

Câu 1.(3,5đ) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x - \left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{y} = -3 - \frac{2}{x} \\ x^2 - \sqrt{y} = 11 - 2\sqrt{(x+5)(y+2)} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 2. (2,0đ) Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4...; 100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A , mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S . Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân.

Câu 3.

a. **(3đ)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

b. **(2,5đ)** Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có hai điểm cực trị $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$

Câu 4.

a. **(3đ)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{15}}{5}$, khoảng cách giữa SA và BC là $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC , tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

b. **(2đ)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm M của cạnh CD . Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAD đến mặt phẳng (SBM) .

c. **(2đ)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$ và $AA'=a$ ($a > 0$). Khi a thay đổi, tìm giá trị lớn nhất của góc tạo bởi đường thẳng $B'D$ và mặt phẳng (BDC') .

Câu 5. (2đ) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x \geq y; x \geq z; x^2 + 9yz \leq xz + 9xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{9y-x}{y}} + \frac{2y+x}{x+y} + \frac{2y+z}{y+z} + \frac{2z+x}{x+z}$.

-----/Hết/-----

ĐÁP ÁN

Câu 1.(3,5đ) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x - \left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{y} = -3 - \frac{2}{x} \\ x^2 - \sqrt{y} = 11 - 2\sqrt{(x+5)(y+2)} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải :

Điều kiện :
$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \geq 0 \\ (x+5)(y+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \neq x \geq -5 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi có được phương trình :

$$x^2 - (x+2)\sqrt{y} = -3x - 2 \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{y} = (x+1)(x+2) \Leftrightarrow (x+2)(x+1-\sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \sqrt{y} = x+1 \end{cases}.$$

Vì $y \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Kết hợp với điều kiện ta có : $0 \neq x \geq -1$.

⊕ Với $x = -2$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$4 - \sqrt{y} = 11 - 2\sqrt{3(y+2)} \Leftrightarrow 2\sqrt{3(y+2)} = \sqrt{y} + 7$$

$$\Leftrightarrow 12(y+2) = y - 14\sqrt{y} + 49 \Leftrightarrow 14\sqrt{y} = 11y - 25$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{25}{11} \\ 196y = 121y^2 - 550y + 625 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{25}{11} \\ 121y^2 - 746y + 625 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{625}{121}.$$

⊕ Với $\sqrt{y} = x+1$ thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình:

$$x^2 - x - 12 + 2\sqrt{(x+5)(x^2+2x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 + 2\sqrt{(x+5)(x^2+2x+3)} - 3(x+5) = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{x+5}{x^2+2x+3}\right) - 2\sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x+3}} - 1 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x+3}}$, $t \geq 0$. Khi đó phương trình (1) trở thành :

$$3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (1)$$

⊕ Với $t = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x+3}} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = x + 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 4 \\ x = -2 \end{cases} \quad (1)$$

Đổi chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là :

$$(x; y) = \left\{ (1; 4); \left(-2; \frac{625}{121}\right) \right\}.$$

Câu 2. (2,0đ) Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4...; 100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A , mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S . Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân.

Lời giải

Giả sử tập con bất kì $\{a, b, c\} \in S$

$\Rightarrow 1 \leq a, b, c \leq 100$; a, b, c phân biệt.

$a + b + c = 91$.

Đây là bài toán chia kẹo Euler nên số bộ a, b, c là: C_{91-1}^{3-1}

Tuy nhiên trong các bộ trên vẫn chứa các bộ có 2 chữ số giống nhau, số bộ có 2 chữ số giống nhau là $3.45 = 135$ (bộ). Vậy $n(\Omega) = (C_{90}^2 - 3.45) : 3! = 645$.

