

Người làm: Ngô Bá Tiến

Zalo: Ngô Bá Tiến

- số đt zalo: 0374899613

Email: Thayngobatien.toan@gmail.com

CD2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1. Tìm x thông thường

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023) đề 367

Nếu $\sqrt{2x+1}=5$ thì giá trị của $2x^2$ bằng

A. 12.

B. 144.

C. 288.

D. 50.

Lời giải

Chọn C

Có: $\sqrt{2x+1}=5$

$$2x+1=25$$

$$x=12$$

Khi đó: $2x^2=2.12^2=288$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023) đề 367

Giá trị x thỏa mãn $x^2.(x^{19}-2)-(x^{21}-3x^2+4)=(x-2)(x-3)$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$x^2.(x^{19}-2)-(x^{21}-3x^2+4)=(x-2)(x-3)$$

$$x^{21}-2x^2-x^{21}+3x^2-4=(x-2)(x-3)$$

$$x^2-4=(x-2)(x-3)$$

$$x^2-4=x^2-2x-3x+6$$

$$5x=10$$

$$x=2$$

Vậy $x=2$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023) đề 369

Giá trị x thỏa mãn $\frac{4}{3}+\frac{-7}{9}x=\left|-\frac{2}{7}\right|$ là

A. $-\frac{154}{189}$.

B. $\frac{66}{49}$.

C. $-\frac{66}{49}$.

D. $\frac{189}{154}$.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{4}{3}+\frac{-7}{9}x=\left|-\frac{2}{7}\right|$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{4} \text{ hoặc } x = \frac{-1}{4}$$

Tổng các giá trị của x là $\frac{5}{4} + \frac{-1}{4} = 1$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ấn 2022 - 2023) đề 362

Tìm x , biết: $(5x + 2)^2 = 25$

Lời giải

$$(5x + 2)^2 = 25$$

Suy ra $5x + 2 = 5$ hoặc $5x + 2 = -5$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{5} \text{ hoặc } x = \frac{-7}{5}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{3}{5} \text{ hoặc } x = \frac{-7}{5}.$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023) đề 377

Tìm x biết: $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5} : \left(\frac{2}{3} - x \right) = \frac{-1}{10}$$

$$\frac{2}{3} - x = \frac{2}{5} : \left(\frac{-1}{10} \right)$$

$$\frac{2}{3} - x = -4$$

$$x = \frac{2}{3} - (-4)$$

$$x = \frac{14}{3}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{14}{3}.$$

Câu 3. (HSG 7 thành phố Thanh Hóa 2022 - 2023) đề 379

Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{4}x - 1 \right) + \left(\frac{5}{6}x - 2 \right) - \left(\frac{3}{8}x + 5 \right) = 3,5$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{4}x - 1 \right) + \left(\frac{5}{6}x - 2 \right) - \left(\frac{3}{8}x + 5 \right) = 3,5$$

$$\left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{6}x - \frac{3}{8}x \right) - (1 + 2 + 5) = 3,5$$

$$x \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{3}{8} \right) = 3,5 + 8$$

$$x \cdot \frac{17}{24} = \frac{23}{2}$$

$$x = \frac{23}{2} : \frac{17}{24} = \frac{23}{2} \cdot \frac{24}{17} = \frac{276}{17}$$

$$x = \frac{276}{17}$$

Vậy

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023) đề 382

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + 0,2 - 0,375}{\frac{9}{16} - \frac{15}{22} + \frac{3}{2} \cdot (-0,2)}$$

Tìm x biết

Lời giải

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + 0,2 - 0,375}{\frac{9}{16} - \frac{15}{22} + \frac{3}{2} \cdot (-0,2)}$$

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + \frac{2}{10} - \frac{3}{10}}{\frac{9}{16} - \frac{15}{22} - \frac{3}{10}}$$

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{\frac{5}{11} + \frac{2}{10} - \frac{3}{10}}{\frac{-3}{2} \left(\frac{5}{11} + \frac{2}{10} - \frac{3}{10} \right)}$$

$$x - \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$x = \frac{-4}{3}$$

Vậy $x = \frac{-4}{3}$

Dạng 2. Đưa về dạng tích bằng ⁰

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023) đề 367

$$(x+1)(x^2+4)(x^2-1)=0$$

Tổng các giá trị của x thỏa mãn

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$$(x+1)(x^2+4)(x^2-1)=0$$

Suy ra $x+1=0$ hoặc $x^2-1=0$ (vì $x^2+4 \neq 0$)

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \pm 1$$

Vậy $x = 1$ hoặc $x = -1$

Tổng các giá trị của x là $1 + (-1) = 0$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023) đề 369

Cho x thỏa mãn: $\frac{x+2022}{1} + \frac{x+2021}{2} + \dots + \frac{x+1}{2022} + \frac{x}{2023} = -2023$. Số nghịch đảo của x là

- A. 2023. B. $\frac{-1}{2023}$. C. -2023. D. $\frac{1}{2023}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \frac{x+2022}{1} + \frac{x+2021}{2} + \dots + \frac{x+1}{2022} + \frac{x}{2023} &= -2023 \\ \frac{x+2022}{1} + \frac{x+2021}{2} + \dots + \frac{x+1}{2022} + \frac{x}{2023} + 2023 &= 0 \\ \left(\frac{x+2022}{1} + 1 \right) + \left(\frac{x+2021}{2} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{x+1}{2022} + 1 \right) + \left(\frac{x}{2023} + 1 \right) &= 0 \\ \frac{x+2023}{1} + \frac{x+2023}{2} + \frac{x+2023}{3} + \dots + \frac{x+2023}{2023} &= 0 \end{aligned}$$

$$(x+2023) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2023} \right) = 0$$

Suy ra: $x+2023=0$ hay $x=-2023$.

Vậy nghịch đảo của x là $\frac{-1}{2023}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023) đề 372

Số các giá trị nguyên của x thỏa mãn $(2x-1)^6 = (2x-1)^8$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$(2x-1)^6 = (2x-1)^8 \Rightarrow (2x-1)^6 [1 - (2x-1)^2] = 0$$

Ta có

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-1)^6 = 0 \\ 1 - (2x-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 0 \\ (2x-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 2x-1 = 1 \\ 2x-1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Suy ra có 2 giá trị x nguyên thỏa mãn.

