

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 2 - LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 2-3: SO SÁNH HAI LŨY THỪA BẰNG PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH TRỰC TIẾP VÀ PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH GIÁN TIẾP

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Quy tắc so sánh:

+ Ta biến đổi hai lũy thừa cần so sánh thành các lũy thừa hoặc cùng cơ số hoặc cùng số mũ để so sánh. Nếu 2 lũy thừa cùng cơ số (lớn hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^m > a^n (a > 1) \Leftrightarrow m > n$$

Nếu 2 lũy thừa cùng cơ số (nhỏ hơn 1) thì lũy thừa nào có số mũ lớn hơn sẽ nhỏ hơn.

$$a^m > a^n (a < 1) \Leftrightarrow m < n$$

Nếu 2 lũy thừa cùng số mũ (lớn hơn 0) thì lũy thừa nào có cơ số lớn hơn sẽ lớn hơn.

$$a^n > b^n (n > 0) \Leftrightarrow a > b$$

Khi cơ số bằng 1, thì hai lũy thừa bằng nhau với mọi số mũ tự nhiên

+ Để so sánh 2 lũy thừa A và B, ta tìm một lũy thừa M sao cho $A < M < B$ hoặc $A > M > B$

Trong đó A và M ; M và B có thể so sánh trực tiếp được

+ Để so sánh hai lũy thừa A và B , ta tìm hai lũy thừa X và Y sao cho: $A < X < Y < B$

Hoặc $A > X > Y > B$

Trong đó các lũy thừa A và X ; X và Y ; Y và B có thể so sánh trực tiếp được.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Biến đổi về cùng cơ số hoặc số mũ

Bài 1: Hãy so sánh:

a. 16^{19} và 8^{25}

b. 27^{11} và 81^8 .

Lời giải:

a) Phân tích: Ta nhận thấy, ở câu a) thì 16 và 8 là các cơ số liên quan tới lũy thừa cơ số 2, ở câu b) thì 27 và 81 liên quan tới lũy thừa cơ số 3. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số, rồi dựa vào so sánh số mũ để so sánh chúng với nhau.

b) Lời giải:

a) Ta có $16^{19} = (2^4)^{19} = 2^{76}; 8^{25} = (2^3)^{25} = 2^{75}$

Vì $2^{76} > 2^{75} \Rightarrow 16^{19} > 8^{25}$

b) Ta có

$$\left. \begin{array}{l} 81^8 = (3^4)^8 = 3^{32} \\ 27^{11} = (3^3)^{11} = 3^{33} \end{array} \right\} \Rightarrow 81^8 < 27^{11}$$

Bài 2: Hãy so sánh:

a. 128^7 và 4^{24}

b. 5^{36} và 11^{24}

c. 32^{60} và 81^{50}

d. 3^{500} và 7^{300} .

Lời giải:

a) Ta có :

a) Ta có :

$$128^7 = (2^7)^7 = 2^{49}$$

$$4^{24} = (2^2)^{24} = 2^{48}$$

Vì $2^{49} > 2^{48}$

Nên $128^7 > 4^{24}$

b) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 5^{36} = 125^{12} \\ 11^{24} = 121^{12} \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{36} > 11^{24}$$

c) Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} 32^{60} = 2^{300} = 8^{100} \\ 81^{50} = 3^{200} = 9^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 32^{60} < 81^{50}$$

d) Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 3^{500} = 243^{100} \\ 7^{300} = 343^{100} \end{array} \right\} \Rightarrow 3^{500} < 7^{300}$$

Bài 3: Hãy so sánh:

a) 16^{19} và 8^{25}

b) 625^5 và 125^7 .

Lời giải:

a) Ta có: $16^{19} = (2^4)^{19} = 2^{76}; 8^{25} = (2^3)^{25} = 2^{75}$

Vì $2^{76} > 2^{75} \Rightarrow 16^{19} > 8^{25}$

b) Ta có: $625^5 = (5^4)^5 = 5^{20}; 125^7 = (5^3)^7 = 5^{21}$

Vì $5^{20} < 5^{21} \Rightarrow 625^5 < 125^7$

Bài 4: Hãy so sánh:

a) 3^{210} và 2^{350}

b) 2^{31} và 3^{21}

c) 4^{30} và 3.24^{10} .