Gọi A là biến cố: " a, b, c lập thành cấp số nhân"

Gọi q là công bội của cấp số nhân theo bài ra ta có $q > 0$

$$a + aq + aq^2 = 91 \Leftrightarrow a(1 + q + q^2) = 1.91 = 13.7$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} a = 1 \\ 1 + q + q^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ q = 9 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} a = 91 \\ 1 + q + q^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 91 \\ q = 0 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} a = 13 \\ 1 + q + q^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ q = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} a = 7 \\ 1 + q + q^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ q = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } n(A) = 3. P(A) = \frac{3}{645}.$$

Câu 3.

a. (3đ) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

Lời giải

$$\text{Ta có } y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4) \text{ có } g'(x) = 32x^3 + 5(m-2).$$

Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm

+ TH1: Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 2$ hoặc $m = -2$

Với $m = 2$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = 2$ thỏa ycbt.

$$\text{Với } m = -2 \text{ thì } g(x) = 8x^4 - 20x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$						

Dựa vào BBT $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = -2$ không thỏa ycbt.

+ TH2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g'(0) > 0$
 $\Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 4 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

b. (2,5đ) Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có hai điểm cực trị $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$

Chia y cho y' ta được $y = y' \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a \right) + \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x + c - \frac{ab}{9}$.

Do $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị nên $y'(x_1) = 0, y'(x_2) = 0$

Do đó $y_1 = \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_1 + c - \frac{ab}{9}; y_2 = \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_2 + c - \frac{ab}{9}$

Theo giả thiết $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2) \Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1$

$$\Leftrightarrow x_1 \left[\left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_2 + c - \frac{ab}{9} \right] = x_2 \left[\left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_1 + c - \frac{ab}{9} \right]$$

$$\Leftrightarrow x_1 \left(c - \frac{ab}{9} \right) = x_2 \left(c - \frac{ab}{9} \right) \Leftrightarrow c - \frac{ab}{9} = 0 (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow ab = 9c$$

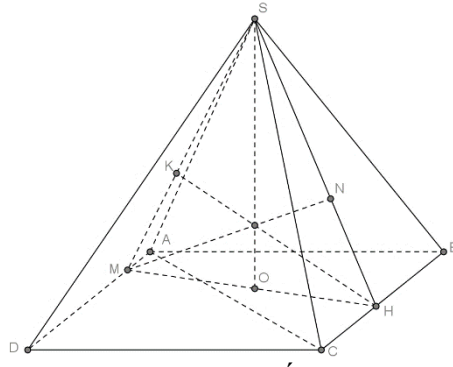
$$\text{Ta có: } P = abc + 2ab + 3c = 9c^2 + 21c = \left(3c + \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{49}{4} \geq -\frac{49}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$ bằng $-\frac{49}{4}$

Câu 4.

a. (3đ) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{15}}{5}$, khoảng cách giữa SA và BC là $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC , tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Dựng đường thẳng d đi qua O , vuông góc với BC và cắt BC, AD lần lượt tại H, M .

Khi đó $AD, BC \perp (SHM)$.

Trong $\triangle SHM$, dựng $HK \perp SM$ ($K \in SM$) và $MN \perp SH$ ($N \in SH$).

Ta có $MN \perp SH$ và $MN \perp BC$ nên $MN \perp (SBC)$.

$$\text{Vì vậy } MN = d(M, (SBC)) = d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Do $BC \parallel SAD$ nên $d(BC, SA) = d(BC, (SAD)) = d(H, (SAD)) = HK$. Suy ra

$$HK = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Do $\triangle SHM$ có hai đường cao $MN = HK$ nên cân tại S . Suy ra O là trung điểm của MH .

