Vì $n > 38$ nên $n = 50$

Vậy $n = 50$

Bài 4. Tìm số tự nhiên b lớn nhất biết rằng chia 326 cho b thì dư 11, còn chia 553 cho b thì dư 13.

Lời giải

Vì chia 326 cho b thì dư 11, còn chia 553 cho b thì dư 13 nên

$326 - 11 : b$ và $b > 11$

$553 - 13 : b$ và $b > 13$

$\Rightarrow \begin{cases} 315 : b \\ 540 : b \end{cases}$

$\Rightarrow b \in \text{ÖC}(315, 540)$

Ta có : $315 = 3^2.5.7$

$540 = 2^2.3^3.5$

$\text{ÖCLN}(315, 540) = 3^2.5 = 45$

$\text{ÖC}(315, 540) = \text{Ö}(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$

Vì $b > 13$, b lớn nhất nên $b = 45$

Vậy $b = 45$

Bài 5. Tìm số tự nhiên a biết rằng 398 chia a dư 38, 450 chia a dư 18.

Lời giải

Vì 398 chia a dư 38, 450 chia a dư 18 nên

$398 - 38 : a$ và $a > 38$

$450 - 18 : a$ và $a > 18$

$\Rightarrow \begin{cases} 360 : a \\ 432 : a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \text{ÖC}(360, 432)$

Ta có : $360 = 2^3.3^2.5$

$432 = 2^4.3^3$

$\text{ÖCLN}(360, 432) = 2^3.3^2 = 72$

$\text{ÖC}(360, 432) = \text{Ö}(72) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$

Vì $a > 38$ nên $a = 72$

Vậy $a = 72$

Bài 6. Tìm số tự nhiên a biết rằng 350 chia a dư 14 và 320 chia a dư 26.

Lời giải

Vì 350 chia a dư 14 và 320 chia a dư 26 nên

$350 - 14 : a$ và $a > 14$

$320 - 26 : a$ và $a > 26$

$\Rightarrow \begin{cases} 336 : a \\ 294 : a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \text{ÖC}(336, 294)$

Ta có : $336 = 2^4.3.7$

$294 = 2.3.7^2$

$\text{ÖCLN}(336, 294) = 2.3.7 = 42$

$\text{ÖC}(336, 294) = \text{Ö}(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$

Vì $a > 26$ nên $a = 42$

Vậy $a = 42$

Bài 7. Tìm số tự nhiên a biết rằng 264 chia a dư 24 và 363 chia a dư 43.

Lời giải

Vì 264 chia a dư 24 và 363 chia a dư 43 nên

$264 - 24 : a$ và $a > 24$

$363 - 43 : a$ và $a > 43$

$\Rightarrow \begin{cases} 240 : a \\ 320 : a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \text{ÖC}(240, 320)$

Ta có : $240 = 2^4.3.5$

$320 = 2^6.5$

$\text{ÖCLN}(240, 320) = 2^4.5 = 80$

$\text{ÖC}(240, 320) = \text{Ö}(80) = \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40; 80\}$

Vì $a > 43$ nên $a = 80$

Vậy $a = 80$

Bài 8. Tìm số tự nhiên a biết rằng khi chia 111 cho a thì dư 15 còn khi chia 180 cho a thì dư 20.

Lời giải

Vì chia 111 cho a thì dư 15 còn khi chia 180 cho a thì dư 20 nên

$111 - 15 : a$ và $a > 15$

$180 - 20 : a$ và $a > 20$

$\Rightarrow \begin{cases} 96 : a \\ 160 : a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \text{ÖC}(96, 160)$

Ta có : $96 = 2^5.3$

$160 = 2^5.5$

ÖCLN$(96,160) = 2^5 = 32$

ÖC$(96,160) =$ Ö$(32) = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$

Vì $a > 20$ nên $a = 32$

Vậy $a = 32$

Bài 9. Nếu ta chia 2 số 3972 và 170 cho cùng một số thì sẽ được số dư tương ứng là 4 và 42. Hỏi số chia là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số chia cần tìm là a

Vì 3972 chia a dư 4 và 170 chia a dư 42 nên

$3972 - 4 : a$ và $a > 4$

$170 - 42 : a$ và $a > 42$

$\Rightarrow \begin{cases} 3968 : a \\ 128 : a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in$ ÖC$(3968,128)$

ÖCLN$(3968,128) = 128$

ÖC$(3968,128) =$ Ö$(128) = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128\}$

Vì $a > 42$ nên $a \in \{64; 128\}$

Vậy $a \in \{64; 128\}$

Bài 10. Tìm số tự nhiên a biết rằng 398 chia a thì dư 38 còn 522 chia cho a thì dư 18.

