**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9**

**THÀNH PHỐ HÀ NỘI 2021**

**Võ Quốc Bá Cẩn – Nguyễn Lê Phước**

**Đề số 1**

**1. Đề thi**

**Bài 1** (5.0 điểm).

**a)** Giải phương trình 

**b)** Chứng minh rằng biểu thức  có giá trị là số nguyên, trong đó a, b, c là ba số thực đôi một phân biệt.

**Bài 2** (5.0 điểm).

**a)** Cho ba số a, b, c thỏa mãn  và  cùng chia hết cho 3. Chứng minh rằng chia hết cho 9.

**b)** Cho đa thức  có một nghiệm là  (a, b là các số hữu tỉ). Chứng minh rằng đa thức *P(x)* chia hết đa thức 

**Bài 3** (2.0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thay đổi thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Bài 4** (6.0 điểm). Cho đường tròn *(I)* nội tiếp tam giác nhọn ABC (AB < AC). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA lần lượt tại điểm D, E. Qua điểm B, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BI, cắt đường thẳng AI tại điểm J. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm J trên đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng BD = CP.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AJ và BC. Chứng minh rằng: 

c) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng JP và DE. Gọi K là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường thẳng BK vuông góc với đường thẳng AP.

**Bài 5** (2.0 điểm).

**a)** Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn 

**b)** Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể đặt được đặt trên cạnh hoặc đặt nằm trong hình chữ nhật).

**i)** Chứng minh rằng mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá .

**ii)** Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi n là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm nằm trong năm điểm đó và diện tích không vượt qua . Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

**LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN CÁC BÀI TOÁN**

**Bài 1** (5.0 điểm).

**a)** Giải phương trình 

**b)** Chứng minh rằng biểu thức  có giá trị là số nguyên, trong đó a, b, c là ba số thực đôi một phân biệt.

**Lời giải.**

**a)** Điều kiện . Phương trình đã cho có thể được viết lại thành



Hay 

Vì  và  nên (1) xảy ra khi và chỉ khi  tức  (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**b)** Ta có



Do đó, biểu thức K luôn nhận giá trị nguyên là 1.

**Bài 2** (5.0 điểm).

**a)** Cho ba số a, b, c thỏa mãn  và  cùng chia hết cho 3. Chứng minh rằng chia hết cho 9.

**b)** Cho đa thức  có một nghiệm là  (a, b là các số hữu tỉ). Chứng minh rằng đa thức *P(x)* chia hết đa thức 

**Lời giải.**

**a)** Từ giả thiết ta có  chia hết cho 3, hay  chia hết cho 3. Từ đó suy ra cùng chia hết cho 3.

Với mọi số nguyên x, ta có x chia 3 dư 0, 1 hoặc 2 nên  chia 3 dư 0 hoặc 1.Suy ra  và  khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1. Như vậy, để  chia hết cho 3, ta phải có  và  cùng chia hết cho 3, tức a và b cùng chia hết cho 3. Mặt khác, do a + b + c chia hết cho 3 nên c cũng chia hết cho 3. Từ đây, dễ thấy  chia hết cho 9. Ta có điều phải chứng minh.

**b)** Từ giả thiết, ta có , hay 

Nếu  , ta có  là một số hữu tỉ, mâu thuẫn vì  là một số vô tỉ. Do đó . Từ đó suy ra , tức  . Vậy



Rõ ràng  chia hết cho đa thức 

**Bài 3** (2.0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thay đổi thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải.**

**Giá trị lớn nhất của biểu thức Q.** Với mọi số thực x, y và z, ta có



Từ đó suy ra , hay 

Sử dụng kết quả này, ta được:



Suy ra . Mặt khác, dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức Q là 

**Giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q.** Từ giả thiết, ta có  . Suy ra 

Từ đây, ta có  và . Từ đó . Mà  nên  Tóm lại, ta có:



Chứng minh tương tự, ta cũng có: 

Từ các kết quả trên, ta suy ra:

Dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi và . Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 2.

**Bình luận:**  Để chứng minh , ta còn có hai cách tiếp cận khác như sau.

**Cách 1.** Không mất tính tổng quát, giả sử  . Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:



Lại có nên 

**Cách 2.**  Tương tự như trong lời giải đã trình bày ở trên, ta có  nên  và . Từ đây, với chú ý  và  , ta có

Suy ra 

**Bài 4** (6.0 điểm). Cho đường tròn *(I)* nội tiếp tam giác nhọn ABC (AB < AC). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA lần lượt tại điểm D, E. Qua điểm B, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng BI, cắt đường thẳng AI tại điểm J. Gọi P là hình chiếu vuông góc của điểm J trên đường thẳng BC.

a) Chứng minh rằng BD = CP.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AJ và BC. Chứng minh rằng: 

c) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng JP và DE. Gọi K là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường thẳng BK vuông góc với đường thẳng AP.

**Lời giải.**



**a)**  Có J là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác góc A tam giác ABC.



Hoặc lấy trung điểm M của IJ, khi đó MB = MC, MD = MP nên BD = CP.

b) Tính chất của hàng điểm điều hòa (kiến thức lớp 10)

Có : BI, BJ là phân giác trong, ngoài tam giác ABN suy ra 

Cách biến đổi đại số: Đặt  từ đó tính được AI, AJ theo a, k. Thay vào điều kiện phải chứng minh.

Cách khác: 

c) Gọi DI cắt AP tại S. Kẻ 

có: 

Do 





**Bài 5** (2.0 điểm).

**a)** Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn 

**b)** Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể đặt được đặt trên cạnh hoặc đặt nằm trong hình chữ nhật).

**i)** Chứng minh rằng mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá .

**ii)** Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi n là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm nằm trong năm điểm đó và diện tích không vượt qua . Tìm giá trị nhỏ nhất của n.

