

BÀI 7. CẤP SỐ NHÂN

CHƯƠNG 2. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT DÃY (u_n) LÀ CẤP SỐ NHÂN.

Chúng minh $\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n \cdot q$ trong đó q là một số không đổi.

Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $T = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

* T là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = T$.

* T phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

Câu 1. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2 \cdot 5^n$. Chứng minh rằng dãy số này là một cấp số nhân. Xác định số hạng đầu và công bội của nó.

Lời giải

Ta có $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{2 \times 5^n}{2 \times 5^{n-1}} = 5^1 = 5, \forall x \geq 2$ tức là $u_n = 5u_{n-1}$

Vậy (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 10$ và công bội $q = 5$

Câu 2. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Lời giải

Số vi khuẩn mỗi giờ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5000$ và công bội $q = 1.08$

Công thức tổng quát: $u_n = 5000 \times 1.08^{n-1}$

Sau 5 giờ số vi khuẩn là: $u_5 = 5000 \times 1.08^{5-1} = 5161$ (con vi khuẩn)

Câu 3. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Xác định công bội, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số nhân sau:

a) $1, 4, 16, \dots$;

b) $2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots$

Lời giải

a) Ta có: $4:1 = 4, 16:4 = 4$

Do đó công bội $q = 4$

Số hạng tổng quát: $u_n = 4^{n-1}$

Số hạng thứ 5: $u_5 = 4^{5-1} = 256$

Số hạng thứ 100: $u_{100} = 4^{100-1} = 4.017 \times 10^{59}$

b) Ta có: $\left(-\frac{1}{2}\right):2 = -\frac{1}{4}; \frac{1}{8}:\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

Do đó công bội $q = -\frac{1}{4}$

Số hạng tổng quát: $u_n = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Số hạng thứ 5: $u_5 = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{5-1} = \frac{1}{128}$

Số hạng thứ 100: $u_{100} = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{100-1} = -4.978 \times 10^{-60}$

Câu 4. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xem nó có phải là cấp số nhân không. Nếu nó là cấp số nhân, hãy tìm công bội q và viết công thức số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

a) $u_n = 5n$

b) $u_n = 5^n$;

c) $u_1 = 1, u_n = nu_{n-1}$;

d) $u_1 = 1, u_n = 5u_{n-1}$.

Lời giải

a) Năm số hạng đầu của dãy: 5; 10; 15; 20; 25

Ta có: $10:5 = 2 \neq 15:10 = \frac{3}{2}$ suy ra (u_n) không phải cấp số nhân

b) Năm số hạng đầu của dãy: 5; 25; 125; 625; 3125

Ta có $u_n = 5^n$ nên $u_{n+1} = 5^{n+1} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5 (\forall n \geq 2)$

Do đó (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$

Số hạng tổng quát: $u_n = 5 \times 5^{n-1}$

c) Năm số hạng đầu của dãy: 1; 2; 6; 24; 120

Ta có: $2:1 = 2 \neq 6:2 = 3$ nên (u_n) không phải là cấp số nhân

d) Năm số hạng đầu của dãy: 1; 5; 25; 125; 625

Ta có: $u_n = 5u_{n-1}$ nên $\frac{u_n}{u_{n-1}} = 5 (\forall n \geq 2)$

Do đó (u_n) là cấp số nhân với công sai $q = 5$

Số hạng tổng quát: $u_n = 5^{n-1}$

Câu 5. Xét trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bội của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$ b). $u_n = (-1)^n \cdot 5^{3n+2}$ c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$

Lời giải

a). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$

(không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$.

b). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n \cdot 5^{3n+2}} = -1.5^3 = -125$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -125$.

c). Ta có $u_2 = u_1^2 = 4$, $u_3 = u_2^2 = 16$, $u_4 = u_3^2 = 256$, suy ra $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$ và $\frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16$
 $\Rightarrow \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3}$. Do đó (u_n) không là cấp số nhân.