Lời giải

Vì 398 chia a dư 38 và 522 chia a dư 18 nên

$398 - 38 : a$ và $a > 38$

$522 - 18 : a$ và $a > 18$

$\Rightarrow \begin{cases} 360 : a \\ 504 : a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in$ ÖC$(360,504)$

Ta có : $360 = 2^3.3^2.5$

$504 = 2^3.3^2.7$

ÖCLN$(360,504) = 2^3.3^2 = 72$

$\text{ÖC}(360,504) = \text{Ö}(72) = \{1;2;3;4;6;8;9;12;18;24;36;72\}$

Vì $a > 38$ nên $a = 72$

Vậy $a = 72$

Bài 11. Tìm số tự nhiên n biết rằng khi chia 147 và 193 cho n thì có số dư lần lượt là 17 và 11.

Lời giải

Vì 147 chia n dư 17 và 193 chia n dư 11 nên

$147 - 17 : n$ và $n > 17$

$193 - 11 : n$ và $n > 11$

$\Rightarrow \begin{cases} 130 : n \\ 182 : n \end{cases}$

$\Rightarrow n \in \text{ÖC}(130,182)$

Ta có : $130 = 2.5.13$

$182 = 2.7.13$

$\text{ÖCLN}(130,182) = 2.13 = 26$

$\text{ÖC}(130,182) = \text{Ö}(26) = \{1;2;13;26\}$

Vì $n > 17$ nên $n = 26$

Vậy $n = 26$

Bài 12. Tìm số tự nhiên a biết rằng 351 chia cho a dư 15 còn 321 chia cho a dư 27.

Lời giải

Vì 351 chia a dư 15 và 321 chia a dư 27 nên

$351 - 15 : a$ và $a > 15$

$321 - 27 : a$ và $a > 27$

$\Rightarrow \begin{cases} 336 : a \\ 294 : a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \text{ÖC}(336,294)$

Ta có : $336 = 2^4.3.7$

$294 = 2.3.7^2$

$\text{ÖCLN}(336,294) = 2.3.7 = 42$

$\text{ÖC}(336,294) = \text{Ö}(42) = \{1;2;3;6;7;14;21;42\}$

Vì $a > 27$ nên $a = 42$

Vậy $a=42$

Bài 13. Tìm số tự nhiên b biết rằng chia 327 cho b thì dư 12 còn chia 557 cho b thì dư 17.

Lời giải

Vì chia 327 cho b thì dư 12 còn chia 557 cho b thì dư 17 nên

$327-12:b$ và $b>12$

$557-17:b$ và $b>17$

$\Rightarrow \begin{cases}315:b\\540:b\end{cases}$

$\Rightarrow b\in ÖC(315,540)$

Ta có : $315=3^2.5.7$

$540=2^2.3^3.5$

$ÖCLN(315,540)=3^2.5=45$

$ÖC(315,540)=Ö(45)=\{1;3;5;9;15;45\}$

Vì $b>17$ nên $b=45$

Vậy $b=45$

Bài 14. Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho khi chia $364,414,539$ cho n ta được 3 số dư bằng nhau

Lời giải

Vì ba số $364,414,539$ chia n có cùng số dư nên hiệu 2 số chia hết cho n

$\Rightarrow \begin{cases}414-364:n\\539-364:n\\539-414:n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}50:n\\175:n\\125:n\end{cases}$ mà n lớn nhất $\Rightarrow n\in ÖCLN(50,175,125)$

Ta có : $50=2.5^2$

$175=5^2.7$

$125=5^3$

$ÖCLN(50,175,125)=5^2=25$

$\Rightarrow n=25$

Vậy $n=25$

Bài 15. Tìm số tự nhiên a biết $1960,2002$ chia a có cùng số dư là 28.

