

Chương II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Chuyên đề 11. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Cộng hai phân thức cùng mẫu thức

Quy tắc. Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu thức, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức.

2. Cộng hai phân thức có mẫu số khác nhau

- *Quy tắc.* Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

- *Chú ý.* Phép cộng các phân thức có các tính chất sau:

+ Giao hoán: $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$;

+ Kết hợp: $\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) + \frac{E}{F} = \frac{A}{B} + \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right)$.

1. Phân thức đối

- Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng của chúng bằng 0.

- Phân thức đối của phân thức $\frac{A}{B}$ được kí hiệu bởi $-\frac{A}{B}$

Như vậy $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$ và $-\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$.

2. Phép trừ

Quy tắc: Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, ta cộng $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của $\frac{C}{D}$:

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right).$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Thực hiện phép tính:

$$a) A = \frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kĩ các phân thức, nhận thức tử thức của mỗi phân thức đều phân tích đa thức thành nhân tử được, do vậy ta nên phân tích thành nhân tử cả tử thức và mẫu thức và rút gọn phân thức trước khi thực hiện phép cộng.

Trình bày lời giải.

Ta có:

$$A = \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)}{(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)} + \frac{(x + x^2 - 1)(x - x^2 + 1)}{(x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1)} + \frac{(x^2 - x - 1)(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{x - x^2 + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} = 1.$$

Nhận xét. Trong khi thực hiện phép cộng, trừ các phân thức đại số, nếu phân thức nào rút gọn được, bạn nên rút gọn trước khi thực hiện.

Ví dụ 2. Cho a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tính giá trị

$$M = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ac + c + 1}$$

Giải

Thay $1 = abc$ vào biểu thức, ta có:

$$M = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{abc \cdot b}{bc + abc \cdot b + abc} + \frac{c}{ac + c + abc}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{ab}{1 + ab + a} + \frac{1}{a + 1 + ab}$$

$$M = \frac{ab + a + 1}{ab + a + 1} = 1.$$

Nhận xét.

- Lời giải trên tinh tế khi giữ nguyên một phân thức và thay số 1 vào vị trí hợp lý để rút gọn phân thức, đưa các phân thức về cùng mẫu.
- Sử dụng kỹ thuật trên bạn có thể giải được bài toán sau: Cho a, b, c, d thỏa mãn $abcd = 1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$N = \frac{1}{1 + 2a + 3ab + 4abc} + \frac{2}{2 + 3b + 4bc + bcd}$$

$$+ \frac{3}{3 + 4c + cd + 2cda} + \frac{4}{4 + d + 2da + 3dab}.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{1}{a - b} + \frac{1}{a + b} + \frac{2a}{a^2 + b^2} + \frac{4a^3}{a^4 + b^4} + \frac{8a^7}{a^8 + b^8}.$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát các phân thức, chúng ta nhận thấy không có mẫu của hạng tử nào phân tích được thành nhân tử nên việc quy đồng mẫu thức tất cả các hạng tử là không khả thi. Nhận thấy mẫu của hai phân thức đầu có dạng $a - b$ và $a + b$, thực hiện trước tổng của hai phân thức này cho ta kết quả gọn. Với suy luận ấy, chúng ta tiếp tục cộng kết quả ấy với phân thức tiếp theo.

Trình bày lời giải

Ta có: $B = \frac{2a}{a^2 - b^2} + \frac{2a}{a^2 + b^2} + \frac{4a^3}{a^4 + b^4} + \frac{8a^7}{a^8 + b^8}$

$$\Rightarrow B = \frac{4a^3}{a^4 - b^4} + \frac{4a^3}{a^4 + b^4} + \frac{8a^7}{a^8 + b^8} \Rightarrow B = \frac{8a^7}{a^8 - b^8} + \frac{8a^7}{a^8 + b^8} \Rightarrow B = \frac{16a^{15}}{a^{16} - b^{16}}$$

Ví dụ 4. Cho $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Rút gọn biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}.$$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy nếu quy đồng mẫu trực tiếp là không khả thi bởi các mẫu hiện tại không phân tích thành nhân tử được và nếu quy đồng thì biểu thức rất phức tạp, mặt khác chưa khai thác được giả thiết. Phân tích giả thiết ta được $ab + bc + ca = 0$, khai thác yếu tố này vào mẫu thức ta được:

$a^2 + 2bc = a^2 + 2bc - ab - bc - ca$ và phân tích thành nhân tử được. Do vậy ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Từ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$, ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2$ nên $ab + bc + ca = 0$

Xét $a^2 + 2bc = a^2 + 2bc - ab - bc - ca = a^2 - ab - ca + bc = (a-b)(a-c)$.