Ta có $MH = d(AD, BC) = d(A, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (do $\triangle ABC$ đều, cạnh bằng a). Suy ra

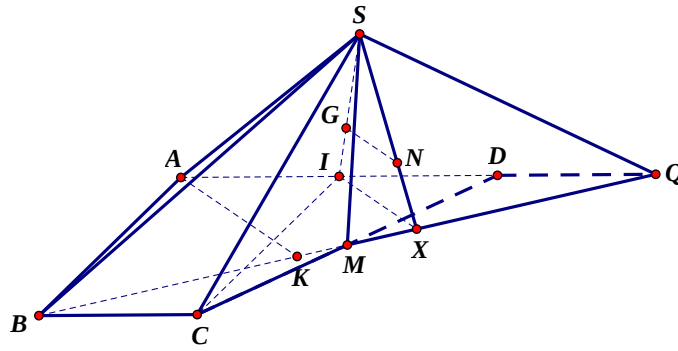
$$MO = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Xét hai tam giác đồng dạng MKH và MOS , ta có

$$\frac{KH}{SO} = \frac{MK}{MO} \Rightarrow SO = \frac{MO \cdot KH}{MK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{15}}{5}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{15}}{5}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} SO \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}.$$

b. (2đ) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy là trung điểm M của cạnh CD . Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAD đến mặt phẳng (SBM) .



+ Kẻ $CI \perp AD$ mà $AD = 2AB = 2BC$ nên suy ra I là trung điểm của $AD \Rightarrow CID$ là tam giác vuông cân tại I

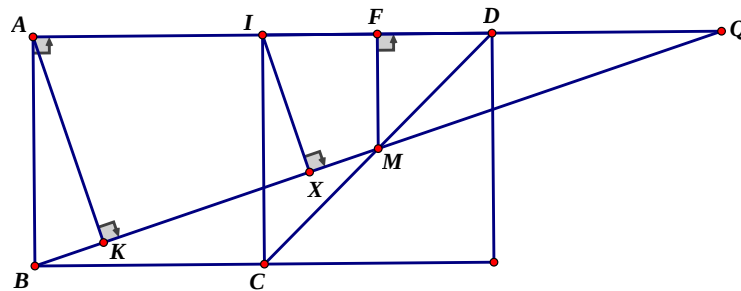
+ Ta có $SM \perp (ABCD) \Rightarrow (SMB) \perp (ABCD)$

Nên từ I ta kẻ $IX \perp BM \Rightarrow IX \perp (SBM)$

+ Trong (SIX) ta kẻ $GN \parallel IX \Rightarrow GN \perp (SBM) \Rightarrow d[G, (SBM)] = GN$

+ Xét hai tam giác đồng dạng SGN và SIX : $\frac{GN}{IX} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3} \Rightarrow GN = \frac{2}{3} IX$

Ta xét $(ABCD)$:



+ Kẻ $MF \perp AD$ mà M là trung điểm của $CD \Rightarrow MF = \frac{1}{2} AB$ suy ra F là trung điểm của AQ

Ta có: $CD = 2a\sqrt{2}$, mà $\triangle CID$ vuông cân tại I nên $ID = 2a$

$MF = \frac{1}{2} AB$ suy ra F là trung điểm của $AQ \Rightarrow AQ = 6a$

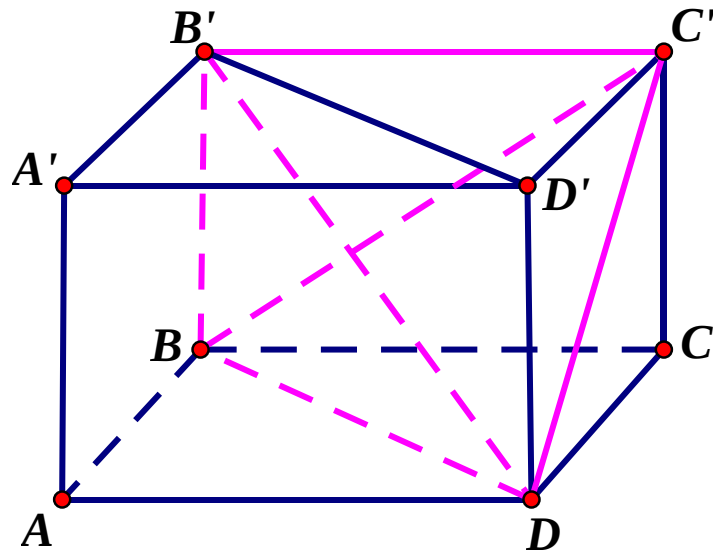
+ Xét $\triangle$ vuông ABQ , ta kẻ $AK \perp BQ \Rightarrow AK = \frac{AQ \cdot AB}{\sqrt{AQ^2 + AB^2}} = \frac{3a\sqrt{10}}{5}$