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023) đề 373

Số các giá trị của x thỏa mãn đẳng thức sau $(x-2)^{2024} = (x-2)^{2020}$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$(x-2)^{2024} = (x-2)^{2020} \Rightarrow (x-2)^{2024} - (x-2)^{2020} = 0 \Rightarrow (x-2)^{2020} [(x-2)^4 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)^{2020} = 0 \text{ hoặc } (x-2)^4 - 1 = 0$$

TH1: $(x-2)^{2020} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

TH2: $(x-2)^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^4 = 1 \Rightarrow x-2 = \pm 1$

Với $x-2=1 \Rightarrow x=3$

Với $x-2=-1 \Rightarrow x=1$

Do đó $x \in \{1; 2; 3\}$

Vậy số các giá trị của thỏa mãn đẳng thức $(x-2)^{2024} = (x-2)^{2020}$ là 3.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023) đề 363

Tìm x biết: $\frac{x+4}{2014} + \frac{x+3}{2015} = \frac{x+2}{2016} + \frac{x+1}{2017}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x+4}{2014} + \frac{x+3}{2015} = \frac{x+2}{2016} + \frac{x+1}{2017}$

$$\left(\frac{x+4}{2014} + 1 \right) + \left(\frac{x+3}{2015} + 1 \right) = \left(\frac{x+2}{2016} + 1 \right) + \left(\frac{x+1}{2017} + 1 \right)$$

$$\frac{x+2018}{2014} + \frac{x+2018}{2015} - \frac{x+2018}{2016} - \frac{x+2018}{2017} = 0$$

$$(x+2018) \cdot \left(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x+2018=0 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017} \neq 0 \right)$$

$$x = -2018$$

Vậy $x = -2018$.

Câu 2. (HSG 7 huyện - 2022 - 2023) đề 388

Tìm x biết: $\frac{x+4}{2019} + \frac{x+3}{2020} = \frac{x+2}{2021} + \frac{x+1}{2022}$

Lời giải

$$\frac{x+4}{2019} + \frac{x+3}{2020} = \frac{x+2}{2021} + \frac{x+1}{2022}$$

$$\frac{x+4}{2019} + 1 + \frac{x+3}{2020} + 1 = \frac{x+2}{2021} + 1 + \frac{x+1}{2022} + 1$$

$$\frac{x+2023}{2019} + \frac{x+2023}{2020} = \frac{x+2023}{2021} + \frac{x+2023}{2022}$$

$$(x+2023) \left(\frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2023 = 0 \text{ (Vì } \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} \neq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow x = -2023$$

Vậy $x = -2023$.

Dạng 3. Sử dụng tính chất lũy thừa

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Đức Thọ 2022 - 2023) đề 370

Tìm tất cả số nguyên dương x thỏa mãn $\frac{5^{3x} + 5^{4x}}{5^{2x} + 5^{3x}} = 5$.

Lời giải

$$\frac{5^{3x} + 5^{4x}}{5^{2x} + 5^{3x}} = 5$$

$$\frac{5^{3x} \cdot (1 + 5^x)}{5^{2x} \cdot (1 + 5^x)} = 5$$

$$5^x = 5$$

$$x = 1 \text{ (tmđk).}$$

Vậy $x = 1$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2022 - 2023) đề 376

Tìm x biết $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$.

Lời giải

$$2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$$

$$2^x \cdot 4 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$$

$$2^x \cdot 3^x \cdot 5^x = \frac{10800}{12}$$

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^x = 900$$

$$30^x = 900$$

$$30^x = 30^2$$

$$x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023) đề 377

Tìm x biết: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdots \frac{14}{30} \cdot \frac{15}{32} = \frac{1}{2^{2x+1}}$

Lời giải

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdots \frac{14}{30} \cdot \frac{15}{32} = \frac{1}{2^{2x+1}}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdots \frac{14}{2 \cdot 15} \cdot \frac{15}{2^5} = \frac{1}{2^{2x+1}}$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 14 \cdot 15}{2^{14} \cdot 2 \cdot 3 \cdots 14 \cdot 15 \cdot 2^5} = \frac{1}{2^{2x+1}}$$

$$\frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{2^{2x+1}}$$

$$2x + 1 = 19$$

$$2x = 18$$

$$x = 9$$

Vậy $x=9$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023) đề 382

x, y, z thỏa mãn $x^3 + 3x^2 + 5 = 5^y$ và $x + 3 = 5^z$

Tìm các số nguyên dương

Giải chi tiết

$$x^3 + 3x^2 + 5 = 5^y$$

$$\Rightarrow x^2(x + 3x) + 5 = 5^y$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot 5^z + 5 = 5^y$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot 5^z + 5 - 5^y = 0$$

$$\Rightarrow 5(x^2 \cdot 5^{z-1} + 1 - 5^{y-1}) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot 5^{z-1} + 1 - 5^{y-1} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot 5^{z-1} + 1 = 5^{y-1}$$

$$\text{TH1: } z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 5^{y-1} \\ x + 3 = 5^z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 5^{y-1} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5^{y-1} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } z - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5^{z-1} \geq 5 \\ 5^{z-1} : 5 \Rightarrow x^2 \cdot 5^{z-1} + 1 > 1 \Rightarrow 5^{y-1} > 1 \end{cases} \text{ Vậy vô nghiệm}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy

Câu 5. (HSG 7 thành phố Lào Cai 2022 - 2023) đề 383

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = \frac{1}{2^x}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = \frac{1}{2^x}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdots \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2 \cdot 32} = \frac{1}{2^x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 32} = \frac{1}{2^x}$$

$$\frac{1}{2^{31} \cdot 2^5} = \frac{1}{2^x}$$

$$\frac{1}{2^{36}} = \frac{1}{2^x}$$

$$x = 36$$

Vậy $x = 36$.