Lời giải

Vì 1960 chia a dư 28 và 2002 chia a dư 28 nên

$1960 - 28 \vdots a$ và $a > 28$

$2002 - 28 \vdots a$ và $a > 28$

$\Rightarrow \begin{cases} 1932 \vdots a \\ 1974 \vdots a \end{cases}$

$\Rightarrow a \in ÖC(1932, 1974)$

Ta có : $1932 = 2^2.3.7.23$

$1974 = 2.3.7.47$

$ÖCLN(1932, 1974) = 2.3.7 = 42$

$ÖC(1932, 1974) = Ö(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$

Vì $a > 28$ nên $a = 42$

Vậy $a = 42$

Bài 16. Một số chia cho 7 dư 3, chia cho 17 dư 12, chia cho 23 dư 7. Hỏi số đó chia cho 2737 dư bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số đã cho là A. Theo bài ra ta có: $A = 7a + 3 = 17b + 12 = 23c + 7$

Mặt khác: $A + 39 = 7a + 3 + 39 = 17b + 12 + 39 = 23c + 7 + 39 = 7(a + 6) = 17(b + 3) = 23(c + 2)$

Như vậy $A + 39$ đồng thời chia hết cho 7, 17 và 23.

Nhưng ƯCLN(7, 17, 23) = 1 $\Rightarrow (A + 39) \vdots 7.17.23 \Rightarrow (A + 39) \vdots 2737 \Rightarrow A + 39 = 2737.k$

$\Rightarrow A = 2737k - 39 = 2737(k - 1) + 2698$

Do $2698 < 2737$ nên 2698 là số dư của phép chia số A cho 2737

Bài 17. Cho a, b là các số tự nhiên khác 0 sao cho $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ là số tự nhiên. Gọi d là ƯCLN của a, b

Chứng minh rằng: $a + b \geq d^2$

Lời giải

Ta có :

$d = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a = dm \\ b = dn \end{cases}$ với $(m, n) = 1$

$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab} \in N \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + a + b \vdots ab \\ ab = d^2.mn \vdots d^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + a + b \vdots d^2$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = d^2 m^2 \vdots d^2 \\ b^2 = d^2 n^2 \vdots d^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b \vdots d^2 \Rightarrow a+b \geq d^2 \Rightarrow$$

đpcm

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho khi chia số đó cho 11 dư 6, chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11 *(HSG huyện Quế Võ – Năm 2020 – 2021)*

Lời giải

Theo đề bài số cần tìm là $n\,(n \in \mathrm{N})$, theo đề ra ta có:

$n \vdots 11$ dư $6 \Rightarrow n-6 \vdots 11 \Rightarrow n-6+33 = n+27$ chia hết cho 11 (Do $33 \vdots 11$)

$n \vdots 4$ dư $1 \Rightarrow n-1 \vdots 4 \Rightarrow n-1+28 = n+27$ chia hết cho 4 (Do $28 \vdots 4$)

$n \vdots 19$ dư $11 \Rightarrow n-11 \vdots 19 \Rightarrow n-11+38 = n+27$ chia hết cho 19 (Do $38 \vdots 19$)

Suy ra $n+27$ chia hết cho các số $4;\ 11;\ 19$ mà n là số tự nhiên nhỏ nhất nên

$n+27 = BCNN(4;\ 11;\ 19) = 836$

Vậy $n = 836-27 = 809$

Bài 2: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho khi a chia cho 2 dư 1, a chia cho 3 dư 1, a chia cho 5 dư 4, a chia cho 7 dư 3

(HSG CƯM'GAR – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Theo đề bài số cần tìm là $a\,(a \in \mathrm{N})$, theo đề ra ta có:

$a \vdots 2$ dư $1 \Rightarrow a+1 \vdots 2 \Rightarrow a+1+10 = a+11$ chia hết cho 2 (Do $10 \vdots 2$)

$a \vdots 3$ dư $1 \Rightarrow a+2 \vdots 3 \Rightarrow a+2+9 = a+11$ chia hết cho 3 (Do $9 \vdots 3$)

$a \vdots 5$ dư $4 \Rightarrow a+1 \vdots 5 \Rightarrow a+1+10 = a+11$ chia hết cho 5 (Do $10 \vdots 5$)

$a \vdots 7$ dư $3 \Rightarrow a+4 \vdots 7 \Rightarrow a+4+7 = a+11$ chia hết cho 7 (Do $7 \vdots 7$)