+ Ta xét 2 tam giác đồng dạng QIX và QAK : $\Rightarrow IX = \frac{QI \cdot AK}{QA} = \frac{2a\sqrt{10}}{5}$.

Vậy: $GN = \frac{2}{3} IX = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{10}}{5} = \frac{4a\sqrt{10}}{15}$

c. (2đ) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$ và $AA'=a$ ($a > 0$). Khi a thay đổi, tìm giá trị lớn nhất của góc tạo bởi đường thẳng $B'D$ và mặt phẳng (BDC') .

Lời giải



Đặt $CB = b (b > 0)$

Dễ thấy CB' cắt BC' tại trung điểm của mỗi đường

$$\text{Nên } d(B', (BDC')) = d(C, (BDC')) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{CB^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

$$DB' = \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \Rightarrow \sin(\overrightarrow{DB'}, (BDC')) = \frac{d(B', (BDC'))}{DB'} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S $\sqrt{(a^2+b^2+1)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+1)} \geq a.\frac{1}{a}+b.\frac{1}{b}+1=3$ (dấu “=” xảy ra khi $a=b=1$)

$\sin(\overrightarrow{DB'}, (BDC')) \leq \frac{1}{3}$ dễ thấy $0 \leq (DB', (BDC')) \leq 90$ mà trong khoảng này hàm $y = \sin x$ đồng biến

$$\Rightarrow (DB', (BDC'))_{\max} = \arcsin(\frac{1}{3})$$

Câu 5. (2đ) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x \geq y; x \geq z; x^2 + 9yz \leq xz + 9xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{9y-x}{y}} + \frac{2y+x}{x+y} + \frac{2y+z}{y+z} + \frac{2z+x}{x+z}$.

Lời giải

+/ Ta sẽ chứng minh:

Với mọi a, b dương và $ab \geq 1$ thì $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ (*)

Thật vậy:

(*) $\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{ab} - 1) \geq 0$ (luôn đúng). Đẳng thức xảy ra khi $a = b$ hoặc $ab = 1$.

+/ Ta có: $x^2 + 9yz \leq xz + 9xy \Leftrightarrow (x-z)(x-9y) \leq 0 \Rightarrow x-9y \leq 0$ vì $x \geq z \Rightarrow x-z \geq 0$

Đặt $t = \frac{x}{y} \Rightarrow t \in [1; 9]$

$$\text{Khi đó } P = \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 1 + \frac{y}{y+z} + 1 + \frac{z}{x+z} = \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 2 + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức đã chứng minh, ta có:

$$P \geq \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 2 + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z}}} = \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 2 + \frac{2}{1+\sqrt{t}}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[3]{9-t} + \frac{t+2}{t+1} + 2 + \frac{2}{1+\sqrt{t}}, t \in [1; 9]$ có

$$f'(t) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(9-t)^2}} - \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2} < 0, \forall t \in [1; 9] \text{ từ đó suy ra } P \geq f(t) \geq f(9) = \frac{18}{5}$$

$$\text{Đấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \frac{x}{y} = 9 \\ \frac{x}{z} = \frac{z}{y} \\ \frac{x}{z} \cdot \frac{z}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9y \\ xy = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9y \\ z = 3y \end{cases}. \text{ Vậy min } P = \frac{18}{5} \text{ khi } \begin{cases} x = 9y \\ z = 3y \end{cases}.$$