**Ví dụ 13.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này chứa rất nhiều căn thức và mỗi căn thức lại chẳng có liên quan gì đến nhau, nên để thoát căn thức ta chỉ còn một phương án duy nhất là nâng lũy thừa với điều kiện cho phép của bài toán.

Cụ thể sau khi nâng lũy thừa ta đưa phương trình về phương trình:



Tới đây ta nhận xét rằng:  và  nên ta có tiếp một biến đổi nữa: 

Phương trình (\*) gợi cho lối thoát cần thiết nhất lúc này là hàm số, để sử dụng được điều đó ta cần suy nghiệm phương trình trước xem ta cần phải làm gì với hàm số. Không khó bằng máy tính ta có nghiệm duy nhất của phương trình là  Vậy điều này sẽ gợi đường cho chúng ta khẳng định hàm số cần xét sẽ liên tục và hoặc đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm. Từ đây ta đưa ra cách giải cho bài toán như sau:

Điều kiện: 

Do  không thỏa phương trình đã cho nên ta chỉ cần xét điều kiện 

Bình phương hai vế phương trình đã cho ta được một phương trình tương đương như sau:   do  

Xét hàm số: 

Ta có:  

Nhận xét rằng  ta có: 

Lại có: 

  (luôn đúng)

Suy ra , vậy hàm số  liên tục và đồng biến với mọi 

Do đó phương trình  có tối đa một nghiệm. Mặt khác 

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**- Bình luận.** Bài toán trên là một bài toán khá hay, vì đường lối giải nó có điều mà khi gặp phương trình vô tỷ ta vẫn thường tính đến. Cái quan trọng chính là thông qua những đánh giá cơ bản chúng ta sẽ thu được những điều tưởng chừng như rất khó thành đơn giản bởi những phép toán cơ bản.

**Ví dụ 14.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán chúng ta đang xét về hình thức cũng chứa nhiều căn như ví dụ 11. Tuy nhiên ở ví dụ 11 các căn thức lại không gắn kết với nhau, ở bài toán này nếu chúng ta tinh ý sẽ thấy các đại lượng trong căn và ngoài căn có liên quan với nhau. Thật vậy, ta hãy để ý đến các “hằng đẳng thức hụt” và “hằng đẳng thứ dư” sau đây:

- Ta có: 

- Ta có: 

Tới đây, ta đã hình dung được để đơn giảm hóa bớt hình thức bài toán ta sẽ ẩn phụ hóa 

Lúc đó phương trình sẽ được viết lại: 

Với hình thức của phương trình vừa biến đổi cộng với nhận xét  giúp chúng ta có thể mạnh dạng thoát căn thức bằng phương pháp nâng lũy thừa.

Bây giờ, ta cụ thể hóa lời giải bài toán như sau:

Điều kiện:  

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:



Đặt  với    

Lúc đó phương trình (1) trở thành phương trình:

  

Nhận xét rằng với   Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Lại có với   Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Từ đó ta có:    

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là  

**- Bình luận.** Đây là một bài toán hay, lời giải trên cho bài toán này là một lời giải tự nhiên không quá kỉ thuật chỉ cần sự quan sát và ghi nhớ các hằng đẳng thức cộng với việc nhận biết đánh giá cơ bản là chúng ta sẽ có một đường lối giải bài toán rất gọn gàng.

**Ví dụ 15.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Trước tiên các bạn hãy thử tư duy phân tích bài toán này theo hướng giải đặt ẩn phụ không hoàn toàn để giải phương trình này xem sao nhé? Bây giờ chúng ta sẽ phân tích bài giải này theo hướng phương pháp nhân liên hợp. Thông qua các ví dụ vừa qua, chắc các bạn cũng đã tích lũy cho mình được một số kỉ năng liên hợp nhất định. Tuy nhiên, thông qua bài toán này chúng tôi đưa đến tiếp cho các bạn một kỷ năng nhân lượng liên hợp nữa. Cụ thể không quá khó để nhận biết phương trình này có hai nghiệm , tức là ta cần có nhân tử 

Điều đó dẫn đến ta cần thêm hệ số hoặc biểu thức dạng  để đạt được như mong muốn. Tuy vậy, hình thức bài toán chưa cho phép chúng ta đánh liều để thêm bớt.