Suy ra $a+11$ cùng chia hết cho $2;3;5;7$ mà a là số nhỏ nhất nên

$a+11 = BCNN\ (2;3;5;7)$

Mà $2;3;5;7$ đôi một nguyên tố cùng nhau

Do vậy: $a+11 = 2.3.5.7 = 210$

Vậy $a = 199$

Bài 3: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi số đó chia cho 3 dư 1; chia cho 4 dư 2; chia cho 5 dư 3; chia cho 6 dư 4. *(HSG Quảng Trạch – Năm 2020 – 2021)*

Lời giải

Gọi số cần tìm là $a\,(a\in N)$, theo đề ra ta có:

$a:3$ dư $1\Rightarrow a+2\vdots 3$

$a:4$ dư $2\Rightarrow a+2\vdots 4$

$a:5$ dư $3\Rightarrow a+2\vdots 5$

$a:6$ dư $4\Rightarrow a+2\vdots 6$

Suy ra $a+2$ cùng chia hết cho $3;4;5;6$ mà a là số nhỏ nhất nên

$a+2=BCNN\,(3;4;5;6)=60$

Vậy $a=58$

Bài 4: Tìm số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số, sao cho khi chia số đó cho 2, cho 3, cho 4, cho 5, cho 6 ta được các số dư lần lượt là $1,2,3,4,5$. (HSG Nho Quan – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là $a\,(a\in N,\ 100\le a\le 999)$

$a:2$ dư $1\Rightarrow a-1\vdots 2\Rightarrow a-1+2=a+1$ chia hết cho 2 (Do $2\vdots 2$)

$a:3$ dư $2\Rightarrow a-2\vdots 3\Rightarrow a-2+3=a+1$ chia hết cho 3 (Do $3\vdots 3$)

$a:4$ dư $3\Rightarrow a-3\vdots 4\Rightarrow a-3+4=a+1$ chia hết cho 4 (Do $4\vdots 4$)

$a:5$ dư $4\Rightarrow a-1\vdots 5\Rightarrow a-4+5=a+1$ chia hết cho 5 (Do $5\vdots 5$)

$a:6$ dư $5\Rightarrow a-5\vdots 6\Rightarrow a-5+6=a+1$ chia hết cho 6 (Do $6\vdots 6$)

Suy ra $a+1$ cùng chia hết cho $2;3;4;5;6$

Ta có:

$BCNN\,(2;3;4;5;6)=60$

$\Rightarrow a+1\in BC(2,3,4,5,6)=B(60)=\{0,60,120,360,...,960,1020,...\}$

Vì a là số tự nhiên lớn nhất có ba chữ số nên $a+1=960$

Vậy $a=960-1=959$

Bài 5: Số học sinh của trường THCS A nếu xếp mỗi hàng 10 học sinh thì thừa ra 3 học sinh, nếu xếp mỗi hàng 12 thì thừa ra 5 học sinh, nếu xếp mỗi hàng 15 thì thừa ra 8 học sinh, nếu xếp mỗi hàng 19 thì vừa đủ . Hỏi trường THCS A có bao nhiêu học sinh tất cả , biết số học sinh của trường đó lớn hơn 800 và nhỏ hơn 1000. *(OLYMPIC Toán 6 – Năm 2020 – 2021)*

Lời giải

Gọi số học sinh của trường THCS A là x ($x\in N^*$, $800<x<1000$, học sinh)

Theo đề ra ta có:

Xếp mỗi hàng 19 học sinh thì vừa đủ nên $x \vdots 19$, suy ra đặt $x = 19k\ (k \in N^*)$ khi đó vì:

Xếp mỗi hàng 10 học sinh thừa 3 học sinh nên $x : 10$ dư 3, suy ra $19k : 10$ dư 3 hay

$19k - 3 + 10 = 19k + 7 \vdots 10$ (vì $10 \vdots 10$)

Xếp mỗi hàng 12 học sinh thì thừa 5 học sinh nên $x : 12$ dư 5, suy ra $19k : 12$ dư 5 hay

$19k - 5 + 12 = 19k + 7 \vdots 12$ (vì $12 \vdots 12$)

xếp mỗi hàng 15 học sinh thì thừa 8 học sinh nên $x : 15$ dư 8, suy ra $19k : 15$ dư 8 hay