Lời giải:

a) Ta có:

$$3^{210} = 27^{70}$$

$$2^{350} = 32^{70}$$

$$\Rightarrow 3^{210} < 2^{350}$$

b) Ta có:

$$2^{31} = 2.2^{30} = 2.8^{10}$$

$$3^{21} = 3.3^{20} = 3.9^{10}$$

$$\Rightarrow 3^{21} > 2^{31}$$

c) Ta có:

$$4^{30} = 2^{30}.2^{30} = (2^3)^{10}.(2^2)^{15} = 8^{10}.4^{15} > 8^{10}.3^{15}$$

$$3.24^{10} = 3.(3.8)^{10} = 8^{10}.3^{11}$$

$$\text{Mà } 8^{10}.3^{15} > 8^{10}.3^{11} \quad \text{nên } 8^{10}.4^{15} > 8^{10}.3^{11} \quad \text{hay } 4^{30} > 3.24^{10}$$

Bài 5: Chứng minh rằng $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

Lời giải:

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} 5^{27} = 125^9 \\ 2^{63} = (2^7)^9 = 128^9 \end{array} \right\} \Rightarrow 5^{27} < 2^{63} (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^{63} = (2^9)^7 = 312^7 \\ 5^{28} = (5^4)^7 = 625^7 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^{63} < 5^{28} (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Bài 6: Hãy so sánh:

a) 3^{2n} và $2^{3n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$

b) 5^{300} và 3^{500} .

Lời giải:

a) Phân tích: Ta nhận thấy, ở câu a) thì các lũy thừa có chung số mũ n, ở câu c) thì các lũy thừa có chung số mũ 100. Do đó để so sánh, ta biến đổi các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số hoặc số mũ, rồi dựa vào so sánh cơ số để so sánh chúng với nhau.

b) Lời giải:

a) Ta có:

$$3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$$

$$2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$$

$$9 > 8$$

mà

$$\Rightarrow 3^2 > 2^3$$

$$\text{Vậy } 3^{2n} > 2^{3n}$$

b) Ta có:

$$5^{300} = (5^3)^{100} = 125^{100}$$

$$3^{500} = (3^3)^{100} = 243^{100}$$

$$\Rightarrow 5^{300} < 3^{500}$$

Bài 7: Hãy so sánh:

a) $3^{2n(n+2)}$ và $9^{(n+1)^2}$

b) 256^n và 16^{n+5} (với $n \in \mathbb{N}$)

Lời giải:

a) Ta có:

$$3^{2n(n+2)} = 9^{n(n+2)} = 9^{n^2+2n}$$

$$9^{(n+1)^2} = 9^{n^2+2n+1}$$

$$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$$

$$\Rightarrow 9^{(n+1)^2} > 9^{n(n+2)}$$

$$\Rightarrow 9^{(n+1)^2} > 3^{2n(n+2)} (\forall n \in \mathbb{N})$$

b) Ta có $256^n = 16^{2n}$, suy ra bài toán trở thành so sánh $2n$ và $n+5$

+) Nếu $2n > n+5 \Leftrightarrow n > 5 \Rightarrow 256^n > 16^{2n}$

+) Nếu $2n = n+5 \Leftrightarrow n = 5 \Rightarrow 256^n = 16^{2n}$

+) Nếu $2n < n+5 \Leftrightarrow n < 5 \Rightarrow 256^n < 16^{2n}$

Bài 8: Hãy so sánh $3 \cdot 27^5$ và 243^5 .

Lời giải:

Ta có:

$$243^5 = (3^5)^5 = 3^{25}$$

$$3 \cdot 27^5 = 3 \cdot (3^3)^5 = 3 \cdot 3^{15} = 3^{16}$$

$$\text{Vì } 3^{16} < 3^{25} \Rightarrow 3 \cdot 27^5 < 243^5$$

Dạng 2: Đưa về một tích trong đó có thừa số giống nhau

Bài 1: Hãy so sánh 202^{303} và 303^{202} .

