

ĐỀ ĐỘI TUYỂN SỐ 5

Câu 1.

a) Giải phương trình $4\sin^3 x + \cos 4x = 3\sin 2x + \cos 2x$.

b) Giải bất phương trình $(x-1)\sqrt{x+1} + (x^2-2)\sqrt{x-2} + x^2 - 11x + 13 \leq 0$

Câu 2.

a) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Gọi S là số có 6 chữ số khác nhau được chọn từ các số trên. Chọn ngẫu nhiên ba số từ S. Tính xác suất để ba số được chọn có hai số sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)u_n + 2 - \frac{3}{n} \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi G là trọng tâm tam giác ABC , M là điểm bất kì nằm trong tam giác ABC . Đường thẳng d đi qua điểm M và song song với đường thẳng SG cắt các mặt phẳng (SAB) , (SAC) , (SBC) lần lượt tại I , J , K

Chứng minh rằng $\frac{MI^2 + MJ^2 + MK^2}{3} \geq SG^2$

Câu 4. 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{CN} = t\overrightarrow{CD'}$ với $t, k \neq 0$. Tính độ dài MN theo a khi MN song song với $B'D$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm di động trên cạnh BC (M khác B và C). Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với hai đường thẳng SB, AC .

Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) . Xác định vị trí của M để thiết diện có diện tích lớn nhất.

Câu 5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $2(a^2 + b^2 + c^2) = 5(ab + bc + ca)$.

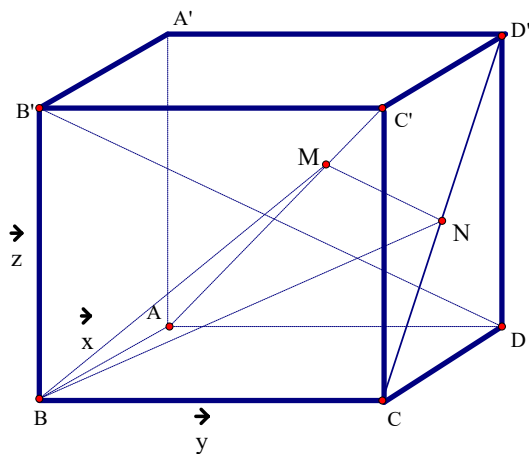
Chứng minh rằng $(a+b+c)^2 + 27\sqrt[3]{abc} + 1 \geq 0$.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{CN} = t\overrightarrow{CD'}$ với $t, k \neq 0$. Tính độ dài MN theo a khi MN song song với $B'D$.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{z}$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh a nên $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, $\vec{y} \cdot \vec{z} = 0$, $\vec{z} \cdot \vec{x} = 0$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BA} + k(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BA} + k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}) \\ &= (1-k)\vec{x} + k\vec{y} + k\vec{z}.\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{BC} + t(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CC'}) = t\vec{x} + \vec{y} + t\vec{z}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = t\vec{x} + \vec{y} + t\vec{z} - [(1-k)\vec{x} + k\vec{y} + k\vec{z}] = (t+k-1)\vec{x} + (1-k)\vec{y} + (t-k)\vec{z}$$

$$\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB'} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}.$$

$$\text{Vì } MN // B'D \text{ nên } \overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{B'D} \Leftrightarrow \begin{cases} t+k-1=m \\ 1-k=m \\ t-k=-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ k=\frac{3}{4} \\ m=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y} - \frac{1}{4}\vec{z} = \frac{1}{4}(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}).$$

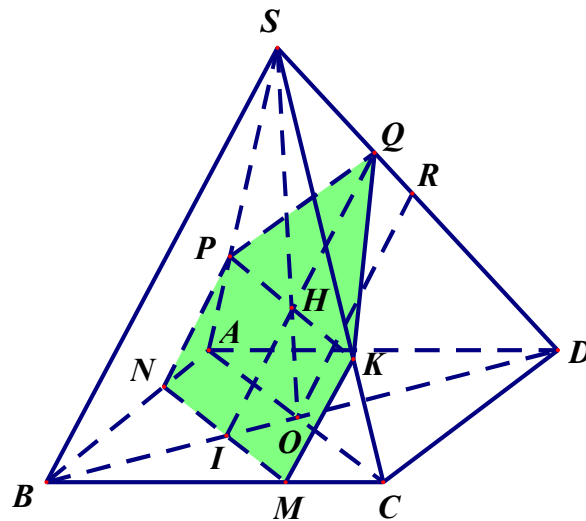
$$\begin{aligned}\Rightarrow MN^2 &= \overline{MN}^2 = \frac{1}{16}(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z})^2 \\ &= \frac{1}{16}(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} - 2\vec{y} \cdot \vec{z} - 2\vec{z} \cdot \vec{x}) = \frac{1}{16}(a^2 + a^2 + a^2) = \frac{3a^2}{16}.\end{aligned}$$

Vậy $MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm di động trên cạnh BC (M khác B và C). Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với hai đường thẳng SB, AC .

Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) . Xác định vị trí của M để thiết diện có diện tích lớn nhất.

Lời giải



Kẻ $MN \parallel AC, N \in AB, NP \parallel SB, P \in SA, PK \parallel MN \parallel AC, K \in SC$.

Gọi $I = MN \cap BD$. Kẻ $IQ \parallel SB, Q \in SD$

Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) là ngũ giác $MNPQK$.

Ta có: $\begin{cases} NP \parallel SB \\ (SBC) \cap (\alpha) = MK \end{cases} \Rightarrow MK \parallel NP$.

Ta có tứ giác $MNPK$ là hình bình hành.

Gọi α là góc giữa SB và AC . Đặt

$$x = \frac{BM}{BC} (0 < x < 1) \Rightarrow BM = xBC \Rightarrow \begin{cases} MK = (1-x)SB \\ MN = x.AC \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra : } S_{MNPk} = \frac{1}{2} BM.MK.\sin \alpha = x.(1-x).SB.AC.\sin \alpha . \text{ Gọi } H = IQ \cap PK .$$

Gọi R là trung điểm của SD , ta có :

$$\frac{QH}{OR} = \frac{SH}{SO} = \frac{BI}{BO} = \frac{BM}{BC} = x \Rightarrow QH = xOR = \frac{1}{2}x.SB \text{ và } PK = MN .$$

Vì $(\widehat{SB, AC}) = (\widehat{QH, PK})$, ta có :

$$S_{\Delta PQK} = S_{\Delta PQH} + S_{\Delta QHK} = \frac{1}{2} PH.QH.\sin \alpha + \frac{1}{2} QH.HK.\sin \alpha = \frac{1}{2} QH.PK.\sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{2} x.SB.x.AC.\sin \alpha = \frac{1}{4} x^2 .SB.AC.\sin \alpha$$

Do đó :

$$S_{MNPQK} = S_{MNPk} + S_{\Delta PQK} = \left[x(1-x) + \frac{1}{4}x^2 \right].SB.AC.\sin \alpha = \left(x - \frac{3x^2}{4} \right).SB.AC.\sin \alpha .$$