**Lời giải.**

**a)** Xét các trường hợp sau.

**Trường hợp 1: y = 1.** Trong trường hợp này, ta có



Suy ra . Nếu z là số lẻ, tức với k tự nhiên, thì ta có , mâu thuẫn. Do đó z là số chẵn, tức  với k nguyên dương. Khi đó ta có 

Suy ra  và  đều là lũy thừa của 3. Mà hai số này không cùng chia hết cho 3 (do  không chia hết cho 3) nên trong hai số phải có một số bằng 1. Lại có  nên , tức . Một cách tương tự, ta tính được và . Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

**Trường hợp 2:** **.**Vì  nên từ phương trình đã cho, ta có , tức . Suy ra  và  cùng chia hết cho 4. Từ đó ta có . Nếu x là số lẻ, tức  với  tự nhiên, thì , mâu thuẫn. Do đó x là số chẵn, tức  với  nguyên dương.

+) Giả sử . Khi đó, ta có và  cùng chia hết cho 16 nên . Nếu  là số lẻ, tức  với  tự nhiên, thì , mâu thuẫn. Do đó  là số chẵn, tức  với  nguyên dương. Suy ra . Từ đó  chia hết cho 5, hay 

Nếu  là số lẻ, tức  với u tự nhiên, thì  mâu thuẫn. Do đó  là số chẵn, tức  với u nguyên dương. Khi đó, ta có chia hết cho 3. Lại có chia hết cho 3 nên 1 chia hết cho 3, mâu thuẫn.

+) Như vậy, ta phải có . Nếu  thì ta có , suy ra  chia hết cho 3, mâu thuẫn. Do đó . Khi đó ta có: 

Từ đây, ta có . Chứng minh tưng tự **trường hợp 1**, suy ra z là số chẵn, tức  với m nguyên dương. Khi đó ta có: 

Vì  và  nên . Từ đó  và , hay ta có  và . Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy có hai bộ số (x, y, z) thỏa mãn yêu cầu là (1, 1, 2) và (2, 3, 4).

b) i) Trước hết, ta chứng minh kết quả sau: Cho hình chữ nhật ABCD có diện tích S. Xét ba điểm E, F, G không thẳng hàng thuộc miền mặt phẳng giới hạn bởi hình chữ nhật ABCD. Khi đó 



Qua ba điểm E, F, G kẻ các đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB. Trong các đường thẳng này, có một đường thẳng nằm giữa hoặc trùng với một trong hai đường thẳng kia. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là đường thẳng d qua điểm F. Khi đó, đường thẳng d sẽ cắt đoạn thẳng EG tại điểm P nào đó. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng d và hai đường thẳng AB, CD. Khi đó, ta có



Trong đó d(X, ZT) được ký hiệu là khoảng cách từ điểm X đến đường thẳng ZT.

Từ kết quả vừa chứng minh trên, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

**ii)** Trước hết, ta sẽ chứng minh . Thật vậy, giả sử . Gọi hình chữ nhật đã cho là hình chữ nhật ABCD. Chia hình chữ nhật ABCD thành bốn hình chữ nhật nhỏ bằng nhau AMRQ, BMRP, CPRN, DQRN như hình vẽ bên dưới.

Xét hai hình chữ nhật AMND và BMNC. Ta thấy mỗi điểm trong năm điểm đã cho thuộc một trong hai miền mặt phẳng giới hạn bởi hai hình chữ nhật này. Do đó, có ba điểm thuộc cùng một hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát, giả sử ba điểm đó là H, K, S và chúng cùng thuộc hình chữ nhật AMND.

Xét hai hình chữ nhật AMRQ và DQRN. Ta thấy mỗi điểm trong ba điểm H, K, S sẽ thuộc một trong hai miền mặt phẳng giới hạn bởi hai hình chữ nhật này. Do đó, có hai điểm thuộc cùng một hình chữ nhật. Không mất tính tổng quát, giả sử hai điểm đó là H, K và chúng cùng thuộc hình chữ nhật AMRQ.



Áp dụng kết quả đã chứng minh ở phần i) ta có 

Gọi hai điểm còn lại trong năm điểm là V và W. Nếu có một điểm nào đó trong hai điểm này thuộc đa giác ABPRND, chẳng hạn là V thì bằng cách sử dụng kết quả đã chứng minh ở phần i), ta cũng có . Suy ra , mâu thuẫn. Do đó, cả hai điểm V và W phải nằm trong hình chữ nhật CPRN.

Nếu S thuộc một trong hai hình chữ nhật DQRN và BMRP thì bằng cách sử dụng kết quả đã chứng minh ở phần i) ta có  mâu thuẫn. Do đó S nằm trong hình chữ nhật AMRQ.

Gọi S1 là diện tích của tứ giác (không nhất thiết lồi) tạo bởi H, K, S và V. Khi đó, rõ ràng



Mặt khác, trong ba tia VH, VK, VS luôn có một tia nằm giữa hai tia còn lại, chẳng hạn VK. Do đó: 

Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra  Từ đó, kết hợp với  , ta có mâu thuẫn. Vậy ta phải có 

Mặt khác, ta có n = 2 được thỏa mãn trong trường hợp sau:



Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 2.

**Bình luận:**  Bài 5a) là một sự tương tự hóa của bài số học trong đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO 2019: *Tìm tất cả số nguyên dương x, y, z thỏa mãn* 

Trường hợp đặc biệt của bài toán cũng đã được sử dụng làm đề chọn đội tuyển Đại học Vinh tham dự kì thi học sinh giỏi Quốc gia 2019: *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn:* 