Tương tự ta có: $b^2 + 2ac = (b-a)(b-c)$; $c^2 + 2ab = (c-a)(c-b)$.

Do đó ta có: $P = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$\Rightarrow P = - \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

Phân tích tử thức thành nhân tử, ta có: $P = - \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$.

Ví dụ 5. Tìm A, B thỏa mãn: $\frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{1}{x+2}$

Giải

Tìm cách giải. Để tìm hệ số A và B, chúng ta biến đổi vế phải. Sau đó đồng nhất hệ số hai vế.

Trình bày lời giải

Ta có: $x^3 - 3x + 2 = x^3 - 2x^2 - x + 2 = x(x+1)(x-1) - 2(x-1)$

$$= (x-1)(x^2 + x - 2)$$

$$= (x-1)^2(x+2)$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 3x + 3}{(x-1)^2(x+2)} &= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2) + B(x-1)(x+2) + (x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 3 = (B+1)x^2 + (A+B-2)x + (2A-2B+1)$$

Đồng nhất hệ số ta có:
$$\begin{cases} B+1+3 \\ A+B-2=3 \\ 2A-2B+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases}$$

Ví dụ 6. Thực hiện phép tính:

$$A = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - xz}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 - xy}{(x+z)(y+z)}$$

Giải

Tìm cách giải. Suy nghĩ trước bài này, ta có hai hướng phân tích:

Hướng thứ nhất. Quy đồng mẫu, thực hiện phép cộng như thường lệ.

Hướng thứ hai. Tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức, rồi khử liên tiếp. Trong bài này, cách này không ngắn, song thể hiện được nét đẹp và sáng tạo.

Trình bày lời giải

Cách 1. Ta có:
$$A = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - xz}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 - xy}{(x+z)(y+z)}$$

$$A = \frac{(x^2 - yz)(y+z) + (y^2 - xz)(x+z) + (z^2 - xy)(x+y)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

$$A = \frac{x^2y + x^2z - y^2z - yz^2 + xy^2 + y^2z - x^2z + xz^2 + yz^2 - x^2y - xy^2}{(x+y)(x+z)(y+z)} = 0$$

Cách 2. Ta có:

$$\frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x^2 + xy - xy - yz}{(x+y)(x+z)} = \frac{x(x+y) - y(x+z)}{(x+y)(x+z)} = \frac{x}{x+z} - \frac{y}{x+y} \quad (1)$$

Tương tự

$$\frac{y^2 - xz}{(y+z)(y+x)} = \frac{y}{x+y} - \frac{z}{y+z} \quad (2)$$

$$\frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)} = \frac{z}{y+z} - \frac{x}{x+z} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) cộng vế với vế ta được $A = 0$.

Ví dụ 7. Cho $a_1, a_2, \dots, a_9$ được xác định bởi công thức: $a_k = \frac{3k^2 + 3k + 1}{(k^2 + k)^3}$ với mọi $k \geq 1$

Hãy tính giá trị của tổng: $1 + a_1 + a_2 + \dots + a_9$.

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 1999 – 2000)

Giải

Tìm cách giải. Bài toán có tính quy luật, thay số vào tính là không khả thi. Do vậy chúng ta nghĩ đến việc tách mỗi phân thức thành hiệu của hai phân thức, rồi khử liên tiếp. Nhận thấy $3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3$, nên chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

$$\text{Ta có: } a_k = \frac{3k^2 + 3k + 1}{(k^2 + k)^3} = \frac{(k+1)^3 - k^3}{k^3(k+1)^3} = \frac{1}{k^3} - \frac{1}{(k+1)^3}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S &= 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_9 \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{9^3} - \frac{1}{10^3}\right) = 2 - \frac{1}{10^3} = \frac{1999}{1000}. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Rút gọn biểu thức:

$$M = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} \\ &= \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} \\ &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} \\ &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-6} = \frac{-4}{(x-2)(x-6)}. \end{aligned}$$