Nhận xét thấy  không thỏa phương trình nên với ta đưa phương trình đã cho về phương trình: 

Bây giờ nếu ta thêm bớt ngay cho đại lượng căn để xuất hiện nhân tử  thì khả năng bên vế phải  cũng xuất hiện nhân tử thì điều đó cũng xảy ra nhưng có khi ta sẽ gặp trở ngại sau khi đưa được nhân tử . Vì vậy, để thuận tiện và chắc chắn hơn ta sẽ thêm bớt cả hai vế để cân bằng cho bài toán. Cụ thể, ta thêm bớt như sau:





Tới đây, ta cần xác định a, b sao cho:



Đồng nhất hệ số hai vế của phương trình dẫn đến ta giải hệ:

  

Vậy ta có hai cách thêm bớt. Cụ thể:

**- Cách 1:** Do   nên điều kiện để phương trình có nghiệm là:

 

Nhận xét  không thỏa phương trình. Do đó  ta biến đổi phương trình đã cho trở thành:

 

 

Với:  

Với:   

Đối chiếu với điều kiện ta thu được  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**- Cách 2:** Do ,  nên điều kiện để phương trình có nghiệm là:

 

Nhận xét  không thỏa phương trình. Do đó  ta biến đổi phương trình đã cho trở thành:

 

 

Với   

Đối chiếu điều kiện ta có  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**- Bình luận.** Thông qua bài toán này, một lần nữa chúng ta lại biết thêm một kỉ năng nữa trong việc tạo nhân tử chung nhờ vào phương pháp nhân lượng liên hợp. Và thông thường các kỷ năng này nó cần có sự trau dồi và tạo một phản xạ nhất định khi chúng ta cần áp dụng tới. Ví dụ hai cách giải trên chúng ta thấy sự linh hoạt trong việc thêm bớt và hướng đi của nó trong bài toán. Chúng ta có thể sử dụng phương pháp này cho một bài toán tổng quát sau:  Vậy vấn đề đặt ra là nếu lỡ đứng trước một phương trình có dạng:  thì ta còn có thể tư duy giải bài toán này theo hướng đó không? Vấn đề sẽ được giải quyết thông qua ví dụ tiếp theo sau đây.

**Ví dụ 16.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Tương tự như ví dụ vừa phân tích ở trên, bây giờ chúng ta sẽ đi tìm các hệ số như đã phân tích ở ví dụ trên như sau:





Ta đi xác định a, b sao cho:



Đồng nhất hệ số hai vế phương trình đã cho ta hệ phương trình sau:

  

Từ đây, ta đưa ra hướng giải quyết như sau: Điều kiện: 

Nhận xét  không thỏa phương trình đã cho. Do đó  ta biến đổi phương trình về phương trình:

 

Với điều kiện  ta chưa biết chắc  nên để nhân lượng liên hợp ta cần xét:

   thỏa 

Với  ta có phương trình đã cho nghiệm đúng. Do đó  là một nghiệm của phương trình.

Với   nên  tương đương với phương trình:

 

 

Với:   

Với:  

 

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình:

  

**Ví dụ 17.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này, ta có thể sử dụng cách trên để tìm hệ số và nhân lượng liên hợp. Tuy nhiên, ở đây chúng tôi xin đưa ra một phân tích tư duy tự nhiên để giải bài toán trên như sau:

Nhìn vào hình thức của phương trình, chúng ta nghĩ ngay đến hai biểu thức đặc biệt   Điều đó làm ta nghĩ đến việc kiểm tra phương trình với hai giá trị  

Không khó để ta thấy  thỏa phương trình đã cho. Dẫn đến phương trình bậc ba vế phải của phương trình cũng có một nghiệm 

Bây giờ, ta chú ý rằng:  Với sự chú ý này, ta sẽ có hai hướng để vạch ra hướng giải quyết.

**- Hướng 1:** Ta lấy phương trình bậc ba chia cho phương trình bậc hai trong căn với điều kiện là hệ số của  chia cho hệ số  tốt nhất phải là một hệ số nguyên. Cụ thể:  được thương là  và số dư là 

Khi đó phương trình đã cho sẽ trở thành:



Với  ta nghĩ ngay đến việc ẩn phụ hóa  khi đó ta biến đổi  thành phương trình: 

Rõ ràng phương trình  hai ẩn t, x có mũ cao nhất là 2 nên ta hoàn toàn có thể xem phương trình  là phương trình baach hai theo t và phương trình này có biệt thức là: 

Tới đây xem như hướng 1 được giải quyết hoàn toàn.

**- Hướng 2:** Lấy phương trình bậc ba đem chia cho đại lượng bậc nhất ngoài căn (chính là đại lượng bậc nhất chứa mũ 3 trong căn) cũng với lưu ý là hệ số  chia cho x tốt nhất là số nguyên. Sau hai lần chia phần dư còn lại sẽ là một đại lượng bậc nhất, ta đem đại lượng bậc nhất này cùng với việc chọn hệ số bất định phân tích đại lượng còn dư này theo hai đại lượng bậc nhất có trong bài toán. Cụ thể ta có:  được thương là  và số dư là 

Bây giờ ta sẽ tìm hai hệ số a, b sao cho:



Đồng nhất hệ số hai vế của phương trình ta được:  

Khi đó ta có: 

 

Với sự phân tích này, ta đưa phương trình về phương trình:





Tới đây, cũng như hướng đi 1 ta ẩn phụ hóa  khi đó ta có phương trình: 

Nhận xét tương tự như hướng đi 1, phương trình này là phương trình bậc 2 ẩn t có biệt thức: 

Bây giờ ta đi vào giải quyết cụ thể bài toán theo hướng 2 như sau:

Do: 

Từ đó ta có  thỏa mãn phương trình đã cho.