Câu 6. (HSG 7 thành phố Thủ Đức 2022 - 2023) đề 384

Cho $D = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023}$. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $2D + 3 = 3^x$

Lời giải

$$\begin{aligned} D &= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023} \\ 3D &= 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024} \\ \Rightarrow 2D &= 3D - D = 3^{2024} - 3 \\ 3^{2024} - 3 + 3 &= 3^x \\ \Rightarrow 3^{2024} &= 3^x \Rightarrow x = 2024 \end{aligned}$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2022 - 2023) đề 385

Cho biểu thức $C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$. Tìm số tự nhiên n để: $2C + 1 = 3^{2023}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} 3C &= 3(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3 + 3^2 + \dots + 3^{n+1} \\ C &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n \\ 2C &= 3C - C = (3 + 3^2 + \dots + 3^{n+1}) - (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3^{n+1} - 1 \\ \Rightarrow 2C + 1 &= 3^{n+1} - 1 + 1 = 3^{n+1} \\ \Rightarrow 2C + 1 &= 3^{2023} \Rightarrow 3^{n+1} = 3^{2023} \Rightarrow n + 1 = 2023 \Rightarrow n = 2022 \end{aligned}$$

Dạng 4. Tìm ẩn dạng phân thức

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nam Đàn 2022 - 2023) đề 381

Tìm x, y biết: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1+6y}{3x} &= \frac{1+9y}{2x} \\ \Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} &= \frac{3x}{2x} \\ \Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} &= \frac{3}{2} \\ \Rightarrow 2 \cdot (1+6y) &= 3 \cdot (1+9y) \\ \Rightarrow 2+12y &= 3+27y \\ \Rightarrow -1 &= 15y \\ \Rightarrow y &= \frac{-1}{15} \\ \text{Thay } y = \frac{-1}{15} \text{ vào } \frac{1+3y}{12} &= \frac{1+6y}{3x} \text{ ta được} \\ \frac{1+3 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{12} &= \frac{1+6 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{3x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{\frac{3}{5}}{3x}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy $x = 3, y = -\frac{1}{5}$.

Dạng 5. Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Án 2022 - 2023) đề 362

Tìm x , biết: $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$

Lời giải

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$$

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|-\frac{16}{5} + \frac{2}{5}\right|$$

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| = 2$$

Suy ra $x - \frac{1}{3} = 2$ hoặc $x - \frac{1}{3} = -2$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{3} \text{ hoặc } x = -\frac{5}{3}$$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = -\frac{5}{3}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023) đề 363

Tìm x biết $3 \cdot |9 - 2x| - 17 = 16$

Lời giải

$$3 \cdot |9 - 2x| - 17 = 16$$

$$3 \cdot |9 - 2x| = 16 + 17$$

$$3 \cdot |9 - 2x| = 33$$

$$|9 - 2x| = 11$$

Suy ra $9 - 2x = 11$ hoặc $9 - 2x = -11$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 10$$

Vậy $x = -1$ hoặc $x = 10$.

Câu 3. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023) đề 364

Tìm x, y biết: $\frac{6}{(x-1)^2 + 2} = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$

Lời giải

Đặt $A = \frac{6}{(x-1)^2+2}$. Có $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow (x-1)^2+2 \geq 2 \quad \forall x \Rightarrow \frac{6}{(x-1)^2+2} \leq \frac{6}{2} = 3 \quad \forall x$
 hay $A \leq 3$ (1)

$$B = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1 = |y-1| + |y-2| + |3-y| + 1$$

$$|y-1| \geq y-1 \quad \forall y. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } y \geq 1$$

$$|y-2| \geq 0 \quad \forall y. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } y = 2$$

$$|3-y| \geq 3-y \quad \forall y. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } y \leq 3$$

$$\Rightarrow B \geq 3 \text{ với mọi } y \text{ (2)}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } y = 2$$

Từ (1) và (2) suy ra $A = B = 3$

$$\Rightarrow x = 1; y = 2$$

Vậy $x = 1; y = 2$

Câu 4. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023) đề 366

Tìm x biết $\left|x - \frac{3}{4}\right| + 2x^2 = |2x^2 + 2,5|$

Lời giải

Nhận thấy $2x^2 + 2,5 \geq 2,5$ với mọi x nên $|2x^2 + 2,5| = 2x^2 + 2,5$

Do đó $\left|x - \frac{3}{4}\right| + 2x^2 = 2x^2 + 2,5$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{3}{4}\right| = 2,5$$

Suy ra $x - \frac{3}{4} = 2,5$ hoặc $x - \frac{3}{4} = -2,5$

$$\Rightarrow x = \frac{13}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{7}{4}$$

Vậy $x = \frac{13}{4}$ hoặc $x = -\frac{7}{4}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023) đề 368

Tìm x biết $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 12x$

Lời giải

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải ≥ 0

Suy ra $12x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 12x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 12x$$

$$(x + x + x + \dots + x) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110}\right) = 12x$$

$$10x + \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{10.11}\right) = 12x$$

$$10x + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) = 12x$$

$$10x + \left(1 - \frac{1}{11} \right) = 12x$$

$$2x = \frac{10}{11}$$

$$x = \frac{5}{11}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{5}{11}.$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023) đề 370

$$\text{Tìm } x \text{ biết } 10 - |x - \sqrt{9}| = 9$$

Lời giải

$$10 - |x - \sqrt{9}| = 9$$

$$10 - |x - 3| = 9$$

$$|x - 3| = 1$$

$$x - 3 = 1 \text{ hoặc } x - 3 = -1$$

$$x = 4 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ hoặc } x = 2.$$

Câu 7. (HSG 7 Quận Tây Hồ 2022 - 2023) đề 374

$$\text{Tìm } x \text{ biết } -3|x - 5| + 7|x - 5| = 2^2 \cdot 5.$$

Lời giải

$$-3|x - 5| + 7|x - 5| = 2^2 \cdot 5$$

$$4|x - 5| = 4 \cdot 5$$

$$|x - 5| = 5$$

$$\text{Suy ra } x - 5 = 5 \text{ hoặc } x - 5 = -5$$

$$\text{Hay } x = 10 \text{ hoặc } x = 0$$

$$\text{Vậy } x \in \{10; 0\}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023) đề 377

$$\text{Tìm } x \text{ biết } \frac{1}{|x - 3| + 2} = \frac{2}{|x - 3| + 4}$$

Lời giải

$$\frac{1}{|x - 3| + 2} = \frac{2}{|x - 3| + 4}$$

$$|x - 3| + 4 = 2(|x - 3| + 2)$$

$$|x - 3| + 4 = 2|x - 3| + 4$$

$$2|x - 3| + 4 - |x - 3| - 4 = 0$$

$$|x - 3| = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Vậy $x = 3$.