Lời giải:

Ta có: $202^{303} = (2.101)^{303} = 2^{303} \cdot 101^{303} = 2^{303} \cdot 101^{3 \cdot 101} = 8^{101} \cdot 101^{3 \cdot 101} = 8^{101} \cdot 101^{101} \cdot 101^{2 \cdot 101}$

$$303^{202} = (3.101)^{2 \cdot 101} = 3^{2 \cdot 101} \cdot 101^{2 \cdot 101} = 9^{101} \cdot 101^{2 \cdot 101}$$
$$\Rightarrow 202^{303} > 303^{202}$$

Bài 2: Hãy so sánh 21^{15} và $27^5 \cdot 49^8$.

Lời giải:

Ta có:

$$21^{15} = 3^{15} \cdot 7^{15}$$
$$27^5 \cdot 49^8 = 3^{15} \cdot 7^{16}$$

$$7^{15} < 7^{16}$$

Mà

$$21^{15} < 27^5 \cdot 49^8$$

Vậy

Bài 3: Hãy so sánh $2015^{2015} - 2015^{2014}$ và $2015^{2016} - 2015^{2015}$.

Lời giải:

Ta có:

$$2015^{2015} - 2015^{2014} = 2015^{2014} (2015 - 1) = 2014 \cdot 2015^{2014}$$
$$2015^{2016} - 2015^{2015} = 2014 \cdot 2015^{2015}$$

$$2015^{2015} > 2015^{2014}$$

Mà

$$\Rightarrow 2015^{2016} - 2015^{2015} > 2015^{2015} - 2015^{2014}$$

Bài 4: Hãy so sánh $2015^{10} + 2015^9$ và 2016^{10} .

Lời giải:

Ta có:

$$2015^{10} + 2015^9 = 2015^9 (2015 + 1) = 2016 \cdot 2015^9$$
$$2016^{10} = 2016 \cdot 2016^9$$

$$2015 < 2016$$

Mà

$$\Rightarrow 2016^{10} > 2015^{10} + 2015^9$$

Bài 5: Hãy so sánh $A = 72^{45} - 72^{44}$ và $B = 72^{44} - 72^{43}$.

Lời giải:

Ta có: $A = 72^{44}(72 - 1) = 72^{44} \cdot 71$

$$B = 72^{43}(72 - 1) = 72^{43} \cdot 71 \Rightarrow A > B$$

Mà $44 > 43$

$$\Rightarrow A > B$$

Bài 6: Hãy so sánh 37^{75} và 71^{50} .

Lời giải:

Ta có: $71^{50} < 72^{50} = (8 \cdot 9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (1)$

$$37^{75} > 36^{75} = (4 \cdot 9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

$$\text{Mà } 2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3) suy ra $37^{75} > 71^{50}$

Bài 7: Hãy so sánh:

a) 5^{23} và $6 \cdot 5^{22}$

b) $7 \cdot 2^{13}$ và 2^{16}

c) 15^{12} và $81^3 \cdot 125^5$.

Lời giải:

a) Phân tích: Ta nhận thấy trong các số lũy thừa cần so sánh thì số mũ của chúng đều không có ước chung, hoặc cơ số của chúng không thể biểu diễn dưới dạng chung một cơ số. Do đó việc đưa các lũy thừa về các lũy thừa có cùng cơ số (hoặc số mũ) để so sánh có vẻ không khả quan. Tuy nhiên các cơ số trong các lũy thừa đều có ước chung, nên việc tách các lũy thừa thành tích, để xuất hiện thừa số chung rồi so sánh thừa số riêng có vẻ khả quan. Để làm được điều này ta cần dùng phương pháp sau: Biến đổi a^n về dạng $c \cdot d^k$, biến đổi b^m về dạng $e \cdot d^k$ rồi so sánh hai số e và c. Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m .