Điều kiện:  Nhận xét với  không thỏa mãn phương trình.

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình:





Đặt  . Lúc đó  Khi đó  trở thành:



Xem phương trình  là phương trình bậc hai theo ẩn t có biệt thức:



Suy ra phương trình  có hai nghiệm phân biệt:



Với:  

  

Với   

 

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là:  .

**- Bình luận.** Bài toán trên ta có thể khái quát hóa về bài toán sau:



Khi đó ta có hai hướng giải quyết theo lối ẩn phụ (vì ta có thể giải bằng phương pháp nhân lượng liên hợp), tất nhiên trong nhu cầu cần thiết giải quyết bài toán không tính toán quá phức tạp vì thế khi đặt ẩn phụ ta nên giải theo hướng 2 như trong phân tích để có thể đưa bài toán gọn gàng hơn hướng đi 1.

**Ví dụ 18.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Bài toán này về hình thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối nên thường đẩy cho chúng ta hướng giải khó phán đoán. Thông thường, chúng ta hãy chia khoảng để bỏ dấu giá trị tuyệt đối sau đó mới tính đến các phương án khác để thoát căn. Tuy nhiên, nếu ta khéo léo một chút trong tư duy thì đôi lúc một bài toán mà chúng ta cảm thấy khó có thể đưa cho chúng ta một lời giải đẹp. Với phương trình này bằng cách nhẩm nghiệm chúng ta có hai nghiệm của phương trình là  . Từ hai nghiệm này, chúng ta đã biết là chúng ta cần có nhân tử  Và rõ ràng không có hướng đi nào hiệu quả hơn lúc này, bằng cách tạo liên hợp. Thật vậy:

Quan sát ngay phương trình:  thay   vào ta thấy nghiệm đúng. Do đó ta có: 

Bây giờ ta chỉ cần đi chọn hệ số a, b sao cho hai đại lượng căn thức như sau:

 cho    

 cho    

Tới đây, nếu ta cứ thế thay vào phương trình đã cho mà không để ý tới bước ta phân tích trước đó ta sẽ thấy khó khăn ngay lập tức. Thật vậy, vì phương trình bậc ba đề bài cho đã hiển nhiên xuất hiện nhân tử cần có cho chúng ta, bây giờ thêm bớt đại lượng vừa tìm vào hai căn thức ở vế trái phương trình tức là đã cần thêm bớt vào đại lượng như thế bên vế phải, thế thì không những không làm giảm độ khó của bài toán mà còn làm tăng sự phức tạp của bài toán lên. Như ta biết, bài toán này nó khó ở chỗ những đại lượng chứa dấu giá trị tuyệt đối, vậy nên khi thêm đại lượng mới vào thì rõ ràng hướng đi này cũng chẳng giải quyết được gì cả.

Nhưng nếu ta tinh ý một chút và không máy móc thì ta thử xoay chuyển tình hình thế này xem sao? Mục đích của chúng ta là làm đơn giản hóa căn thức và dấu giá trị tuyệt đối nên thôi thì hai cái khó ta thử nhập vào xem biết đâu “cái khó ló cái khôn”.

Để ý thấy được rằng, mối quan hệ sắp xếp sau đây là hoàn toàn thích hợp với nhu cầu nhân tử của chúng ta:

- Xếp:  cho   thỏa.

- Xếp:  cho   thỏa.

Điều đó chứng minh được rằng, bài toán này khi tạo nhân tử liên hợp thì tự trong bài toán đã có sẵn mà chúng ta không cần đi chọn hệ số. Đó chính là cái hay của bài toán mà chúng ta đang xét.

Cụ thể lời giải như sau. Điều kiện:  

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình sau:









Nhận xét với  

Vì 

Do đó phương trình   

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là  

**- Bình luận.** Qua bài toán này, lại một lần nữa thấy được sự tìm tòi đánh giá ban đầu để chọn giải pháp tốt nhất để giải bài toán phương trình vô tỷ, đôi lúc nếu chỉ sử dụng đơn giản máy móc một việc làm cụ thể nào đó sẽ không dẫn đến hiệu quả dù đã có thể định hình được đường lối đi, mà đôi lúc ta cần chút tinh tế hơn để có nhuần nhuyễn và thực tiễn được đường lối mà chúng ta đã vạch ra ngay từ ban đầu.