Câu 9. (HSG 7 thành phố Vinh, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023) đề 378

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết: $|2x - 1| + \frac{1}{4} = 2$.

Lời giải

$$|2x - 1| + \frac{1}{4} = 2$$

$$|2x - 1| = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \frac{7}{4} \\ 2x - 1 = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{11}{4} \\ 2x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{8} \\ x = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{11}{8}$; $x = -\frac{3}{8}$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023) đề 380

Tìm x biết $\left| \frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \right| = \frac{5}{3}$

Lời giải

$$\left| \frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \right| = \frac{5}{3}$$

Do $\frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} > 0$ với mọi x nên $\left| \frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} \right| = \frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6}$

$$\text{Suy ra } \frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{8} : \left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$\left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{hoặc} \quad 2x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$2x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

+) TH1:

$$2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$2x = \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{5}{12}$$

$$2x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$$

+) TH2:

$$2x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$2x = -\frac{1}{6}$$

$$x = -\frac{1}{12}$$

$$x \in \left\{ \frac{-1}{12}; \frac{5}{12} \right\}$$

Vậy

Câu 11. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023) đề 386

Tìm x biết $|2x - 1| = 3$.

Lời giải

$$|2x - 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 3 \\ 2x - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy $x = 2$ hoặc $x = -1$

Câu 12. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023) đề 387

Tìm x biết, $|x + 3| + 1 = 3x$.

Lời giải

$$|x + 3| + 1 = 3x \quad (*)$$

Nếu $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$.

$$\text{Do đó } |x + 3| = x + 3$$

Từ $(*)$, ta có $x + 3 + 1 = 3x$

$$4 = 2x$$

$$x = 2 \quad (\text{TM})$$

Nếu $x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$.

$$|x + 3| = -x - 3$$

Từ $(*)$, ta có $-x - 3 + 1 = 3x$

$$-2 = 4x$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ (Loại)

Vậy $x = 2$.

Câu 13. (HSG 7 huyện 2022 - 2023) đề 388

Tìm x , biết: $\frac{3}{2} : |2x - 1| = \frac{3}{5}$

Lời giải

$$\frac{3}{2} : |2x - 1| = \frac{3}{5}$$

$$|2x - 1| = \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$$

$$|2x - 1| = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{5}{2} \text{ hoặc } 2x - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{7}{2} \text{ hoặc } 2x = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{4} \text{ hoặc } x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{7}{4}; -\frac{3}{4} \right\}.$$

Dạng 6. Sử dụng công thức tính tổng có quy luật

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023) đề 377

Tìm cặp số tự nhiên x, y trong đó y là chữ số, biết rằng: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x - 1 = \overline{yyy} - x$

Lời giải

Ta có $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x - 1 = \overline{yyy} - x$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (x - 1) + x = \overline{yyy}$$

$$\frac{(1 + x)x}{2} = y.111$$

$$(1 + x)x = 222.y$$

$$(1 + x)x = 2.3.37.y$$

Vì $(1 + x)x$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp, 37 là số nguyên tố, y là chữ số nên $y = 6$
 $\Rightarrow x = 36$

Vậy $x = 36; y = 6$.

Dạng 7. Tổng các biểu thức không âm bằng 0

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023) đề 373

Cho x, y thoả mãn $(12 - 2x)^{2022} + |3y - x|^{2023} = 0$. Giá trị của biểu thức $P = 20x - 11y$ là

A. 142.

B. 98.

C. 109.

D. 131.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(12 - 2x)^{2022} \geq 0$ với mọi x

$|3y - x|^{2023} \geq 0$ với mọi x, y

Nên $(12 - 2x)^{2022} + |3y - x|^{2023} \geq 0$ với mọi x, y

Mà $(12 - 2x)^{2022} + |3y - x|^{2023} = 0$

Suy ra $12 - 2x = 0$ và $3y - x = 0$

Hay $x = 6$ và $y = 2$

Vậy giá trị của biểu thức $P = 20x - 11y$ là $P = 20.6 - 11.2 = 120 - 22 = 98$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Krông Ana 2022 - 2023) đề 361

Tìm x, y, z biết: $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} + \left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} + (x - z - 1)^{2024} = 0$

Lời giải

Vì $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} \geq 0$; $\left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} \geq 0$; $(x - z - 1)^{2024} \geq 0$ với mọi x, y, z là các số thực

Mà theo đề ra ta có:

$$\left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} + \left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} + (x - z - 1)^{2024} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(3x - \frac{1}{2}\right)^{2018} = 0 \\ \left(y^2 - \frac{1}{2023}\right)^{2020} = 0 \\ (x - z - 1)^{2024} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \frac{1}{2} = 0 \\ y^2 - \frac{1}{2023} = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y \in \left\{\sqrt{\frac{1}{2023}}; -\sqrt{\frac{1}{2023}}\right\} \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y \in \left\{\sqrt{\frac{1}{2023}}; -\sqrt{\frac{1}{2023}}\right\} \\ z = \frac{-5}{6} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{6}$; $y = \sqrt{\frac{1}{2023}}$; $z = \frac{-5}{6}$ hoặc $x = \frac{1}{6}$; $y = -\sqrt{\frac{1}{2023}}$; $z = \frac{-5}{6}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023) đề 370

Tìm tất cả cặp số (x, y) thỏa mãn: $(2x - 1)^{2022} + |x + y + 1|^{2023} = 0$

Lời giải

$$(2x - 1)^{2022} + |x + y + 1|^{2023} = 0 \quad (*)$$

Vì $(2x - 1)^{2022} \geq 0$, $|x + y + 1|^{2023} \geq 0$, $\forall x, y$

$$\Rightarrow (2x - 1)^{2022} + |x + y + 1|^{2023} \geq 0$$

Để $(*)$ xảy ra thì $(2x - 1)^{2022} = 0$ và $|x + y + 1|^{2023} = 0$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \text{ và } x + y + 1 = 0$$

$$\text{Hay } x = \frac{1}{2} \text{ và } y = -\frac{3}{2}$$

Vậy cặp số (x, y) thỏa mãn phương trình là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Dương 2022 - 2023) đề 382

