

ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức :

$$P = \frac{x}{\sqrt{xy} - 2y} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq 4, x \neq 1$$

Lời giải :

$$P = \frac{x}{\sqrt{xy} - 2y} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq 4, x \neq 1$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{xy} - 2y} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{x}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{x})} \\ &= \frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} + \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})} = \sqrt{\frac{x}{y}} \end{aligned}$$

b) Cho $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{x^5 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 3}$

Lời giải :

Cho $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{x^5 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 3}$

$$x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow x^3 - 6x - 6 = 0$$

$$A = \sqrt{x^5 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 3} = \sqrt{(x^3 - 6x - 6)(x^2 + 1) + 9} = 3$$

Vậy $A = 3$

Bài 2. (4,5 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 6x - 6} = 3\sqrt{(2-x)^5} + (7x-19)\sqrt{2-x}$

Lời giải :

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} 3x^2 - 6x - 6 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x - 6} = a \geq 0 \\ \sqrt{2-x} = b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x - 6 = a^2 \\ 2 - x = b^2 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 5x - 7 = a^2 - b^2 + 1$$

Ta có :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x^2 - 6x - 6} &= 3\sqrt{(2-x)^5} + (7x-19)\sqrt{2-x} \\
\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} &= \sqrt{2-x} [3(2-x)^2 + 7x-19] \\
\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} &= (3x^2 - 5x - 7)\sqrt{2-x} \Rightarrow a = (a^2 - b^2 + 1)b \\
\Leftrightarrow (a-b)(ab + b^2 - 1) &\Leftrightarrow a = b \text{ (do } ab + b^2 - 1 \nmid \forall x \text{ thỏa DKXD)} \\
\Rightarrow a = b \Rightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} &= \sqrt{2-x} \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} (ktm) \\ x = -1 (tm) \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$

b) Giải phương trình $5x^2 + 6x + 4 = 3(x+1)\sqrt{3x^2 + 4}$

Lời giải :

Phương trình tương đương :

$$3x^2 + 4 - 3(x+1)\sqrt{3x^2 + 4} + 2x^2 + 6x = 0$$

Đặt $t = \sqrt{3x^2 + 4}$ được phương trình $t^2 - 3(x+1)t + 2x^2 + 6x = 0$

$$\Delta = 9(x+1)^2 - 4(2x^2 + 6x) = (x-3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x \\ t = x+3 \end{cases}$$

Ta có

$$t = 2x \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 4} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Với

$$t = x+3 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 4} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 2x^2 - 6x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{2}$$

Với

$$S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{19}}{2}; 2; \frac{3 + \sqrt{19}}{2} \right\}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p . Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p

Lời giải :

Vì $(p-5) \nmid 8 \Rightarrow p = 8k + 5 (k \in \mathbb{Z})$. Ta có :

$$(ax^2)^{4k+2} - (by^2)^{4k+2} \equiv (ax^2 - by^2) \pmod{p} \Rightarrow (a^{4k+2}x^{8k+4} - b^{4k+2}y^{8k+4}) \equiv 0 \pmod{p} \text{ . Nhận thấy}$$

$$a^{4k+2}x^{8k+4} - b^{4k+2}y^{8k+4} = (a^{4k+2} + b^{4k+2})x^{8k+4} - b^{4k+2}(x^{8k+4} + y^{8k+4})$$

$$\text{Do } (a^{4k+2} + b^{4k+2}) = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} : (a^2 + b^2) = p \text{ và } b < p \text{ nên } (x^{8k+4} + y^{8k+4}) \equiv 0 \pmod{p} (*)$$

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ $(*)$ suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p . Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lý Fermat ta có

$$x^{8k+4} = x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$y^{8k+4} = y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} \equiv 2 \pmod{p} \text{ (mâu thuẫn với (*))}$$

Vậy cả hai số x, y đều chia hết cho p

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn $(2m+5n+1)(2^m+n+m^2+m) = 105$

Lời giải :

$$\text{Vì } m, n \in \mathbb{N} \text{ nên } \begin{cases} (2m+5n+1) \in \mathbb{N} \\ (2^m+n+m^2+m) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ta thấy 105 lẻ nên để $(2m+5n+1)(2^m+n+m^2+m) = 105$ thì

$$\left. \begin{array}{l} (2m+5n+1) \text{ lẻ} \\ 2m \text{ chẵn} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 5n \text{ chẵn nên } n \text{ chẵn (*)} \end{array}$$