d). $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{u_n} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$. Do đó có:

$$u_1 = u_3 = u_5 = \dots = u_{2n+1} \dots \quad (1)$$

$$\text{Và } u_2 = u_4 = u_6 = \dots = u_{2n} = \dots \quad (2)$$

$$u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3 \quad (3)$$

Theo đề bài có
 Từ (1), (2), (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = \dots = u_{2n} = u_{2n+1} \dots$ Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Câu 6. Chứng minh rằng dãy số $(v_n): v_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Lời giải

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(-1)^{n+1} 3^{2(n+1)}}{(-1)^n 3^{2n}} = -9, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

. Vậy $(v_n): v_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$ là một cấp số nhân.

Câu 7. Giá trị của a để $\frac{-1}{5}; a; \frac{-1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{125}\right) = \frac{1}{625} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{25}$$

Câu 8. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải

$$\text{Vì có } v_n = u_n + 3 \quad (1) \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 3 \quad (2)$$

$$\text{Theo đề } u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3) \quad (3).$$

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1} = 4v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ (không đổi). Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 5$.

Câu 9. Cho $x, 3, y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4 = y\sqrt{3}$. Tìm x, y .

Lời giải

Ta có: $x \cdot y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{x}$

Thay vào $x^4 = y\sqrt{3} \Leftrightarrow x^4 = \frac{9}{x}\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = (\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = (\sqrt{3})^5 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow y = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.
 Kết luận $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG ĐẦU CÔNG BỘI, XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG THỨ K, TÍNH TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN:

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1 , giải hệ phương trình này tìm được q và u_1 .

Để xác định số hạng thứ k , ta sử dụng công thức: $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$.

Để tính tổng của n số hạng, ta sử dụng công thức: $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n$, do đó $S_n = nu_1$.

Câu 10. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một nhà máy tuyển thêm công nhân vào làm việc trong thời hạn ba năm và đưa ra hai phương án lựa chọn về lương như sau:

- Phương án 1: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 500 nghìn đồng.
- Phương án 2: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 5%.

Với phương án nào thì tổng lương nhận được sau ba năm làm việc của người công nhân sẽ lớn hơn?

Lời giải

Theo phương án 1, tiền lương mỗi quý sẽ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5 \times 3 = 15$, công sai $d = 0.5 \times 3 = 1.5$

Công thức tổng quát là: $u_n = 15 + 1.5(n - 1)$

Sau 3 năm làm việc (tương ứng với 12 quý) lương của người nông dân là:

$$\frac{12}{2} [2 \times 15 + (12 - 1) \times 1.5] = 279 \quad (\text{triệu đồng})$$

Theo phương án 2, tiền lương mỗi quý sẽ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5 \times 3 = 15$, công bội $q = 1.05$

Công thức tổng quát là: $u_n = 15 \times 1.05^{n-1}$

$$\frac{15(1 - 1.05^{12})}{1 - 1.05} = 238.757 \quad (\text{triệu đồng})$$

Sau 3 năm làm việc lương của người nông dân là:

Vậy theo phương án 1 thì tổng lương nhận được của người nông dân là cao hơn

Câu 11. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một cấp số nhân có số hạng thứ 6 bằng 96 và số hạng thứ 3 bằng 12. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số nhân này.

Lời giải

Gọi số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Ta có: $u_6 = u_1 \times q^5 = 96; u_3 = u_1 \times q^2 = 12$

$$\frac{u_1 q^5}{u_1 q^2} = \frac{96}{12} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$$

Nên $u_1 = 3$

Suy ra công thức số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = 3 \times 2^{n-1}$

$$\text{Vậy } u_{50} = 3 \times 2^{50-1} = 1.689 \times 10^{15}$$

Câu 12. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 5 và công bội bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số nhân này để có tổng bằng 5115?