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^5 - 5y^3 + 2023$ tại các giá trị của x, y thỏa mãn $|x+1| + (y+2)^{2024} = 0$

Lời giải

Ta có

$$|x+1| \geq 0; (y+2)^{2024} \geq 0 \text{ với mọi } x, y \text{ nên } |x+1| + (y+2)^{2024} = 0 \text{ khi } |x+1| = 0 \text{ hoặc } (y+2)^{2024} = 0 \text{ suy ra } x = -1; y = -2$$

$$\text{Nên } C = 2x^5 - 5y^3 + 2023 = 2.(-1)^5 - 5.(-2)^3 + 2023 = 1981$$

Dạng 8. Tìm ẩn dựa tính vào tính chất về dấu

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 – 2023) đề 369

Biết (x, y) là cặp số thỏa mãn: $(x-1)^2 + |3y+12| \leq 0$. Khi đó $5x - 2y$ bằng:
A. 13. **B.** -13. **C.** -3. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(x-1)^2 \geq 0$ với mọi x

$|3y+12| \geq 0$ với mọi y

Suy ra $(x-1)^2 + |3y+12| \geq 0$ với mọi x, y

Mà $(x-1)^2 + |3y+12| \leq 0$

Do đó $(x-1)^2 + |3y+12| = 0$

$$\Rightarrow x-1=0 \text{ và } 3y+12=0$$

Hay $x=1$ và $y=-4$

$$\text{Vậy } 5x - 2y = 5.1 - 2.(-4) = 13$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023) đề 373

Cho x, y thỏa mãn $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$ thì giá trị $19x^2y + 4xy^2$ bằng
A. 80. **B.** 83. **C.** 83. **D.** 85.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(x-2)^4 \geq 0, (y-1)^{2022} \geq 0$ với mọi x, y

Mà $(x-2)^4 + (y-1)^{2022} \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } (x-2)^4 + (y-1)^{2022} &= 0 \\ \Rightarrow (x-2)^4 &= 0 \quad \text{và} \quad (y-1)^{2022} = 0 \\ \Rightarrow x &= 2 \quad \text{và} \quad y = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } 19x^2y + 4xy^2 = 19.4.1 + 4.2.1 = 84$$

Câu 3. (HSG 7 thành phố Lào Cai 2022 - 2023) đề 383

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $(x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} \leq 0$. Khi đó giá trị của biểu thức $M = 5x^2y - 3xy^2$ là

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (x-y)^{2022} &\geq 0 \quad \text{với mọi } x, y \\ (x-2)^{2024} &\geq 0 \quad \text{với mọi } x \end{aligned}$$

$$\text{Nên } (x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} \geq 0 \quad \text{với mọi } x, y$$

$$\text{Mà } (x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} \leq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } (x-y)^{2022} + (x-2)^{2024} &= 0 \\ \Rightarrow x-2 &= 0 \quad \text{và} \quad x-y=0 \end{aligned}$$

$$\text{Hay } x=y=2$$

$$\text{Vậy giá trị của biểu thức } M = 5x^2y - 3xy^2 \text{ là } M = 5.2^2.2 - 3.2.2^2 = 40 - 24 = 16.$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023) đề 386

Cho các số x, y thỏa mãn $(x+2)^4 + (2y-1)^{2024} \leq 0$

Tính giá trị của biểu thức $M = 5x^2y - 4xy^2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (x+2)^4 \geq 0 \quad \text{với mọi } x$$

$$(2y-1)^{2024} \geq 0 \quad \text{với mọi } y$$

$$\Rightarrow (x+2)^4 + (2y-1)^{2024} \geq 0 \quad \text{với mọi } x, y$$

$$\text{Theo đề bài, để } (x+2)^4 + (2y-1)^{2024} \leq 0 \text{ thì } (x+2)^4 + (2y-1)^{2024} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+2)^4 = 0 \\ (2y-1)^{2024} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \\ 2y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Thay } x = -2, y = \frac{1}{2} \text{ vào biểu thức } M \text{ ta được:}$$

$$M = 5x^2y - 4xy^2 = 5.(-2)^2. \frac{1}{2} - 4.(-2). \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 12$$

Dạng 9. Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023) đề 366

Tìm x, y biết $\frac{6}{(x-1)^2+2} = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$

Lời giải

$$\frac{6}{(x-1)^2+2} = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1$$

Đặt $A = \frac{6}{(x-1)^2+2}$. Có $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + 2 \geq 2 \quad \forall x \Leftrightarrow \frac{6}{(x-1)^2+2} \leq \frac{6}{2} = 3 \quad \forall x \quad \text{hay } A \leq 3 \quad (1)$$

$$B = |y-1| + |y-2| + |y-3| + 1 = |y-1| + |y-2| + |3-y| + 1$$

$|y-1| \geq y-1 \quad \forall y$. Dấu bằng xảy ra khi $y \geq 1$

$|y-2| \geq 0 \quad \forall y$. Dấu bằng xảy ra khi $y = 2$

$|3-y| \geq 3-y \quad \forall y$. Dấu bằng xảy ra khi $y \leq 3$

$$\Rightarrow B \geq 3 \quad \text{với mọi } y \quad (2)$$

Dấu bằng xảy ra khi $y = 2$

Từ (1) và (2) suy ra $A = B = 3$

$$\Rightarrow x = 1; y = 2$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2022 - 2023) đề 376

Tìm các cặp số nguyên x, y biết $-x^2 + x + 1 = |y-5|$.

Lời giải

$$-x^2 + x + 1 = |y-5| \quad (1)$$

$$-x^2 + x + 2 = |y-5| + 1$$

$$-x^2 - x + 2x + 2 = |y-5| + 1$$

$$-x(x+1) + 2(x+1) = |y-5| + 1$$

$$(x+1)(2-x) = |y-5| + 1$$

Ta có $|y-5| + 1 > 0, \forall y$ nên $(x+1)(2-x) > 0$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2) < 0$$

Mà $x+1 > x-2$ nên $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 2$

Vì x nguyên nên $x = 0$ hoặc $x = 1$

$$+ \text{ Với } x = 0 \text{ thì } |y-5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y-5 = 1 \\ y-5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x = 1 \text{ thì } |y-5| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y-5 = 1 \\ y-5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn là $(0; 4), (0; 6), (1; 4), (1; 6)$.