$19k - 8 + 15 = 19k + 7 \vdots 15$ (vì $15 \vdots 15$)

Do đó $19k + 7 \in BC(BCNN(10,12,15))$

$\Rightarrow 19k + 7 \in BC(60) = \{0;60;120;180;240;300;360;420;480;540;600;660;720;780;840;900;960;1020;...\}$

Vì $x \in N^*,\ 800 < x < 1000$, hãc sinh) nên $19k + 7 \in \{840;900;960\}$

Lập bảng:

$19k + 7$	840	900	960
k	$\frac{833}{19}$ (loại)	47 (Thỏa mãn)	$\frac{953}{19}$ (loại)

$\Rightarrow a = 19.47 = 893$ (học sinh)

Vậy số học sinh của trường THCS A là 893 học sinh.

Bài 6: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất biết a chia cho 104 dư 51, a chia cho 96 dư 27.

(HSG Kim Sơn – Năm 2020 – 2021).

Lời giải

Gọi số cần tìm là $a\ (a \in N)$, theo đề ra ta có:

$\Rightarrow a - 51 \vdots 104 \Rightarrow a - 51 + 3.104 \vdots 104 \Rightarrow a + 261 \vdots 104$ (Vì $3.104 \vdots 104$)

$\Rightarrow a - 27 \vdots 96 \Rightarrow a - 27 + 3.96 \vdots 96 \Rightarrow a + 261 \vdots 96$ (Vì $3.96 \vdots 96$)

Vì a là số tự nhiên nhỏ nhất nên:

$\Rightarrow a + 261 = BCNN(96;104) = 1248$

Vậy $a = 1248 - 261 = 987$

Bài 7: Tìm số tự nhiên a, biết rằng 296 chia cho a thì dư 16, còn 230 chia cho a thì dư 10.

(Năng khiếu toán 6 lần 1 – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là $a\ (a \in N^*, a > 16)$, theo đề ra ta có:

$296 - 16 \vdots a \Rightarrow 280 \vdots a$

$230-10 \vdots a \Rightarrow 220 \vdots a$

$a \in Ư\left(ƯCLN\{220;280\}\right) = Ư(20)$

Vì $a > 16$ nên $a = 20$

Vậy $a = 20$

Bài 8: Tìm số tự nhiên a biết rằng a chia cho 7 dư 3; a chia cho 9 dư 1, a chia hết cho 11 và a nằm trong khoảng từ 350 đến 500.

(HSG Nam Đàn – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là a $(a \in N, 350 < a < 500)$, theo đề ra ta có:

$a:7$ dư 3 $\Rightarrow a-3 \vdots 7 \Rightarrow a-3+245 = a+242 \vdots 7$ nên $a+242$ chia hết cho 7 (Do $245 \vdots 7$)

$a:9$ dư 1 $\Rightarrow a-1 \vdots 9 \Rightarrow a-1+243 = a+242 \vdots 9$ nên $a+242$ chia hết cho 9 (Do $243 \vdots 9$)

$a \vdots 11 \Rightarrow a+242 \vdots 11$ (Do $242 \vdots 11$)

Suy ra $a+242$ cùng chia hết cho $7;9;11$

Nên $a+242 \in B\left(BCNN\ (7,9,11)\right) = B(693) = \{0;693;1386...\}$

Vì $a \in N,\ 350 < a < 500$ do đó $a + 242 = 693 \Rightarrow a = 451$

Vậy $a = 451$

Bài 9: Tìm số tự nhiên a, biết 398 chia cho a dư 38, còn 450 chia cho a dư 18.