Lời giải

Ta có số hạng tổng quát của dãy là $u_n = 5 \times 2^{n-1}$

$$5115 = S_n = \frac{5(1 - 2^n)}{1 - 2} = -5 + 5 \times 2^n \Rightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$$

Gọi n là số các số hạng cần lấy tổng:
 Vậy số các số hạng cần lấy tổng là 10

Câu 13. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá trị của chiếc máy ủi mỗi năm lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 3 và công bội $q = 0.8$.

Giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm sử dụng là: $u_5 = 3 \times 0.8^{5-1} = 0.1875$ (tỷ đồng)

Câu 14. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Lời giải

Dân số hằng năm lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 97 và công bội $q = 1.0091$

Dân số của quốc gia đó năm 2030 (tức $n = 11$) là $u_{11} = 97 \times 1.0091^{11-1} = 106.197$ (triệu người)

Câu 15. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50mg , và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kế trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải

Lượng thuốc trong máu mỗi ngày của bệnh nhân lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 50 và công bội $q = 0.5$

Tổng lượng thuốc trong máu 10 ngày liên tiếp chính là tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân này

$$S_n = \frac{50[1 - (0.5)^{10}]}{1 - 0.5} = 99.902(\text{mg})$$

và bằng:

Câu 16. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$\text{a) } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$$

Lời giải

$$a). \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q (1 + q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q (1 + q^4)}{u_1 (1 + q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{51}{1 + 2^4} = \frac{51}{17} = 3.$$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$

$$b). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 135 \\ u_1 q^3 + u_1 q^4 + u_1 q^5 = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2) = 135 \quad (*) \\ u_1 q^3 (1 + q + q^2) = 40 \quad (**) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q^3 (1 + q + q^2)}{u_1 (1 + q + q^2)} = \frac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{135}{1 + q + q^2} = \frac{1215}{19}.$$

Kết luận có công bội $q = \frac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1215}{19}$.

$$c). \begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 43 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 6 \quad (*) \\ u_1 (1 + q + q^2) = 43 \quad (**) \end{cases} \text{ . Lấy } \frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q}{u_1 (1 + q + q^2)} = \frac{6}{43}$$

$$\Leftrightarrow 43q = 6(1 + q + q^2) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = 6 \vee q = \frac{1}{6}$$

Với $q = 6 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $q = \frac{1}{6} \Rightarrow u_1 = 36$.

Kết luận $\begin{cases} q = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} q = \frac{1}{6} \\ u_1 = 36 \end{cases}$

Câu 17. Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

- Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.
- Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?
- Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

$$a). \text{ Ta có } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q (1 + q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q=2 \Rightarrow u_1=3$$

$$S_n = 3069 \Leftrightarrow u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 3069 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 3069 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n=10$$

b). Có . Kết luận tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 3069.

$$\text{c). Có } u_k = 12288 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 4096 = 2^{12} \\ \Rightarrow k-1=12 \Leftrightarrow k=13. \text{ Kết luận số 12288 là số hạng thứ 13.}$$

Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm u_1 và q, biết rằng:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2} \\ u_1 u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i=1, \dots, 5) \end{cases} & 2) & \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases} & 3) & \begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \\ 4) & u_1 + u_6 = 165; u_3 + u_4 = 60. & 5) & \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases} \\ 6) & \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} & 7) & \begin{cases} 8u_2 + 5\sqrt{5}u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189 \end{cases} & 8) & \begin{cases} u_1 u_2 u_3 = 1728 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases} \\ 9) & \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} & 10) & \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases} \end{aligned}$$