Câu 3. (HSG 7 Tp Thanh Hóa 2022 - 2023) đề 379

Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn: $(x+y)^2 = 4x+5$

Lời giải

Do $x, y \in \mathbb{N}^*$, ta có $x \geq 1; y \geq 1$.

$$4x + 5 = (x + y)^2 \geq (1 + x)^2$$

Điều này chỉ xảy ra khi $x \leq 5$. Thật vậy nếu $x \geq 6$, ta có:

$$(x + 1)^2 \geq (6 + 1)(x + 1) = 7x + 7 > 4x + 5 \quad (\text{mâu thuẫn}).$$

Khi đó ta có: $1 \leq x \leq 5$

+) Với $x = 1 \Rightarrow 4x + 5 = 9 \Rightarrow (1 + y)^2 = 9 \Rightarrow 1 + y = 3 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn)

+) Với $x = 2 \Rightarrow 4x + 5 = 13 \Rightarrow (2 + y)^2 = 13$ (không là số chính phương $\Rightarrow$ Loại)

+) Với $x = 3 \Rightarrow 4x + 5 = 17 \Rightarrow (3 + y)^2 = 17$ (Loại)

+) Với $x = 4 \Rightarrow 4x + 5 = 21 \Rightarrow (4 + y)^2 = 21$ (Loại)

+) Với $x = 5 \Rightarrow 4x + 5 = 25 \Rightarrow (5 + y)^2 = 25 \Rightarrow 5 + y = 5 \Rightarrow y = 0$ (Loại)

Vậy cặp số nguyên dương x, y cần tìm là: $(x; y) = (1; 2)$

Câu 4. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023) đề 386

Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn: $x^3 + 3x^2 + 5 = 5^y$ và $x + 3 = 5^z$.

Lời giải

Do $x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^y = x^3 + 3x^2 + 5 > x + 3 = 5^z$

$$\Rightarrow 5^y > 5^z \Rightarrow y > z \Rightarrow 5^y : 5^z$$

$$\Rightarrow (x^3 + 3x^2 + 5) : (x + 3) \Rightarrow (x^2(x + 3) + 5) : (x + 3)$$

Mà $x^2(x + 3) : (x + 3) \Rightarrow 5 : (x + 3) \Rightarrow x + 3 \in \{5\} = \{\pm 1; \pm 5\}$

Do $x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x + 3 \geq 4 \quad (2)$

$$\Rightarrow x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào đề bài, ta được

$$\begin{cases} 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 5^y \\ 2 + 3 = 5^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 = 5^y \\ 5 = 5^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $x = 2; y = 2; z = 1$

Dạng 10. Tìm ẩn với điều kiện nguyên

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023) đề 367

Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x + y + xy = 2$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x + y + xy = 2$

$$\Rightarrow x + y + xy + 1 = 2 + 1$$

$$\Rightarrow (x + 1) + (xy + y) = 3$$

$$\Rightarrow (x+1)+y(x+1)=3$$

$$\Rightarrow (x+1)(y+1)=3$$

$$\text{Lại có: } 3=1.3=3.1=(-1).(-3)=(-3).(-1)$$

Nên ta có bảng:

$x+1$	1	3	-1	-3
$y+1$	3	1	-3	-1
x	0	2	-2	-4
y	2	0	-4	-2

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ là: $(0; 2); (2; 0); (-2; -4); (-4; -2)$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023) đề 362

Tìm các số nguyên x, y biết rằng $2xy + 5x + 3y = 1$.

Lời giải

Ta có:

$$2xy + 5x + 3y = 1$$

$$4xy + 10x + 6y = 2$$

$$2x(2y+5) + 3(2y+5) = 17$$

$$(2x+3)(2y+5) = 17$$

Vì x, y nguyên nên $2x+3; 2y+5$ nguyên

Lại có $17 = 1.17 = 17.1 = (-1).(-17) = (-17).(-1)$. Nên ta có:

$$\text{Nếu } 2x+3=1 \Leftrightarrow x=-1 \text{ thì } 2y+5=17 \Leftrightarrow y=6$$

$$\text{Nếu } 2x+3=-1 \Leftrightarrow x=-2 \text{ thì } 2y+5=-17 \Leftrightarrow y=-11$$

$$\text{Nếu } 2x+3=17 \Leftrightarrow x=7 \text{ thì } 2y+5=1 \Leftrightarrow y=-2$$

$$\text{Nếu } 2x+3=-17 \Leftrightarrow x=-10 \text{ thì } 2y+5=-1 \Leftrightarrow y=-3$$

Vậy các giá trị x, y cần tìm là: $(x; y) \in \{(-1; 6); (-2; -11); (7; -2); (-10; -3)\}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023) đề 366

Tìm các số nguyên x, y sao cho $xy + 2x - y = 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } xy + 2x - y = 5$$

$$x(y+2) - (y+2) = 3$$

$$(x-1).(y+2) = 3$$

Vì $x, y \in \mathbf{Z}$ nên $x-1$ và $y+2$ là ước của 3 $\Rightarrow x-1 \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng giá trị sau:

$x-1$	-3	-1	1	3
$y+2$	-1	-3	3	1
x	-2	0	2	4

y	- 3	- 5	1	- 1
-----	-----	-----	---	-----

Vậy $(x; y) \in \{(0; - 5); (- 2; - 3); (4; - 1); (2; 1)\}$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023) đề 367

Tìm số nguyên a sao cho $a^2 + 2a + 3$ chia hết $a + 1$.