b) Lời giải:

a) Ta có: $5^{23} = 5 \cdot 5^{22} < 6 \cdot 5^{22}$

$$\Rightarrow 6.5^{22} > 5^{23}$$

b) Ta có: $7.2^{13} < 8.2^{13} = 2^3.2^{13} = 2^{16}$

$$\Rightarrow 2^{16} > 7.2^{13}$$

$$81^3.125^3 = (3^4)^3.(5^3)^3 = 15^{12}.5^3$$

c) Ta có:

$$15^{12}.5^3 > 15^{12}$$

$$\Rightarrow 81^3.125^3 > 15^{12}$$

c) Nhận xét: Việc phân tích lũy thừa thành tích các lũy thừa sẽ giúp nhìn ra thừa số chung của các lũy thừa, từ đó việc so sánh hai lũy thừa chỉ còn dựa vào việc so sánh các thừa số riêng.

Bài 8: Hãy so sánh 99^{20} và 9999^{10} .

Lời giải:

Ta có:

$$99^{20} = (99^2)^{10} = (99.99)^{10}$$

$$9999^{10} = (99.101)^{10}$$

$$(99.99)^{10} < (99.101)^{10}$$

Vì

$$99^2 < 9999^{10}$$

Nên

Bài 9: Hãy so sánh:

a) 8^5 và 3.4^7

b) 10^{10} và 48.50^5 .

Lời giải:

a) Ta có: $8^5 = 2^{15} = 2.2^{14}$

$$3.4^7 = 3.2^{14}$$

Vì $2 < 3$

Nên $2.2^{14} < 3.2^{14}$

Vậy $8^5 < 3.4^7$

b) Ta có: $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$
 $48 \cdot 50^5 = (3 \cdot 2^4) \cdot (2^5 \cdot 5^{10}) = 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$

Vì $2 < 3$

Nên $2 \cdot 2^9 \cdot 5^{10} < 3 \cdot 2^9 \cdot 5^{10}$
 $\Rightarrow 10^{10} < 48 \cdot 50^5$

Bài 10: Hãy so sánh 4^{30} và $3 \cdot 24^{10}$.

Lời giải:

Ta có: $4^{30} = (2^2)^{30} = (2 \cdot 2)^{30} = 2^{30} \cdot 2^{30} = (2^3)^{10} \cdot (2^2)^{15} = 8^{10} \cdot 4^{15}$
 $24^{10} \cdot 3 = (8 \cdot 3)^{10} \cdot 3 = 8^{10} \cdot 3^{10} \cdot 3 = 8^{10} \cdot 3^{11}$

$3^{11} < 4^{15} \Rightarrow 8^{10} \cdot 3^{11} < 8^{10} \cdot 4^{15} \Rightarrow 4^{30} > 3 \cdot 24^{10}$
 Vì

Bài 11: Hãy so sánh $1990^{10} + 1990^9$ và 1991^{10} .

Lời giải:

Ta có: $1990^{10} + 1990^9 = 1990^9 (1990 + 1) = 1991 \cdot 1990^9$
 $1991^{10} = 1991 \cdot 1991^9$

$1990^9 < 1991^9 \Rightarrow 1990^{10} + 1990^9 < 1991^{10}$
 Vì

Bài 12: Hãy so sánh $78^{12} - 78^{11}$ và $78^{11} - 78^{10}$.

Lời giải:

Ta có: $78^{12} - 78^{11} = 78^{11} (78 - 1) = 78^{11} \cdot 77$
 $78^{11} - 78^{10} = 78^{10} (78 - 1) = 78^{10} \cdot 77$

$78^{11} > 78^{10} \Rightarrow 78^{11} \cdot 77 > 78^{10} \cdot 77 \Rightarrow 78^{12} - 78^{11} > 78^{11} - 78^{10}$
 Vì

Dạng 3: So sánh thông qua một lũy thừa trung gian

I. Phương pháp giải: Để so sánh 2 lũy thừa A và B , ta tìm một lũy thừa M sao cho $A < M < B$ hoặc $A > M > B$

Trong đó A và M ; M và B có thể so sánh trực tiếp được

II. Bài toán

Bài 1: Hãy so sánh $2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$ và $3 \cdot 24^{10}$.