Lời giải

$$1). \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2} \\ u_1 u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i=1, \dots, 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 = \frac{35}{2} & (1) \\ u_1 u_1 \cdot q^4 = 25 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (u_1 \cdot q^2) = 5^2 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^2 = 5 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{q^2} \text{ thay vào (1) được:}$$

$$\frac{5}{q^2} (q + q^2 + q^3) = \frac{35}{2} \Leftrightarrow 2(1 + q + q^2) = 79 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } q=2 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{4}. \text{ Với } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 20.$$

$$2). \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^2 + u_1 q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 q^6 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 - q^2 + q^4) = 65 & (1) \\ u_1 (1 + q^6) = 325 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy: } \frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = \frac{325}{65} \Leftrightarrow \frac{(1+q^2)(1-q^2+q^4)}{1-q^2+q^4} = 5 \text{ (vì } 1+q^6 = 1+(q^2)^3) \\ \Leftrightarrow 1+q^2 = 5 \Leftrightarrow q^2 = 4 \Leftrightarrow q = \pm 2.$$

Với $q=2 \Rightarrow u_1 = \frac{65}{1-2^2+2^4} = 5$. Với $q=-2 \Rightarrow u_1 = \frac{65}{1-(-2)^2+(-2)^4} = 5$.

3).
$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^3 + u_1 \cdot q^5 = -42. \\ u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q(1+q^2+q^4) = -42 & (1) \\ u_1 \cdot q(1+q^2) = 20 & (2) \end{cases}$$

Lấy:
$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1+q^2+q^4}{q(1+q^2)} = -\frac{21}{10} \Leftrightarrow 10+10q^2+10q^4 = -21q-21q^3$$

$$\Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \Leftrightarrow 10q^2 + 21q + 10 + \frac{21}{q} + \frac{10}{q^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow 10\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 21\left(1 + \frac{1}{q}\right) + 10 = 0 \quad (*)$$

Đặt: $t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Leftrightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$. Điều kiện $|t| \geq 2$

$$(*) \Leftrightarrow 10(t^2 - 2) + 21t + 10 = 0 \Leftrightarrow 10t^2 + 21t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{2} \vee t = \frac{2}{5} \text{ (loại)}.$$

Với $t = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{1}{2} \vee q = -2$

$$q = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{20}{q^2 + q^4} = \frac{20}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4} = 64$$

• Nếu

• Nếu $q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{20}{q^2 + q^4} = \frac{20}{2^2 + 2^4} = 1$.

4). $u_1 + u_6 = 165; u_3 + u_4 = 60$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^5 = 165 \\ u_1 q^2 + u_1 q^3 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^5) = 165 & (1) \\ u_1 q^2(1+q) = 60 & (2) \end{cases}$$

Lấy
$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1+q^5}{q^2(1+q)} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{(1+q)(1-q+q^2-q^3+q^4)}{q^2(1+q)} = \frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(1-q+q^2-q^3+q^4) = 11q^2 \Leftrightarrow 4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4q^4}{q^2} - \frac{4q^3}{q^2} - \frac{7q^2}{q^2} - \frac{4q}{q^2} + \frac{4}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 4\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 4\left(q + \frac{1}{q}\right) - 7 = 0 \quad (*)$$

Đặt: $t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$. Điều kiện: $|t| \geq 2$.

$$(*) \Leftrightarrow 4(t^2 - 2) - 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)}.$$

Với $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$

$q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1+q^2} = \frac{165}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 160.$
 • với $q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1+q^5} = \frac{165}{1^2+2^5} = 5$ • với

5).
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 = 15 \\ u_1^2 + u_1^2 q^2 + u_1^2 q^4 + u_1 q^6 = 85. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2+q^3) = 15 \\ u_1^2(1+q^2+q^4+q^6) = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q+q^2+q^3)^2 = 15^2 & (1) \\ u_1^2(1+q^2+q^4+q^6) = 85 & (2). \end{cases}$$