(OLYMPIC toán 6 Quốc Oai – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là a $(a \in N^*, a > 38)$, theo đề ra ta có:

$398-38 \vdots a \Rightarrow 360 \vdots a$

$450-18 \vdots a \Rightarrow 432 \vdots a$

$\Rightarrow a \in Ư\left(ƯCLN\{360;432\}\right) = Ư(72) = \{1;2;3;4;6;8;9;12;18;24;36;72\}$

Vì $a > 38$ nên $a = 72$

Bài 10: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết khi chia số đó cho $36, 40, 42$ lần lượt được các số dư là $34,\ 38,\ 40.$

(OLYMPIC toán 6 Quốc Oai – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số cần tìm là a, $a \in N$, theo đề ra ta có:

$a:36$ dư 34 $\Rightarrow a-34 \vdots 36 \Rightarrow a-34+36 = a+2$ chia hết cho 36 (Do $36 \vdots 36$)

$a:40$ dư $38 \Rightarrow a-38 \vdots 40 \Rightarrow a-38+40=a+2$ chia hết cho 40 (Do $40 \vdots 40$)

$a:42$ dư $40 \Rightarrow a-40 \vdots 42 \Rightarrow a-40+42=a+2$ chia hết cho 42 (Do $42 \vdots 42$)

Vì a là số tự nhiên nhỏ nhất nên:

$\Rightarrow a+2=BCNN(36;40;42)=2520$

Vậy $a=2520-2=2518$

Bài 11: Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số, sao cho khi chia số đó cho 8 dư 7 và chia số đó cho 31 dư 28.

(HSG Lục Nam – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, x \in N$

Vì x chia cho 8 dư 7, chia cho 31 dư 28 nên

$$\begin{cases} x=8k+7 \\ x=31m+28 \end{cases} \text{ với } k,m \in N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+65=8k+72 \vdots 8 \\ x+65=31m+93 \vdots 31 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+65 \in BC(8;31)$$

$$BCNN(8,31)=8.31=248$$

$$BC(8,31)=B(248)=\{0;248;496;744;992;1240;...\}$$

Vì x là số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số nên $x+65=992 \Rightarrow x=927$

Vậy số cần tìm là 927

Bài 12: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng khi chia số đó cho các số $25,28$ và 35 thì được các số dư lần lượt là $5,8,15$.

(HSG Bá Thước – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, x \in N$

Vì x chia cho các số $25,28$ và 35 thì được các số dư lần lượt là $5,8,15$ nên

$$x+20 \vdots 25$$

$$x+20 \vdots 28$$

$$x+20 \vdots 35$$

$$\Rightarrow x+20 \in BC(25,28,35)$$

Ta có: $25=5^2; 28=2^2.7; 35=5.7$

$BCNN(25,28,35)=2^2.5^2.7=700$

$BC(25,28,35)=B(700)=\{0;\ 700;1400;\ ...\}$

Vì x là số tự nhiên có 3 chữ số nên $x+20=700\Rightarrow\ x=700-\ 20=680$

Vậy số cần tìm là 680

Bài 13: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng khi chia số đó cho các số $7;9;17$ được số dư lần lượt là $1;3;13$

(HSG Gia Bình – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x,x\in N$

Vì x chia cho cho các số $7;9;17$ được số dư lần lượt là $1;3;13$ nên

$$\begin{cases}x=7k+1\\x=9m+3\\x=17n+13\end{cases}$$ (Với $k,m,n\in N^*$)

$$\Rightarrow\ \begin{cases}x+888=7k+889\vdots 7\\x+888=9m+891\vdots 9\\x+888=17n+901\vdots 17\end{cases}$$

$\Rightarrow\ x+888\in BC(7,\ 9,17)$ mà x nhỏ nhất

$\Rightarrow\ x+888=BCNN(7,\ 9,17)=1071$

$\Rightarrow\ x=183$

Vậy số cần tìm là 183

Bài 14: Số học sinh khối 6 của một trường khi xếp hàng 12, hàng 15, hàng 18 đều thừa 2 học sinh. Biết số học sinh khối 6 chưa đến 200 em. Hỏi khối 6 của trường đó có bao nhiêu học sinh ?

(HSG Lục Ngạn – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số học sinh khối 6 của trường đó là x (học sinh), $x\in N^*,x<200$

Nếu xếp hàng 12, hàng 15, hàng 18 đều thừa 2 học sinh nên

$$\begin{cases}x-\ 2\vdots 12\\x-\ 2\vdots 15\\x-\ 2\vdots 18\end{cases}$$

$\Rightarrow\ x-\ 2\in BC(12,15,18)$

Ta có: $12=2^2.3$

$15=3.5$

$18=2.3^2$

$BCNN(12,15,18)=2^2.3^2.5=180$

$BC(12,15,18)=BC(180)=\{0;180;360;...\}$

Vì $x<200$ nên $x-2=180\Rightarrow x=182$

Vậy số học sinh khối 6 của trường đó là 182 em

Bài 15: Tìm số tự nhiên a nhỏ nhất sao cho a chia cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự là $2,3,4$.