Lời giải:

$$4^{30} = (2^2)^{30} = (2 \cdot 2)^{30} = 2^{30} \cdot 2^{30} = (2^3)^{10} \cdot (2^2)^{15} > 8^{10} \cdot 3^{15} > 8^{10} \cdot 3^{10} \cdot 3 = (8 \cdot 3)^{10} \cdot 3 = 24^{10} \cdot 3$$

Ta có:

$$\text{Vậy } 2^{30} + 3^{30} + 4^{30} > 3 \cdot 24^{10}$$

Bài 2: Hãy so sánh:

a) 2^{225} và 3^{151}

b) 199^{20} và 2003^{15}

c) 2^{91} và 5^{36} .

Lời giải:

$$2^{225} = (2^3)^{75} = 8^{75} < 9^{75} = (3^2)^{75} = 3^{150} < 3^{151}$$

A
 M
 B

a) Ta có

$$\Rightarrow 2^{225} < 3^{151}$$

b) Ta có:

$$199^{20} < 200^{20} = (8 \cdot 25)^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = (2^3 \cdot 5^2)^{20} = 2^{60} \cdot 5^{40};$$

$$2003^{15} > 2000^{15} = (16 \cdot 125)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = (2^4 \cdot 5^3)^{15} = 2^{60} \cdot 5^{45}$$

$$\Rightarrow 2^{60} \cdot 5^{45} > 2^{60} \cdot 5^{40} \Rightarrow 2003^{15} > 199^{20}$$

$$2^{91} > 2^{90} = (2^5)^{18} = 32^{18} > 25^{18} = 5^{36}$$

A
 M
 B

c) Ta có:

$$\Rightarrow 2^{91} > 5^{36}$$

Bài 3: Hãy so sánh:

a) 99^{20} và $9^{10} \cdot 11^{30}$

b) 961^{42} và 100.23^{93} .

Lời giải:

a) Ta có $99^{20} = [(99)^2]^{10} = 9801^{10} < (22^3)^{10} = 22^{30}$

$$22^{30} = (2.11)^{30} = 2^{30} \cdot 11^{30} = 8^{10} \cdot 11^{30}$$

mà $8^{10} \cdot 11^{30} < 9^{10} \cdot 11^{30}$

Nên $99^{20} < 9^{10} \cdot 11^{30}$

b) Ta có:

$$961^{42} < 1000^{42} = 10^{126} = 100 \cdot 10^{124}$$

$$100 \cdot 10^{124} = 100 \cdot (10^4)^{31} < 100 \cdot (23^3)^{31} = 100 \cdot 23^{93}$$

$$\Rightarrow 961^{42} < 100 \cdot 23^{93}$$

Bài 4: Hãy so sánh:

a) 107^{50} và 73^{75}

b) 33^{39} và 11^{21} .

Lời giải:

a) Ta có

$$107^{50} < 108^{50} = (4.27)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{150}$$

$$73^{75} > 72^{75} = (8.9)^{75} = 2^{225} \cdot 3^{150}$$

$$\Rightarrow 73^{75} > 107^{50}$$

b) Ta có:

$$3^{39} < 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}$$

$$11^{21} > 11^{20} = (11^2)^{10} = 121^{10}$$

$$\Rightarrow 11^{21} > 3^{39}$$

Bài 5: Chứng tỏ rằng: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.

Lời giải:

Gợi ý: Hãy chứng tỏ $5^{27} < 2^{63}$ và $2^{63} < 5^{28}$

$$2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$$

Ta có:

$$5^{27} = (5^3)^9 = 125^9$$

$$\Rightarrow 2^{63} > 5^{27} \quad (1)$$

$$2^{63} = (2^7)^9 = 128^9$$

Lại có:

$$5^{28} = (5^4)^7 = 625^7$$

$$\Rightarrow 2^{63} < 5^{28} \quad (2)$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow 5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$

Bài 6: Hãy so sánh 37^{75} và 71^{50} .