Lấy
$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{[(1+q)+q^2(1+q)]^2}{(1+q^2)+q^4(1+q^2)} = \frac{45}{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(1+q)(1+q^2)]^2}{(1+q^2)+(1+q^4)} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1+q)^2(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1+2q+q^2)(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17}$$

$$\Leftrightarrow 17(1+q^2+2q+2q^3+q^2+q^4) = 45(1+q^4)$$

$$\Leftrightarrow 28q^4 - 34q^3 - 34q^2 - 34q + 28 = 0 \Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2} - \frac{34q^3}{q^2} - \frac{34q^2}{q^2} - \frac{34q}{q^2} + \frac{28}{q^2} = 0$$
 (vì dễ dàng thấy $q \neq 0$)

$$\Leftrightarrow 28q^2 - 34q - 34 - \frac{34}{q} + 28 = 0 \Leftrightarrow 14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$. Điều kiện: $|t| \geq 2$.

$$(*) \Leftrightarrow 14(t^2 - 2) - 17t - 17 = 0 \Leftrightarrow 14t^2 - 17t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{9}{7} \text{ (loại)}$$

$$t = \frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 1$. • với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{15}{1+q+q^2+q^3} = 8$.

6).
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 13 & (*) \\ u_1 q^3(1+q+q^2) = 351 & (**) \end{cases}$$

$$\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow u_1 = \frac{13}{1+q+q^2} = \frac{13}{1+3+9} = 1.$$

Lấy
$$\begin{cases} 8u_2 + 5\sqrt{5}u_5 = 0 & (1) \\ u_1^3 + u_3^3 = 189. \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8u_1 q - 5\sqrt{5}u_1 q^4 = 0 \\ u_1^3 + (u_1 q^2)^3 = 189. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 5\sqrt{5}q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ u_1^3(1+q^6) = 189 \Rightarrow u_1^3 = \frac{189}{1+q^6} = 125 \Rightarrow u_1 = 5. \end{cases}$$

$$8). \begin{cases} u_1 u_2 u_3 = 1728 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 u_1 q u_1 q^2 = 1728 \\ u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 q)^3 = 12^3 \\ u_1 (1 + q + q^2) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q = 12 \\ u_1 (1 + q + q^2) = 63 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{12}{q} \\ \frac{12}{q} (1 + q + q^2) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{12}{q} \\ 12q^2 - 51q + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 4 \Rightarrow u_1 = 3 \\ q = \frac{1}{4} \Rightarrow u_1 = 48. \end{cases}$$

$$9). \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q^2) = 3 \\ u_1^2 (1 + q^4) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 (1 + q^2)^2 = 9 \quad (*) \\ u_1^2 (1 + q^4) = 5 \quad (**) \end{cases}$$

$$\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{(1 + q^2)^2}{1 + q^4} = \frac{9}{5}. \text{ Lấy } t = q^2, t \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 5(1 + t)^2 = 9(1 + t^2) \Leftrightarrow 4t^2 - 10t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

$$\bullet q = \sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1 + q^2} = 1 \quad \bullet q = -\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1 + q^2} = 1$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1 + q^2} = 2 \quad \bullet q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1 + q^2} = 2.$$

$$10). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 7 \\ u_1^2 + (u_1 q)^2 + (u_1 q^2)^2 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2) = 7 \\ u_1^2 (1 + q^2 + q^4) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 (1 + q + q^2)^2 = 49 \quad (*) \\ u_1^2 (1 + q^2 + q^4) = 21 \quad (**) \end{cases} \quad \frac{(*)}{(**)} \text{ được:}$$

$$\frac{(1 + q + q^2)^2}{1 + q^2 + q^4} = \frac{49}{21} \Leftrightarrow 21(1 + q^2 + q^4 + 2q + 2q^2 + 2q^3) = 49(1 + q^2 + q^4)$$

$$\Leftrightarrow 21(1 + 2q + 3q^2 + 2q^3 + q^4) = 49(1 + q^2 + q^4) \Leftrightarrow 28q^4 - 42q^3 - 14q^2 - 42q + 28 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2} - \frac{42q^3}{q^2} - \frac{14q^2}{q^2} - \frac{42q}{q^2} + \frac{28}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 28q^2 - 42q - 14 - \frac{42}{q} + \frac{28}{q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 28\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 42\left(q + \frac{1}{q}\right) - 14 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2. \quad \text{Điều kiện: } |t| \geq 2$$

$$(2) \Leftrightarrow 28(t^2 - 2) - 42t - 14 = 0 \Leftrightarrow 28t^2 - 42t - 70 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -1 (\text{loại})$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

$$\bullet q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{7}{1+q+q^2} = 1 \quad \bullet q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{7}{1+q+q^2} = 4$$