2^m+n+m^2+m lẻ mà n chẵn (theo (*)) và $m^2 = m(m+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên chẵn, do đó 2^m lẻ nên $m = 0$. Khi đó

$$(5n+1)(n+1) = 105 \Leftrightarrow 5n^2 + 6n - 104 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5n+26)(n-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\frac{26}{5} \text{ (không thỏa)} \\ n = 4 \text{ (thỏa)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (m, n) = (0; 4)$$

Bài 4. (6,0 điểm)

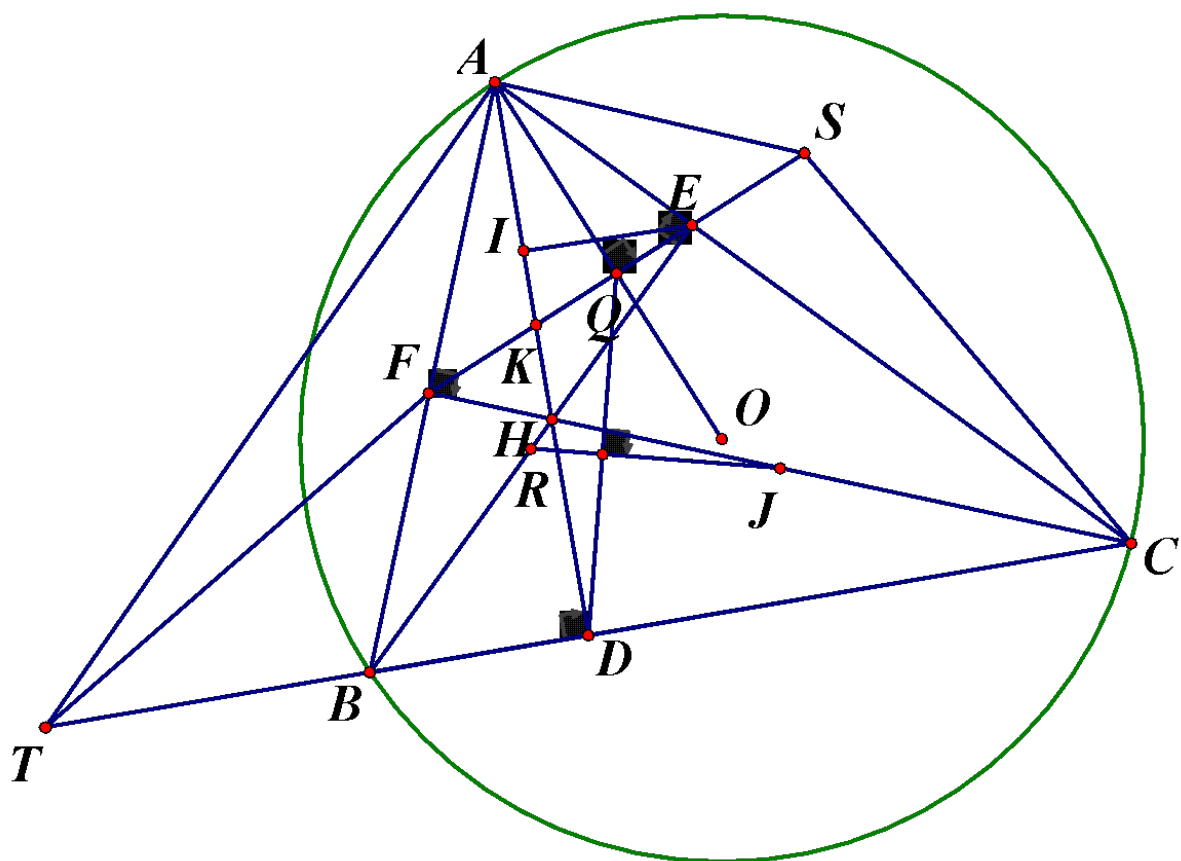
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại trực tâm H . Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với hai đường thẳng AH, AO

1) Chứng minh $\angle AQE = 90^\circ$

2) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh $IE^2 = IK.ID$

3) Gọi R, J lần lượt là trung điểm của BE, CF . Chứng minh JR vuông góc với QD

Lời giải :



1) Chứng minh $\angle AQE = 90^\circ$

Dễ chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c) \Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$

Kẻ đường kính AP của (O) . Dễ chứng minh tứ giác $BHCP$ là hình bình hành nên

$BH = CP$. Ta có $\triangle BHD \sim \triangle ACD (g.g)$

Suy ra $\frac{BD}{AD} = \frac{BH}{AC} = \frac{CP}{AC} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle APC (c.g.c)$