Lời giải:

a) Phân tích: Biến đổi a^n về dạng cd^k , biến đổi b^m về dạng $e.d^k$ rồi so sánh hai số e và c . Từ đó so sánh được hai số a^n và b^m .

b) Lời giải:

$$71^{50} < 72^{50} = (8.9)^{50} = 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (1)$$

Ta có:

$$37^{75} > 36^{75} = (4.9)^{75} = 2^{150} \cdot 3^{150} \quad (2)$$

$$2^{150} \cdot 3^{150} > 2^{150} \cdot 3^{100} \quad (3)$$

Mà

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow 37^{75} > 71^{50}$

Bài 7: Hãy so sánh:

a) 50^{20} và 2550^{10}

b) 999^{10} và 999999^5 .

Lời giải:

$$50^{20} = \left[(50)^2 \right]^{10} = 2500^{10} < 2550^{10} \Rightarrow 50^{20} < 2550^{10}$$

a) Ta có

$$999^{10} = \left[(999)^2 \right]^5 < 998001^5 < 999999^5 \Rightarrow 999^{10} < 999999^5$$

b) Ta có

Bài 8: Hãy so sánh $A = 1234^{56789}$ và $B = 56789^{1234}$.

Lời giải:

$$A = 1234^{56789} > 1000^{50000} = 10^{150000}$$

$$\text{Ta có } B = 56789^{1234} < 100000^{2000} = 10^{10000}$$

$$\text{Vì } 10^{10000} < 10^{150000} \Rightarrow 56789^{1234} < 1234^{56789}$$

Bài 9: Hãy so sánh 11^{1979} và 37^{1320} .

Lời giải:

Ta có

$$11^{1979} < (11^3)^{660} = 1331^{660}$$

$$37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660}$$

$$\text{vì } 1331^{660} < 1369^{660}$$

$$\text{Nên } 11^{1979} < 37^{1320}$$

Dạng 4: So sánh thông qua hai lũy thừa trung gian

I. Phương pháp giải: Để so sánh hai lũy thừa A và B , ta tìm hai lũy thừa X và Y sao cho:
 $A < X < Y < B$

$$\text{Hoặc } A > X > Y > B$$

Trong đó các lũy thừa A và X ; X và Y ; Y và B có thể so sánh trực tiếp được.

II. Bài toán

Bài 1: Hãy so sánh

$$\text{a) } 17^{20} \text{ và } 31^{15}$$

$$\text{b) } 199^{20} \text{ và } 100^{24}$$

$$\text{c) } 31^{11} \text{ và } 17^{14}$$

Lời giải:

$$17^{20} > 16^{20} = 2^{80} > 2^{75} = (2^5)^{15} = 32^{15} > 31^{15}$$

A X Y B

a) Ta có:

b) Ta có:

$$199^5 < 200^5 = 2^5 \cdot 100^5 = 32 \cdot 100^5 (1)$$

$$100^6 = 100 \cdot 100^5 (2)$$

$$\Rightarrow 199^5 < 100^6$$

$$\Rightarrow (199^5)^4 < (100^6)^4$$

$$\Rightarrow 199^{20} < 100^{24}$$

Từ (1) và (2)

c) Ta có:

$$31^{11} < 32^{11} = 2^{55}$$

$$17^{14} < 16^4 = (2^4)^{14} = 2^{56}$$

$$\Rightarrow 31^{11} < 17^{14}$$

Bài 2: Hãy so sánh

a) 11^{1979} và 37^{1321}

b) 107^{50} và 51^{75}

c) 3^{201} và 6^{119} .