Câu 19. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$\text{a) } \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 u_2 u_3 = 64 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a) } \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 72 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q (q^2 - 1) = 72 \quad (1) \\ u_1 q^2 (q^2 - 1) = 144 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (2):(1) được: $q = 2$, thay $q = 2$ vào (1) được $u_1 = 12$

$$\text{c) } \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 + u_1 q^4 = 90 \\ u_1 q - u_1 q^5 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 (1 + q^2) = 90 \quad (1) \\ u_1 q (1 - q^4) = 240 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q (1 - q^4)}{u_1 q^2 (1 + q^2)} = \frac{240}{90} \Leftrightarrow \frac{(1 - q^2)(1 + q^2)}{q(1 + q^2)} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1 - q^2}{q} = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3q^2 + 8q - 3 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \vee q = -3$$

Với $q = \frac{1}{3}$ thay vào (1) được $u_1 = 729$.

Với $q = -3$ thay vào (1) được $u_1 = 1$.

$$\text{d) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 u_2 u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 14 \\ u_1 u_1 q u_1 q^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2) = 14 \quad (1) \\ (u_1 q)^3 = 64 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow u_1 q = 4 \Rightarrow u_1 = \frac{4}{q} \quad \frac{4}{q} (1 + q + q^2) = 14$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 2$. Với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 8$.

$$\text{e) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2) = 21 \quad (1) \\ \frac{q^2 + q + 1}{u_1 q^2} = \frac{7}{12} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 1 + q + q^2 = \frac{21}{u_1} \quad \frac{21}{u_1} \cdot \frac{1}{u_1 q^2} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow (u_1 q)^2 = 36 \Leftrightarrow u_1 q = \pm 6$$

u_1 , thay vào (2):

Với $u_1 = \frac{6}{q}$ thay vào (1): $\frac{6}{q}(1+q+q^2)=21 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$

Nếu $q = 2 \Rightarrow u_1 = 3$. Nếu $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 12$

Với $u_1 = -\frac{6}{q}$ thay vào (1):

$$-\frac{6}{q}(1+q+q^2)=21 \Leftrightarrow 2q^2 + 9q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{-9+\sqrt{65}}{4} \vee q = \frac{-9-\sqrt{65}}{4}$$

Nếu $q = \frac{-9+\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \frac{27+3\sqrt{65}}{2}$. Nếu $q = \frac{-9-\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \frac{27-3\sqrt{65}}{2}$

$$f) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + u_1 q^3 = 30 \\ u_1^2 + u_1^2 q^2 + u_1^2 q^4 + u_1^2 q^6 = 340 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2+q^3)=30 \\ u_1^2(1+q^2+q^4+q^6)=340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q)(1+q^2)=30 \\ u_1^2(1+q^4)(1+q^2)=340 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q)^2(1+q^2)^2=900 & (1) \\ u_1^2(1+q^4)(1+q^2)=340 & (2) \end{cases}$$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{(1+q)^2(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17}$, quy đồng rút gọn được: $14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q + 14 = 0$

$$\Leftrightarrow 14q^2 - 17q - 17 - \frac{17}{q} + \frac{14}{q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0 \quad t = q + \frac{1}{q}, \text{ điều kiện } |t| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 - 17t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{9}{7} \text{ (loại)}.$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 2$. Với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 16$