(HSG Thái Thụy – Năm 2019 – 2020)

Lời giải

Vì a chia cho 3, cho 5, cho 7 được số dư theo thứ tự là $2,3,4$ nên

$$\begin{cases} a=3k+2 \\ a=5m+3 \\ a=7n+4 \end{cases}$$ (Với $k,m,n\in N^*$)

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-1=6k+3\vdots 3 \\ 2a-1=10m+5\vdots 5 \\ 2a-1=14n+7\vdots 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2a-1\in BC(3,5,7)$ mà a nhỏ nhất

$\Rightarrow 2a-1=BCNN(3,5,7)=105$

$\Rightarrow a=53$

Vậy $a=53$

Bài 16: Tìm số tự nhiên có ba chữ số biết nó chia cho 23 thì dư 14 và chia cho 25 thì dư 16.

(HSG Tiền Hải – Năm 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x\in N$, $x<1000$

Vì x chia cho 23 thì dư 14 và chia cho 25 thì dư 16 nên

$x+9\vdots 23$

$x+9\vdots 25$

$\Rightarrow x+9\in BC(23,25)$

$BCNN(23,25)=575$

$BC(23,25)=BC(575)=\{0;575;1150;...\}$

Vì $x<1000$ nên $x+9=575\Rightarrow x=566$

Vậy số cần tìm là 566

Bài 17: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất, biết rằng khi chia số đó cho 3 dư 1, chia cho 5 dư 3 và chia cho 7 dư 5.

(HSG Nhơn Trạch – Năm 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, $x\in N$, x nhỏ nhất.

Vì x chia cho 3 dư 1, chia cho 5 dư 3 và chia cho 7 dư 5 nên

$$\begin{cases} x=3k+1 \\ x=5m+3 \\ x=7n+5 \end{cases} \text{ (Với } k,m,n\in N^* \text{)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=3k+3 \vdots 3 \\ x+2=5m+5 \vdots 5 \\ x+2=7n+7 \vdots 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow x+2\in BC(3,5,7)$ mà x nhỏ nhất

$\Rightarrow x+2=BCNN(3,5,7)=3.5.7=105$

$\Rightarrow x=103$

Vậy số cần tìm là 103

Bài 18: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có tính chất sau:

Số đó chia cho 3 dư 1, chia cho 4 thì dư 2, chia cho 5 thì dư 3, chia cho 6 thì dư 4 và chia hết cho 13.

(HSG Sơn Tịnh – Năm 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là x, x nhỏ nhất.

Vì x chia cho 3 dư 1, chia cho 4 thì dư 2, chia cho 5 thì dư 3, chia cho 6 thì dư 4 nên

$x+2\vdots 3;\ x+2\vdots 4; x+2\vdots 5; x+2\vdots 6$

$\Rightarrow x+2\in BC(3,4,5,6)$

$BCNN(3,4,5,6)=60$

$BC(3,4,5,6)=B(60)=\{0;60;120;180;240;300;360;420;480;540;600;...\}$

$\Rightarrow x+2\in\{60;120;180;240;300;360;420;480;540;600;...\}$

$\Rightarrow x\in\{58;118;178;238;298;358;418;478;538;598;...\}$

Mà $x\vdots 13$, x nhỏ nhất nên $x=598$

Vậy số cần tìm là 598

Bài 19: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số đó chia cho 5 dư 1, chia cho 11 dư 4, chia cho 13 dư 10.

(*HSG Kiến Xương – Năm 2012 – 2013)*

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, x\in N, x$ nhỏ nhất.