Lời giải:

a) Ta có:

$$11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660}$$

$$37^{1321} > 37^{1320} = (37^2)^{660} = 1369^{660}$$

$$\Rightarrow 1331^{660} < 1369^{660}$$

$$\Rightarrow 11^{1979} < 37^{1321}$$

b) Ta có:

$$107^{50} < 150^{50} = (3 \cdot 50)^{50} = 9^{25} \cdot 50^{50} < 50^{25} \cdot 50^{50} = 50^{75} < 51^{75}$$

c) Ta có:

$$3^{201} > 3^{200} = (3^5)^{40} = 243^{40}; 6^{119} < 6^{120} = (6^3)^{40} = 216^{40} \Rightarrow 3^{201} > 6^{119}$$

Bài 3: Chứng minh rằng $2^{1995} < 5^{863}$.

Lời giải:

a) Phân tích: Xét a^n biến đổi được về dạng $c^q \cdot d^k$ và b^m biến đổi được về dạng $e^p \cdot g^h$

Nếu $c^q < e^p$ và $d^k < g^h$ thì $c^q.d^k < e^p.g^h$

b) Lời giải:

$$2^{1995} = 2^{1990} \cdot 2^5; 5^{863} = 5^{860} \cdot 5^3$$

Ta có:

Nhận xét: $2^5 = 32 < 5^3 = 125$ nên cần so sánh 2^{1990} và 5^{860}

$$2^{10} = 1024; 5^5 = 3025 \Rightarrow 2^{10} \cdot 3 < 5^5 \Rightarrow 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860}$$

Ta có:

Lại có $2^{1990} = 2^{1720} \cdot 2^{270}$, cần so sánh $2^{1720} \cdot 2^{270}$ với số $2^{1720} \cdot 3^{172}$ như sau:

$$3^7 = 2187; 2^{11} = 2048 \Rightarrow 3^7 > 2^{11} \quad 3^{172} = (3^7)^{24} \cdot 3^4 > (2^{11}) \cdot 2^4 > (2^{11}) \cdot 2^6 = 2^{270}$$

$$\text{Do đó } 2^{1720} \cdot 2^{270} < 2^{1720} \cdot 3^{172} < 5^{860} \Rightarrow 2^{1990} < 5^{860}$$

$$\text{Mà } 2^5 < 5^3 \Rightarrow 2^{1995} < 5^{863}$$

Bài 4: Chứng minh rằng $2^{1999} < 7^{714}$.

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{cases} 2^{10} = 1025 \\ 7^3 = 343 \end{cases} \Rightarrow 2^{10} < 3 \cdot 7^3 \Rightarrow (2^{10})^{238} < 3^{238} \cdot (7^3)^{238} \Rightarrow 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714}; \begin{cases} 2^8 = 256 \\ 3^5 = 243 \end{cases} \Rightarrow 3^5 < 2^8$$

$$\begin{cases} 3^{238} = 3^3 \cdot 3^{235} = 3^3 \cdot (3^5)^{47} < 3^3 \cdot (2^8)^{47} < 2^5 \cdot 2^{376} = 2^{381} \Rightarrow 3^{238} < 2^{381} \\ 2^{2380} < 3^{238} \cdot 7^{714} \end{cases} \Rightarrow 2^{2380} < 2^{381} \cdot 7^{714} \Rightarrow 2^{1999} < 7^{714}$$

Mà:

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1. Không tính kết quả của biểu thức, hãy so sánh (Trích đề thi HSG Hoa Lư)

a) $A = 2019 \cdot 2021$ và $B = 2020^2$

b) $M = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$ và $N = \frac{10^{2022} + 1}{10^{2023} + 1}$.

Lời giải:

a) $A = 2019 \cdot 2021 = 2019 \cdot (2020 + 1) = 2019 \cdot 2020 + 2019$

$$B = 2020^2 = 2020 \cdot 2020 = 2020 \cdot (2019 + 1) = 2020 \cdot 2019 + 2020$$

Vì $2019 > 2020$

Nên $A > B$

$$\text{b) } 10M = 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1}$$

$$10N = 1 + \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{9}{10^{2022} + 1} > \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

$$\text{Nên } 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1} > 1 + \frac{9}{10^{2023} + 1}$$

Vậy $M > N$

Bài 2: Chứng minh rằng $B = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}} - \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{16}$ (Trích đề thi HSG thị xã Hoài Nhơn).