Câu 20. Tìm a, b biết rằng: 1, a, b là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Lời giải

$$\text{Theo đề bài ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 1+b=2a \\ b^2=a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b=2a(1) \\ b=\pm a^2 \end{cases}$$

$$\text{Với } b=a^2 \text{ thay vào (1) được } 1+a^2=2a \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1$$

$$\text{Với } b=-a^2 \text{ thay vào (1) được } 1-a^2=2a \Leftrightarrow a^2+2a-1=0 \Leftrightarrow a=-1+\sqrt{2} \vee a=-1-\sqrt{2}$$

$$\square a = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow b = -(-1 + \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow b = -3 + 2\sqrt{2}$$

$$\square a = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow b = -(-1 - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow b = -3 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{Kết luận } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1+\sqrt{2} \\ b=-3+2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1-\sqrt{2} \\ b=-3-2\sqrt{2} \end{cases} \text{ thỏa yêu cầu đề bài.}$$

Câu 21. Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

Lời giải

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} S_n = 728 \\ u_n = 486 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = 728 \\ u_1 q^{n-1} = 486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^n = 728(1-q) \\ u_1 q^n = 486q \end{cases} \Rightarrow u_1 - 486q = 728(1-q) \Leftrightarrow u_1 = 2$$

Câu 22. Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1, u_2, u_3 thành lập cấp số cộng.

Theo đề bài: $u_1 + 2; u_2 + 3; u_3 + 9$ là ba số liên tiếp tạo thành cấp số nhân.

$$\text{Theo đề bài: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ u_1 + u_3 = 2u_2 \\ (u_1 + 2)(u_3 + 9) = (u_2 + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = 21 \\ u_1 + u_3 = 2u_2 \\ (u_1 + 2)(u_3 + 9) = (u_2 + 3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 7 \\ u_1 = 14 - u_3 \\ (14 - u_3 + 2)(u_3 + 9) = 100 \quad (*) \end{cases}$$

$$\text{Giải } (*): (14 - u_3)(u_3 + 9) = 100 \Leftrightarrow -u_3^2 + 7u_3 + 44 = 0 \Leftrightarrow u_3 = 11 \vee u_3 = -4$$

$$\text{Với } u_3 = 11 \Rightarrow u_1 = 3. \text{ Với } u_3 = -4 \Rightarrow u_1 = 18.$$

Câu 23. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1, u_2, u_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Theo đề: $u_1 - 1; u_3 - 19$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 1 + u_3 - 19 = 2u_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 65 \\ u_1 - 2u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 65 \quad (1) \\ u_1(1 - 2q + q^2) = 20 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = \frac{65}{20} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 4(1 + q + q^2) = 13(1 - 2q + q^2)$$

$$\Leftrightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \vee q = \frac{1}{3}$$

Vì u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng dần nên chọn $q = 3 \Rightarrow u_1 = 5$
 Vậy $u_1 = 5; u_2 = 15; u_3 = 45$.

Câu 24. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1, u_2, u_3 với công bội là q . Theo đề bài ta có hệ

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 19 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 19 \\ (u_1 q)^3 = 6^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 19 \quad (*) \\ u_1 q = 6 \Rightarrow u_1 = \frac{6}{q} \end{cases}$$

phương trình:

$$\text{Thay } u_1 = \frac{6}{q} \text{ vào } (*) \text{ được: } 6q^2 - 13q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{3}{2} \text{ hoặc } q = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Với } q = \frac{3}{2} \Rightarrow u_1 = 4, u_2 = 6, u_3 = 9$$

$$\text{Với } q = \frac{2}{3} \Rightarrow u_1 = 9, u_2 = 6, u_3 = 4$$

Câu 25. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Lời giải

$$\begin{cases} S_n = 889 \\ u_n = 448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = 889 \\ u_1 q^{n-1} = 448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^n - u_1 = 889(q - 1) \quad (1) \\ u_1 q^n = 448q \quad (2) \end{cases}$$