C. Bài tập vận dụng

11.1. Xác định các số a, b biết: $\frac{3x+1}{(x+1)^3} = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^2}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{(x+1)^3} &= \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{(x+1)^3} = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{bx+b}{(x+1)^3} \\ \Leftrightarrow \frac{3x+1}{(x+1)^3} &= \frac{bx+a+b}{(x+1)^3} \Leftrightarrow 3x+1 = bx+a+b \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

11.2. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{20x^2 + 120x + 180}{(3x+5)^2 - 4x^2} + \frac{5x^2 - 125}{9x^2 - (2x+5)^2} - \frac{(2x+3)^2 - x^2}{3(x^2 + 8x + 15)}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{20(x+3)^2}{(x+5).5(x+1)} + \frac{5(x-5)(x+5)}{5(x+1)(x-5)} - \frac{(x+3).3.(x+1)}{3(x+3)(x+5)} \\
&= \frac{4(x+3)^2}{(x+5)(x+1)} + \frac{x+5}{x+1} - \frac{x+1}{x+5} = \frac{4(x+3)^2 + (x+5)^2 - (x+1)^2}{(x+1)(x+5)} \\
&= \frac{4x^2 + 24x + 36 + x^2 + 10x + 25 - x^2 - 2x - 1}{(x+1)(x+5)} \\
&= \frac{4x^2 + 32x + 60}{(x+5)(x+1)} = \frac{4(x+3)(x+5)}{(x+5)(x+1)} = \frac{4(x+3)}{x+1}
\end{aligned}$$

11.3. Cho $P = \frac{a^4 - a}{a^2 + a + 1} - \frac{3a^2 - 2a}{a} + \frac{a^2 - 4}{a - 2}$.

a) Rút gọn biểu thức P;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $P = \frac{a^4 - a}{a^2 + a + 1} - \frac{3a^2 - 2a}{a} + \frac{a^2 - 4}{a - 2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a(a-1)(a^2+a+1)}{(a^2+a+1)} - 3a + 2 + \frac{(a-2)(a+2)}{a-2} \\
&= a^2 - a - 3a + 2 + a + 2 = a^2 - 3a + 4.
\end{aligned}$$

Điều kiện $a \neq 2$.

b) $P = a^2 - 3a + 2,25 + 1,75 = (a - 1,5)^2 + 1,75 \geq 1,75$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 1,5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1,75 đạt được khi $a = 1,5$.

11.4. Cho biểu thức: $Q = \frac{x^4 + x}{x^2 - x + 1} + 1 - \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1}$.

a) Rút gọn biểu thức Q;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của Q.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có: $Q = \frac{x^4 + x}{x^2 - x + 1} + 1 - \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1}$ (ĐK: $x \neq -1$)

$$\begin{aligned}
&= \frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + 1 - \frac{(2x+1)(x+1)}{x+1} \\
&= x^2 + x + 1 - 2x = x^2 - x.
\end{aligned}$$

b) $Q = x^2 - x + 0,25 - 0,25 = (x - 0,5)^2 - 0,25 \geq -0,25$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là -0,25 đạt được $\Leftrightarrow x = 0,5$.

11.5. Thực hiện phép tính: $M = \frac{a^2 + 1}{a} + \frac{a^3 - 1}{a^2 - a} + \frac{a^4 - a^3 + a - 1}{a - a^3}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^2+1}{a} + \frac{a^3-1}{a^2-a} + \frac{a^4-a^3+a-1}{a-a^3} \\ &= \frac{a^2+1}{a} + \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a-1)} - \frac{a^4-a^3+a-1}{a(a^2-1)} \\ &= \frac{a^2+1}{a} + \frac{a^2+a+1}{a} - \frac{(a^2-1)(a^2+1)-a(a^2-1)}{a(a^2-1)} \\ &= \frac{a^2+1+a^2+a+1}{a} - \frac{a^2+1-a}{a} = \frac{a^2+2a+1}{a} \end{aligned}$$

11.6. Đặt $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = a$

Tính giá trị của biểu thức: $M = \frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết $\Rightarrow a = \frac{(x^2+y^2)^2 + (x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$

$$\Rightarrow a = \frac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4} \Rightarrow \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} = \frac{a}{2}$$

Ta có: $\frac{a}{2} + \frac{2}{a} = \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4} + \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} = \frac{(x^4+y^4)^2 + (x^4-y^4)^2}{(x^4-y^4)(x^4+y^4)}$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{2}{a} = \frac{2(x^8+y^8)}{x^8-y^8} \Rightarrow \frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} = \frac{a^2+4}{4a}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a^2+4}{4a} + \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^4+24a^2+16}{4a(a^2+4)}$$

11.7. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức sau nhận giá trị nguyên

$$A = \frac{2x^3+x^2+2x+5}{2x+1}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $A = \frac{(x^2+1)(2x+1)+4}{2x+1} = x^2+1 + \frac{4}{2x+1}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{4}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x+1 \in \{\pm 1\} \Leftrightarrow x \in \{0; -1\}$.