Vì x chia cho 5 dư 1, chia cho 11 dư $4,$ chia cho 13 dư 10 nên

$$\begin{cases} x=5k+1 \\ x=11m+4 \\ x=13n+10 \end{cases}$$ (Với $k,m,n\in N^*$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x+29=5k+30 \vdots 5 \\ x+29=11m+33 \vdots 11 \\ x+29=13n+39 \vdots 13 \end{cases}$$

$\Rightarrow x+29\in BC(5,11,13)$ mà x nhỏ nhất

$\Rightarrow x+29=BCNN(5,11,13)=5.11.13=715$

$\Rightarrow x=686$

Vậy số cần tìm là 686

Bài 20: Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng khi chia số đó cho các số $25;28;35$ thì được số dư lần lượt là $5;8;15.$

(HSG Kiến Xương – Năm 2011 – 2012)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, x<1000$

Vì x chia cho các số $25;28;35$ thì được số dư lần lượt là $5;8;15$ nên

$x+20\vdots 25;\ x+20\vdots 28;\ x+20\vdots 35$

$\Rightarrow x+20\in BC(25,28,35)$

$BCNN(25,28,35)=700$

$BC(25,28,35)=B(700)=\{0;700;1400;2100;2800;...\}$

$\Rightarrow x+20\in\{700;1400;2100;2800;...\}$

$\Rightarrow x\in\{680;1380;2080;2780;...\}$

Mà $x<1000$ nên $x=680$

Vậy số cần tìm là 680

Bài 21: Tìm số tự nhiên nhỏ nhất sao cho khi chia cho 11 dư $6,$ chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư $11.$

(HSG Phú Lương – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số tự nhiên cần tìm là $x, x\in N, x$ nhỏ nhất.

Vì x chia cho 11 dư $6,$ chia cho 4 dư 1 và chia cho 19 dư 11 nên

$$\begin{cases} x=11k+6 \\ x=4m+1 \\ x=19n+11 \end{cases} (\text{ Với } k,m,n\in N^*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+27=11k+33 \vdots 11 \\ x+27=4m+28 \vdots 4 \\ x+27=19n+38 \vdots 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+27\in BC(11,4,19) \text{ mà } x \text{ nhỏ nhất}$$

$$\Rightarrow x+27=BCNN(11,4,19)=11.4.19=836$$

$$\Rightarrow x=809$$

Vậy số cần tìm là 809

Bài 22: Có 120 quyển vở và 72 cái bút được chia thành các phần thưởng đều nhau. Hỏi có thể chia được thành bao nhiêu phần thưởng để số quyển vở và số bút trong mỗi phần thưởng là bé nhất.

(HSG Anh Sơn – Năm 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số phần thưởng được chia là a(phần thưởng), $a\in N^*$

Theo bài ra ta có: $120 \vdots a, 72 \vdots a$ nên $a=ÖC(120,72)$

Ta có: $120=2^3.3.5$

$72=3^2.2^3$

$ÖCLN(120,72)=2^3.3=24$

$\Rightarrow a\in ÖC(24)=\{1;2;3;4;6;8;12;24\}$

Vì số quyển vở và số bút trong mỗi phần thưởng là bé nhất nên $a=24$

Vậy có thể chia được 24 phần thưởng

Mỗi phần thưởng có số vở là $120:24=5$(vở)

Mỗi phần thưởng có số bút là $72:24=3$(bút)

Bài 23: Trong kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh gồm ba môn Toán, Ngữ Văn, Tiếng Anh, số học sinh tham gia như sau: Ngữ văn có 96 học sinh; Toán có 120 học sinh và Tiếng Anh có 72 học sinh. Trong buổi lễ tổng kết, các bạn tham gia thi được phân công đứng thành hàng dọc sao cho mỗi hàng có số bạn thi mỗi

môn bằng nhau. Hỏi có thể phân công học sinh đứng thành bao nhiêu hàng để số học sinh mỗi môn trong một hàng ít nhất.

(HSG Bắc Ninh – Năm 2020 – 2021)

Lời giải

Gọi số hàng được phân công là a (hàng), $a \in N^*$

Theo bài ra ta có: $96 \vdots a;\ 120 \vdots a,\ 72 \vdots a$ nên $a = ÖC(96,120,72)$

Ta có: $96 = 2^5.3$

$120 = 2^3.3.5$

$72 = 3^2.2^3$

$ÖCLN(96,120,72) = 2^3.3 = 24$

$\Rightarrow a \in ÖC(24) = \{1;2;3;4;6;8;12;24\}$

Vì số học sinh mỗi môn trong một hàng ít nhất nên $a = 24$

Vậy có thể phân công được 24 hàng

********** **********

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
https://www.vnteach.com
Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây
https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6