Theo đề bài ta có

$$\text{Thay (2) vào (1) được: } 448q - 7 = 889q - 889 \Leftrightarrow q = 2$$

Câu 26. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Lời giải

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 35 \\ u_3 - u_4 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q = 35 \\ u_1 q^2 - u_1 q^3 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q) = 35 \quad (1) \\ u_1 q^2(1 - q) = 560 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được } q^2 = 16 \Leftrightarrow q = \pm 4$$

$$\text{Với } q = 4 \text{ thay vào (1) được } u_1 = -\frac{35}{3}, u_2 = u_1 q = -\frac{140}{3}, u_3 = -\frac{560}{3}, u_4 = -\frac{2240}{3}$$

Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo

thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Câu 27. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Theo tính chất của CSC ta có: $a + (2a + b) = 2(a + 2b)$ (1)

Theo tính chất của CSN ta có: $(b + 1)^2(a + 1)^2 = (ab + 5)^2$ (2)

Từ (1) khai triển rút gọn ta được: $a = 3b$, thay vào (2):

$$(b + 1)^2(3b + 1)^2 = (3b^2 + 5)^2 \Leftrightarrow (b + 1)(3b + 1) = \pm(3b^2 + 5)$$

$$\text{Với } (b + 1)(3b + 1) = 3b^2 + 5 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{Với } (b + 1)(3b + 1) = -3b^2 - 5 \Leftrightarrow 6b^2 + 4b + 6 = 0 \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Kết luận $a = 3, b = 1$

Câu 28. Tính các tổng sau:

$$\text{a). } S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$$

$$\text{b). } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\text{c). } S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$$

$$\text{d). } S_n = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots6}_{n \text{ số } 6}$$

Lời giải

a). Ta có dãy số $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công

$$\text{bội } q = \frac{2^2}{2} = 2. \text{ Do đó } S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2(2^n - 1)$$

b). Ta có dãy số $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và

$$\text{công bội } q = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \text{ Do đó } S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\text{c). } S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$$

$$= 3^2 + 2 + \frac{1}{3^2} + 3^4 + 2 + \frac{1}{3^4} + \dots + 3^{2n} + 2 + \frac{1}{3^{2n}}$$

$$= (3^2 + 3^4 + \dots + 3^{2n}) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n}}\right) + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_n$$

- Có dãy số $3^2, 3^4, \dots, 3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 3^2$ và công bội

$$q = \frac{3^4}{3^2} = 9 \quad S_1 = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 9 \cdot \frac{1 - 9^n}{1 - 9} = \frac{9}{8}(9^n - 1)$$

Do đó

- Có dãy số $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^4}, \dots, \frac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3^2}$ và công bội

$$q = \frac{1}{9} \quad S_1 = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \frac{1}{9^n}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n} \right) = \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n}$$

Vậy
$$S_n = \frac{9}{8}(9^n - 1) + \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n} + 2n = \frac{(9^n - 1)(9^{n+1} + 1)}{8 \cdot 9^n} + 2n$$

$$S_n = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666}_{n \text{ số } 6} \cdot 6 = \frac{6}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999}_{n \text{ số } 9} \cdot 9 \right)$$

d).

$$= \frac{2}{3} \left[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (10^n - 1) \right]$$

$$= \frac{2}{3} \left[10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n \right] = \frac{2}{3} \left[10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n \right] = \frac{20}{27} (10^n - 1) - \frac{2n}{3}$$

$$B = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777}_{n \text{ số } 7} \cdot 7$$

Câu 29. Tính tổng

Lời giải

$$B = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777}_{n \text{ số } 7} \cdot 7$$

$$\Leftrightarrow B = 7 \left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111}_{n \text{ số } 1} \cdot 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{7} = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111}_{n \text{ số } 1} \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999}_{n \text{ số } 9} \cdot 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - \left(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ số } 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = \frac{10(1 - 10^n)}{1 - 10} - n$$

$$\Leftrightarrow \frac{9B}{7} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{7(10^{n+1} - 9n - 10)}{81}$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>