Lời giải:

$$B = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2021}{3^{2021}} - \frac{2022}{3^{2022}}$$

$$\Rightarrow 3B = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2021}{3^{2020}} - \frac{2022}{3^{2021}}$$

$$\Rightarrow 4B = B + 3B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} - \frac{2022}{3^{2021}}$$

$$\text{Đặt } A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} - \frac{1}{3^{2021}}$$

$$\Rightarrow 3A = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2019}} - \frac{1}{3^{2020}}$$

$$4A = A + 3A = 3 - \frac{1}{3^{2021}} < 3$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow 4B < A < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow B < \frac{3}{16}$$

Bài 3: Cho $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{101}}$. Chứng tỏ $M < 1$

Lời giải:

Ta có $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}}$

$$M = 2M - M = 1 - \frac{1}{2^{101}}$$

Mà $M = 1 - \frac{1}{2^{101}} < 1 \Rightarrow M < 1$

: So sánh : $A = \frac{29^{30} + 1}{29^{31} + 1}$ với $B = \frac{29^{31} + 1}{29^{32} + 1}$

Bài 4

Lời giải:

Ta có $29A = \frac{29^{31} + 1 + 28}{29^{31} + 1} = 1 + \frac{28}{29^{31} + 1} \quad (1)$

$$29B = \frac{29^{32} + 1 + 28}{29^{32} + 1} = 1 + \frac{28}{29^{32} + 1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $29A > 29B$

Nên $A > B$

Bài 5: Chứng minh rằng $S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 2$ (Trích đề thi HSG Quảng Trạch).

Lời giải:

Ta có

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

...

$$\frac{1}{50^2} < \frac{1}{49.50} = \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50}\right)$$

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 2 - \frac{1}{50}$$

$$\text{Mà } 2 - \frac{1}{50} < 2$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < 2$$

Bài 6: Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{100} - 1}$. Chứng minh $50 < A < 100$.

Lời giải:

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}+1} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1}\right)$$

Có 99 nhóm trong tổng của A

$$A < 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{99}} + \dots + \frac{1}{2^{99}}\right)$$

$$A < 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 100$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{99}+1} + \frac{1}{2^{100}+2} + \dots + \frac{1}{2^{100}-1} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

Có 99 nhóm trong tổng của A

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}} + \dots + \frac{1}{2^{100}} + \frac{1}{2^{100}}\right) - \frac{1}{2^{100}}$$

$$A > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{100 \text{ số hạng}} - \frac{1}{2^{100}} = 1 + 50 - \frac{1}{2^{100}} > 50$$

Bài 7: Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$.

Lời giải:

Hướng dẫn : Đưa về dạng tổng $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ để tính tổng rồi so sánh.

Đặt $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6}$

$$\Rightarrow 2A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5}$$

$$\Rightarrow 2A + A = 3A = 1 - \frac{1}{2^6} = \frac{2^6 - 1}{2^6} < 1$$

$$\Rightarrow 3A < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{3}$$

Bài 8: Cho $B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$. Chứng minh $B < 100$.

Lời giải:

$$B = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}} = \frac{4}{3} + \frac{10}{3^2} + \frac{28}{3^3} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow B - 98 = \frac{4}{3} - 1 + \frac{10}{3^2} - 1 + \frac{28}{3^3} - 1 + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}} - 1 = \frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{28}{27} + \dots + \frac{3^{98} + 1}{3^{98}}$$

$$B - 98 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}}$$

$$\Rightarrow 3(B - 98) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{97}}$$

$$\Rightarrow 3(B - 98) - (B - 98) = 1 - \frac{1}{98}$$

$$\Rightarrow 2(B - 98) = \frac{97}{98} \Rightarrow B - 98 = \frac{97}{196} \Rightarrow B = 98 + \frac{97}{196} < 100$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>