11.8. Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3}$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{Biến đổi } & \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} \\ & = \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} \quad (\text{do } x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \text{ và } x - 1 = -y) \\ & = \frac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) - (x - y)}{xy(x^2 y^2 + y^2 x + y^2 + yx^2 + xy + y + x^2 + x + 1)} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} \\ & = \frac{(x - y)(x^2 + y^2 - 1)}{xy[x^2 y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2]} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} \\ & = \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy[x^2 y^2 + (x + y)^2 + 2]} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2 y^2 + 3)} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} \\ & = \frac{(x - y)[x(-y) + y(-x)]}{xy[x^2 y^2 + 3]} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = \frac{(x - y)(-2xy)}{xy(x^2 y^2 + 3)} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} \\ & = \frac{-2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0. \end{aligned}$$

11.9. Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $xyz \neq 0$.

Tính $P = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$.

(Tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Từ giả thiết, ta có $y + z = -x \Leftrightarrow y^2 + z^2 - x^2 = -2xy$.

Làm tương tự, thay vào P, ta được:

$$P = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2xz} + \frac{z^2}{-2xy} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-2xyz} = \frac{3xyz}{-2xyz} = \frac{-3}{2}$$

$$P = \frac{-3}{2}$$

11.10. Cho ba số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{zx}{y^2 + 2zx} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$

(Tuyển sinh lớp 10, Trường THPT chuyên TP Hồ Chí Minh, năm học 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 0 \Leftrightarrow yz = -xy - zx.$

$$\frac{yz}{x^2 + 2yz} = \frac{yz}{x^2 - xy - zx + yz} = \frac{yz}{(x - y)(x - z)}$$

Tương tự: $\frac{zx}{y^2 + 2zx} = \frac{zx}{(y - z)(y - x)}; \frac{xy}{z^2 + 2xy} = \frac{xy}{(z - x)(z - y)}$

$$A = \frac{yz}{(x - y)(x - z)} + \frac{zx}{(y - z)(y - x)} + \frac{xy}{(z - x)(z - y)}$$

$$\frac{yz(z - y) + xy(y - x) + zx(x - z)}{(x - y)(y - z)(z - x)} = 1$$

11.11. Cho $ax + by = c; by + cz = a; cz + ax = b$ và $a + b + c \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết suy ra:

$$a + b + c = 2(ax + by + cz) \Rightarrow a + b + c = 2(c + cz) = 2c(1 + z)$$

Nên: $\frac{1}{z+1} = \frac{2c}{a+b+c}$

Tương tự: $\frac{1}{x+1} = \frac{2a}{a+b+c}; \frac{1}{y+1} = \frac{2b}{a+b+c}.$

Suy ra: $P = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2$

11.12. Cho a, b thỏa mãn $4a^2 + 2b^2 - 7ab = 0$ và $4a^2 - b^2 \neq 0$

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{3a-b}{2a-b} + \frac{5b-3a}{2a+b}.$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có: $\frac{6a^2 + ab - b^2 + 10ab - 6a^2 + 3ab}{4a^2 - b^2} = \frac{14ab - 6b^2}{7ab - 3b^2} = 2$

11.13. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{3^3 + 1^3}{2^3 - 1^3} + \frac{5^3 + 2^3}{3^3 - 2^3} + \frac{7^3 + 3^3}{4^3 - 3^3} + \dots + \frac{101^3 + 50^3}{51^3 - 50^3}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Xét phân thức tổng quát:

$$\frac{(2n+1)^3 + n^3}{(n+1)^3 - n^3} = \frac{(3n+1) \left[(2n+1)^2 - n(2n+1) + n^2 \right]}{3n^2 + 3n + 1}$$

$$= \frac{(3n+1)(3n^2 + 3n + 1)}{3n^2 + 3n + 1} = 3n + 1$$

Do đó: $A = (3.1+1) + (3.2+1) + (3.3+1) + \dots + (3.5+1)$

$$= 3(1+2+3+\dots+50) + 50 = 3875.$$

11.14. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 6$.