Điều này chứng tỏ

$\angle BAD = \angle CAP \Rightarrow \angle AEF + \angle CAP = \angle ABC + \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow \angle AQE = 90^\circ$

2) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh $IE^2 = IK.ID$

Xét tam giác AEH vuông tại E có $IE = IA = IH$ nên tam giác AIE cân tại I

Suy ra $\angle IEA = \angle IAE$. Tương tự $\angle MEC = \angle MCE$

$\Rightarrow \angle IEA + \angle MEC = \angle IAE + \angle MCE = 90^\circ \Rightarrow \angle IEM = 90^\circ$

Từ $IE = IF, ME = MF \Rightarrow MI$ là đường trung trực của EF , dẫn đến $MI \perp EF$

N là giao điểm của $EF, MI \Rightarrow IE^2 = IN.IM$

Mặt khác $\triangle INK \sim \triangle IDM (g.g) \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IK}{IM}$

Suy ra $IN.IM = IK.ID \Rightarrow IE^2 = IK.ID$

3) Gọi R, J lần lượt là trung điểm của BE, CF . Chứng minh JR vuông góc với QD

Gọi S là điểm đối xứng với F qua Q , gọi T là điểm đối xứng với C qua D

Chứng minh được $\angle TAF = \angle CAS$, dẫn tới $\triangle TAF = \triangle CAS (c.g.c) \Rightarrow FT = CS$

Mặt khác, theo tính chất đường trung bình

$$JQ = \frac{1}{2}SC \quad \text{và} \quad JD = \frac{1}{2}FT \Rightarrow JD = JQ$$

Chứng minh tương tự ta có $RD = RC$, suy ra JR là đường trung trực của $DQ \Rightarrow JR \perp QD$

Bài 5. (2,5 điểm)

a) Với các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}$

Lời giải :

Ta có :

$$3 - P = \frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \geq \frac{9}{ab+bc+ca+3} \geq \frac{9}{\frac{(a+b+c)^2}{3} + 3} = \frac{27}{13}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{12}{13} \Rightarrow \min P = \frac{12}{13} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{3}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất

Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$

$$\forall 0 \leq a, b, c \leq 1 \text{ nên } (a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab+1 \geq a+b \Rightarrow \frac{a+b}{ab+1} \leq 1$$

$$\text{Chứng minh tương tự : } \frac{a+b}{ab+1} + \frac{b+c}{bc+1} + \frac{c+a}{ca+1} \leq 3$$

$$\text{Từ đó } 2(3-P) = \frac{a+b+c}{ab+1} + \frac{a+b+c}{bc+1} + \frac{a+b+c}{ca+1}$$

$$\leq 1+1+1 + \left(\frac{c}{ab+1} + \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} \right) \leq 3 + \frac{a+b+c}{bc+1} \leq 3 + a+b+c = 5$$

$$\text{Nên ta có : } 3-P \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = 1, c = 0$$

b) Trên một mặt bàn phẳng có 2021 đồng xu kích thước bằng nhau, mỗi đồng xu có hai mặt trong đó có một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, đồng thời tất cả các đồng xu đều ngửa mặt màu xanh lên trên mặt bàn. Thực hiện trò chơi sau đây: mỗi lượt chơi phải đổi mặt 10 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2022 lượt chơi có thể nhận được tất cả 2021 đồng xu trên mặt bàn đều ngửa mặt màu đỏ lên trên hay không? Hãy giải thích vì sao?

Lời giải :

Lần thứ nhất có 10 đồng xu màu xanh thành đỏ, do đó sau lần thứ nhất có 2011 đồng xu màu xanh và 10 đồng xu màu đỏ ngửa mặt lên trên

Giả sử trong lần lật thứ hai có x_1 đồng xu màu xanh thành đỏ, như vậy sẽ có $(10-x_1)$ đồng xu màu đỏ thành xanh ($0 \leq x \leq 10$). Số đồng xu có màu xanh ngửa lên phía trên sẽ là :

$$(2011-x_1) + (10-x_1) = 2021 - 2x_1$$

Cứ như vậy sau bao nhiêu lần đi nữa thì số đồng xu có mặt màu xanh ngửa lên phía trên luôn là số lẻ. Vậy sau 2022 lần chơi không thể nhận được 2021 đồng xu có mặt màu đỏ ngửa lên phía trên.

Người soạn đề : PHẠM ĐỨC