Lời giải

Ta có: $a^2 + 2a + 3 = a(a + 1) + (a + 1) + 2 = (a + 1)^2 + 2$

Để $a^2 + 2a + 3$ chia hết $a + 1$ thì $2 : a + 1$

$$\Rightarrow a + 1 \in U(2) \Rightarrow a + 1 \in \{- 2; - 1; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow a \in \{- 3; - 2; 0; 1\}$$

Để $a^2 + 2a + 3$ chia hết $a + 1$ thì $a \in \{- 3; - 2; 0; 1\}$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023) đề 367

Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn $(x - 1)(x + 1) = 6y^2$

Lời giải

Vì $6y^2 : 2$ nên $(x - 1)(x + 1) : 2$

Vì $(x - 1) + (x + 1) = 2x : 2$ nên $x - 1; x + 1$ cùng tính chẵn lẻ

Suy ra $x - 1; x + 1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Do đó $(x - 1)(x + 1) : 8$

$$\Rightarrow 6y^2 : 8 \Rightarrow 3y^2 : 4 \Rightarrow y^2 : 4 \Rightarrow y : 2$$

Mà y là số nguyên tố nên $y = 2$

$$\text{- Thay } y = 2 \text{ vào } (x - 1)(x + 1) = 6y^2 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 24 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 4.6$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$(x; y) = (5; 2)$$

Vậy

Câu 5. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023) đề 368

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $xy + 3x - y = 6$

Lời giải

$$xy + 3x - y = 6$$

$$x(y + 3) - (y + 3) = 3$$

$$(x - 1)(y + 3) = 3$$

Vì $x; y$ nguyên nên $x - 1; y + 3$ nguyên

$$3 = 1.3 = 3.1 = (- 1).(- 3) = (- 3).(- 1)$$

Lại có:

Ta có bảng sau:

$x - 1$	1	3	- 1	- 3
$y + 3$	3	1	- 3	- 1
x	2	4	0	- 2

y	0	- 2	- 6	- 4

Vậy $(x, y) \in \{(2; 0); (4; - 2); (0; - 6); (- 2; - 4)\}$

Câu 6. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023) đề 369

Tìm số tự nhiên x, y thỏa mãn: $7(x - 2023)^2 = 23 - y^2$.

Lời giải

Vì $7(x - 2023)^2 \geq 0$ mà $7(x - 2023)^2 = 23 - y^2 \Rightarrow 23 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 23 \Rightarrow y^2 \leq 23$.

Do $y \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vì 7 là số nguyên tố $\Rightarrow 23 - y^2 : 7$. Suy ra $y \in \{3; 4\}$.

+ Với $y = 3 \Rightarrow 7(x - 2023)^2 = 14 \Rightarrow (x - 2023)^2 = 2$ (loại).

+ Với $y = 4 \Rightarrow 7(x - 2023)^2 = 7 \Rightarrow (x - 2023)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2023 = -1 \\ x - 2023 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ x = 2024 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $(x, y) \in \{(2022; 4); (2024; 4)\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 7. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023) đề 371

Tìm các cặp số (x, y) nguyên biết: $2xy - x - y = 2$.

Lời giải

$$2xy - x - y = 2$$

$$x(2y - 1) - y = 2$$

$$2x(2y - 1) - 2y + 1 = 5$$

$$2x(2y - 1) - (2y - 1) = 5$$

$$(2y - 1)(2x - 1) = 5$$

Vì x, y nguyên nên $2x - 1; 2y - 1$ nguyên.

$$(2y - 1)(2x - 1) = 5 = 5.1 = 1.5 = (-5).(-1) = (-1).(-5)$$

Lập bảng:

$2x - 1$	5	1	- 5	- 1
$2y - 1$	1	5	- 1	- 5
x	3	1	- 2	0
y	1	3	0	- 2

Vậy các cặp số (x, y) thỏa mãn là $(3; 1); (1; 3); (- 2; 0); (0; - 2)$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023) đề 372

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $2x - xy + 3y = 9$.

Lời giải

Từ : $2x - xy + 3y = 9$

$\Rightarrow (2 - y)x + 3(y - 2) = 3 \Leftrightarrow (2 - y)(x - 3) = 3$

Suy ra $3 \mid (x - 3) \Rightarrow (x - 3)$ là ước của 3.

Suy ra $(x - 3) \in \{-3; -1; 1; 3\}$

Ta có bảng

$x - 3$	- 3	- 1	1	3
$2 - y$	- 1	- 3	3	1
x	0	2	4	6
y	3	5	- 1	1
	Loại	T/m	Loại	T/m

Vậy cặp số $(x = 2; y = 5)$ hoặc $(x = 6; y = 1)$ như trên thoả mãn điều kiện đề bài

Câu 9. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023) đề 372

Tìm các số nguyên m để $(m + 1)(m^2 + 2m)$ là một số chính phương

Lời giải

Ta có $(m + 1)(m^2 + 2m)$ là một số chính phương.

$(m + 1)(m^2 + 2m) = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

Suy ra

Vì $k^2 \geq 0 \Rightarrow (m + 1)(m^2 + 2m) \geq 0$

Với $m < -2 \Rightarrow (m + 1)(m^2 + 2m) < 0$ (loại)

Với $m \in \{-2; -1; 0\}$ ta đều có $k^2 = 0$ (thoả mãn)

Với $m > 0$ ta có $k^2 = (m + 1)(m^2 + 2m)$

Gọi d là một ước chung nguyên tố của $m + 1$ và $m^2 + 2m$

$$\begin{cases} m + 1 : d \\ m^2 + 2m : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 1 : d \\ m : d \end{cases} \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

Suy ra

Nên $(m + 1)(m^2 + 2m)$ là một số chính phương khi $m + 1$ và $m^2 + 2m$ đều là số chính phương.

Để $m^2 + 2m$ là số chính phương thì $m^2 + 2m = a^2 \quad (a \in \mathbb{Z})$

Suy ra $(m + 1)^2 - 1 = a^2 \Rightarrow (m + 1 + a)(m + 1 - a) = 1 \Rightarrow m + 1 + a = m + 1 - a \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$ (không thoả mãn)

Vậy $m \in \{-2; -1; 0\}$ thì $(m + 1)(m^2 + 2m)$ là một số chính phương.