Tính $P = x^{2020} + y^{2020} + z^{2020}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết chuyển về, ta có:

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + y^2 - 2 + \frac{1}{y^2} + z^2 - 2 + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{x} \\ y = \frac{1}{y} \\ z = \frac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{2020} = 1 \\ y^{2020} = 1 \\ z^{2020} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = 1 + 1 + 1 = 3.$$

11.15. Rút gọn biểu thức: $B = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta tách từng phân thức thành hiệu của hai phân thức rồi dùng phương pháp khử liên tiếp, ta được:

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\text{Do đó } B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

11.16. Cho biểu thức $A = \frac{2x-1}{3x-1} + \frac{5-x}{3x+1}$ (với $x \neq \pm \frac{1}{3}$)

Tính giá trị biểu thức A biết rằng $10x^2 + 5x = 3$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Ta có: } A = \frac{(2x-1)(3x+1) + (5-x)(3x-1)}{(3x-1)(3x+1)}$$

$$= \frac{6x^2 + 2x - 3x - 1 + 15x - 5 - 3x^2 + x}{9x^2 - 1}$$

$$= \frac{3x^2 + 15x - 6}{9x^2 - 1} = \frac{3(x^2 - 5x - 2)}{9x^2 - 1} \quad (1)$$

Từ điều kiện $10x^2 + 5x + 3 = 0 \Rightarrow 5x = -3 - 10x^2$ thay vào (1) ta có:

$$A = \frac{3(x^2 + 3 - 10x^2 - 2)}{9x^2 - 1} = \frac{3(1 - 9x^2)}{9x^2 - 1} = -3$$

11.17. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{2x+3y}{xy+2x-3y-6} - \frac{6-xy}{xy+2x+3y+6} - \frac{x^2+9}{x^2-9}$.

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{2x+3y}{x(y+2)-3(y+2)} - \frac{6-xy}{x(y+2)+3(y+2)} - \frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{2x+3y}{(y+2)(x-3)} - \frac{6-xy}{(y+2)(x+3)} - \frac{x^2+9}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{(2x+3y)(x+3) - (6-xy)(x-3) - (x^2+9)(y+2)}{(x-3)(x+3)(y+2)} \\ &= \frac{2x^2+6x+3xy+9y-6x+18+x^2y-3xy-x^2y-2x^2-2y-18}{(x-3)(x+3)(y+2)} \\ &= \frac{0}{(x-3)(x+3)(y+2)} = 0 \end{aligned}$$

11.18. Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau, tính.

$$S = \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ac}{(a-b)(b-c)}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ac}{(a-b)(b-c)} \\ &= \frac{ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

Xét tử thức, ta có:

$$\begin{aligned} &ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a) \\ &= ab(a-b)+b^2c-bc^2+ac^2-a^2c \\ &= ab(a-b)-c(a+b)(a-b)+c^2(a-b) \\ &= (a-b)(ab-ac-bc+c^2) \\ &= (a-b)(b-c)(a-c) = -(a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1.$$

11.19. Rút gọn

a) $A = \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} + \frac{1}{x^2+15x+56};$

$$\text{b) } B = \frac{2}{x^2 + 4x + 3} + \frac{4}{x^2 + 10x + 21} + \frac{3}{x^2 + 17x + 70}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} + \frac{1}{(x+7)(x+8)} \\ &= \frac{1}{(x+4)} - \frac{1}{(x+5)} + \frac{1}{(x+5)} - \frac{1}{(x+6)} + \frac{1}{(x+6)} - \frac{1}{(x+7)} + \frac{1}{(x+7)} - \frac{1}{(x+8)} \\ &= \frac{1}{(x+4)} - \frac{1}{(x+8)} = \frac{4}{(x+4)(x+8)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{4}{(x+3)(x+7)} + \frac{3}{(x+7)(x+10)} \\ B &= \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+3)} + \frac{1}{(x+3)} - \frac{1}{(x+7)} + \frac{1}{(x+7)} - \frac{1}{(x+10)} \\ B &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10} = \frac{9}{(x+1)(x+10)}. \end{aligned}$$