Câu 10. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023) đề 373

Tìm các số nguyên x, y sao cho $x^2 + 2x + y = xy$

Lời giải

$x^2 + 2x + y = xy$

$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (4x - 4) + 3 + y = xy$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) + y - xy = -3 \\ &\Rightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) + y(1-x) = -3 \\ &\Rightarrow (x-1)^2 + 4(x-1) - y(x-1) = -3 \\ &\Rightarrow (x-1)[(x-1) + 4 - y] = -3 \\ &\Rightarrow (x-1)[x+3-y] = -3 \end{aligned}$$

Ta có bảng giá trị:

$x-1$	1	-3	-1	3
$x+3-y$	-3	1	3	-1
x	2	-2	0	4
y	8	0	0	8

$$(x, y) \in \{(2; 8); (-2; 0); (0; 0); (4; 8)\}$$

Vậy

Câu 11. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023) đề 375

Tìm các cặp số nguyên x, y biết: $2xy - 10x - 5y = -15$

Lời giải

Ta có: $2xy - 10x - 5y = -15 \Leftrightarrow (2x-5)(y-5) = 10$

Vì x, y nguyên nên $2x-5$ và $y-5$ là ước của 10

Mà $2x-5$ là số nguyên lẻ nên $2x-5 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Lập bảng giá trị ta có:

$2x-5$	-5	-1	1	5
$y-5$	-2	-10	10	2
x	0	2	3	5
y	3	-5	15	7

$$(x, y) = \{(0; 3); (2; -5); (3; 15); (5; 7)\}$$

Vậy

Câu 12. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023) đề 380

Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x = 4$

Lời giải

Ta có: $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x = 4$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2xy + y^2 = 5$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2xy + y^2) = 5$$

$$(x+1)^2 + (x+y)^2 = 5$$

Vì x, y nguyên nên ta có:

$$\text{TH1} \quad \begin{cases} x+1=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{TH2} \quad \begin{cases} x+1=1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH3} \quad \begin{cases} x+1=-1 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{TH4} \quad \begin{cases} x+1=-1 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH5} \begin{cases} x+1=2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH6} \begin{cases} x+1=2 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH7} \begin{cases} x+1=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{TH8} \begin{cases} x+1=-2 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là: $(0; 2); (0; -2); (-2; 4); (-2; 0); (1; -2); (1; 0); (-3; 4); (-3; 2)$

Câu 13. (HSG 7 thành phố Lào Cai 2022 - 2023) đề 383

Tìm các số x, y nguyên dương biết: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 13$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^2 - 6xy + 13y^2 = 13 &\Rightarrow x^2 - 3xy - 3xy + 9y^2 + 4y^2 = 13 \\ &\Rightarrow x(x - 3y) - 3y(x - 3y) = 13 - 4y^2 \Rightarrow (x - 3y)(x - 3y) = 13 - 4y^2 \\ &\Rightarrow (x - 3y)^2 = 13 - 4y^2 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Do } (x - 3y)^2 \geq 0 \text{ nên } 13 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow -4y^2 \geq -13 \Rightarrow y^2 \leq \frac{13}{4} \Rightarrow |y| \leq \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Ngoài ra: (1) là các số nguyên dương nên $13 - 4y^2$ là số chính phương dương nên $y \in \{0; 1\}$ (Do

$$|y| \leq \frac{\sqrt{13}}{2})$$

$$\text{Với } y=0 \Rightarrow (x - 3 \cdot 0)^2 = 13 - 4 \cdot 0 \Rightarrow x^2 = 13 \Rightarrow x = \pm\sqrt{13} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$y=1 \Rightarrow (x - 3 \cdot 1)^2 = 13 - 4 \cdot 1 \Rightarrow (x - 3)^2 = 9 \Rightarrow x - 3 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$$

Vậy các cặp số x, y thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $(0; 1); (6; 1)$

Câu 14. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023) đề 387

Tìm các số nguyên x, y biết: $x^2y - 1 = x^2 + 4y$

Lời giải

$$x^2y - 1 = x^2 + 4y$$

$$x^2y - x^2 - 4y = 1$$

$$x^2y - x^2 - 4y + 4 = 1 + 4$$

$$x^2(y - 1) - 4(y - 1) = 5$$

$$(y - 1)(x^2 - 4) = 5$$

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ thì $y - 1, x^2 - 4 \in U^{(5)}$

$$U^{(5)} = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$y - 1$	-5	-1	1	5
$x^2 - 4$	-1	-5	5	1

y	-4	0	2	6
x^2	3 (L)	-1 (L)	9	5 (L)
x			± 3	

Vậy các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn là $(3; 2); (-3; 2)$.

Câu 15. (HSG 7 huyện ... 2022 - 2023) đề 388

Tìm giá trị nguyên dương x và y sao cho: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$
Lời giải

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow xy &= 5y - 5x \\ \Rightarrow xy + 5x - 5y &= 0 \\ \Rightarrow x(y+5) - 5(y+5) &= -25 \\ \Rightarrow (y+5)(x-5) &= -25\end{aligned}$$

Vì x, y nguyên dương nên $y+5 > 5$ và $x-5; y+5$ đều là ước của 25, vậy chỉ có 1 trường hợp: $x-5 = -1$ và $y+5 = 25$
 $\Rightarrow x = 4$ và $y = 20$

Vậy $x = 4$ và $y = 20$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Bình Long 2022 - 2023) đề 389

Tìm x, y thuộc $\mathbb{Z}$ biết: $25 - y^2 = 8(x - 2015)^2$
Lời giải

Do $8(x - 2015)^2 \geq 0$ với mọi x nên $25 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 25 \Rightarrow y^2 \in \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$.

+ Với $y^2 = 0 \Rightarrow (x - 2015)^2 = \frac{25}{8}$ (loại).

+ Với $y^2 = 1 \Rightarrow (x - 2015)^2 = \frac{24}{8} = 3$ (loại).

+ Với $y^2 = 4 \Rightarrow (x - 2015)^2 = \frac{21}{8}$ (loại).

+ Với $y^2 = 9 \Rightarrow (x - 2015)^2 = \frac{16}{8} = 2$ (loại).

+ Với $y^2 = 16 \Rightarrow (x - 2015)^2 = \frac{9}{8}$ (loại).

+ Với $y^2 = 25 \Rightarrow (x - 2015)^2 = \frac{0}{8} = 0 \Rightarrow x - 2015 = 0 \Rightarrow x = 2015$

Vậy $x = 2015; y \in \{-5; 5\}$ thỏa mãn yêu cầu của bài.

$(x; y) \in \{(0; 3); (2; -5); (3; 15); (5; 7)\}$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>