

## Bài 5. CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN

### A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

- Xét phương trình bậc hai ẩn  $x$ :  $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ . Khi  $b = 2b'$ , gọi biệt thức  $\Delta' = b'^2 - ac$ , ta có

a) Trường hợp 1: Nếu  $\Delta' < 0$  thì phương trình vô nghiệm.

b) Trường hợp 2: Nếu  $\Delta' = 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$ .

c) Trường hợp 3: Nếu  $\Delta' > 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$ .

**Chú ý:** Ta thường sử dụng biệt thức  $\Delta'$  khi phương trình bậc hai đã cho với hệ số  $b$  chẵn và có dạng  $b = 2b'$ , khi đó các phép tính toán trong bài toán đơn giản hơn.

### B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**Dạng 1:** Sử dụng công thức nghiệm thu gọn, giải phương trình bậc hai

- Bước 1: Xác định các hệ số  $a, b', c$ .
- Bước 2: Sử dụng công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình.

**Ví dụ 1.** Xác định các hệ số  $a, b, c$ , tính biệt thức  $\Delta'$ , từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a)  $3x^2 - 4x + 1 = 0$ . **ĐS:**  $\left\{1; \frac{1}{3}\right\}$ .

b)  $-4x^2 + 4x + 1 = 0$ . **ĐS:**  $\left\{\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$ .

c)  $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$ . **ĐS:** Vô nghiệm.

d)  $x^2 - \sqrt{8}x + 2 = 0$ . **ĐS:**  $\{\sqrt{2}\}$ .

**Ví dụ 2.** Xác định các hệ số  $a, b', c$ , tính biệt thức  $\Delta'$ , từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a)  $x^2 - 6x + 5 = 0$ . **ĐS:**  $\{1; 5\}$ .

b)  $-3x^2 - 4x + 2 = 0$ . **ĐS:**  $\left\{\frac{-4+\sqrt{10}}{3}; \frac{-4-\sqrt{10}}{3}\right\}$ .

c)  $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$ . **ĐS:**  $\{\sqrt{3}-\sqrt{7}; \sqrt{3}+\sqrt{7}\}$ .

d)  $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0$ . **ĐS:**  $\{\sqrt{5}\}$ .

**Ví dụ 3.** Đưa về dạng  $ax^2 + 2b'x + c = 0$ , từ đó giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn

a)  $x^2 - 2 = 4x$ . **ĐS:**  $\{2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}\}$ .

b)  $3 - x^2 = 2\sqrt{3}x - 2x^2$ . **ĐS:**  $\{\sqrt{3}\}$ .

c)  $2(x - 2)^2 = -2x + 5$ . **ĐS:**  $\left\{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right\}$ .

d)  $\sqrt{8}(x - \sqrt{8}) = (x - \sqrt{2})^2$ . **ĐS:** Vô nghiệm.

**Ví dụ 4.** Đưa về dạng  $ax^2 + 2b'x + c = 0$ , từ đó giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn

a)  $4x - x^2 = -5$ . **ĐS:**  $\{-1; 5\}$ .

b)  $x^2 = \sqrt{8}x - 3$ . **ĐS:** Vô nghiệm..

c)  $x^2 - 2\sqrt{3}x = 2x^2 - 1$ . **ĐS:**  $\{-\sqrt{3} - 2; -\sqrt{3} + 2\}$ .

d)  $(\sqrt{5} - x)^2 = 2\sqrt{5}x - 15$ . **ĐS:**  $\{2\sqrt{5}\}$ .

**Dạng 2:** Sử dụng công thức nghiệm thu gọn, xác định số nghiệm của phương trình bậc hai

- Xét phương trình dạng bậc hai:  $ax^2 + bx + c = 0$ .
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$ .
- Phương trình có nghiệm kép khi và chỉ khi  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$ .
- Phương trình có đúng một nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ .
- Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi  $\begin{cases} a = 0, b = 0, c \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta < 0 \end{cases}$ .

**Ví dụ 5.** Cho phương trình  $mx^2 - 6x - 1 = 0$ , ( $m$  là tham số) Tìm  $m$  để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt. **ĐS:**  $-9 < m \neq 0$ .

b) Có nghiệm kép. **ĐS:**  $m = -9$ .

c) Vô nghiệm. **ĐS:**  $m < -9$ .

d) Có đúng một nghiệm. **ĐS:**  $m = 0$ .

**Ví dụ 6.** Cho phương trình  $mx^2 - 4x - 1 = 0$ , ( $m$  là tham số) Tìm  $m$  để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt.

**ĐS:**  $-4 < m \neq 0$ .

b) Có nghiệm kép.

**ĐS:**  $m = -4$ .

c) Vô nghiệm.

**ĐS:**  $m < -9$ .

d) Có đúng một nghiệm.

**ĐS:**  $m = 0$ .

**Dạng 3: Giải và biện luận phương trình dạng bậc hai**

- Xét phương trình dạng bậc hai:  $ax^2 + bx + c = 0$  với biệt thức  $\Delta' = b'^2 - ac$ .
- Nếu  $a = 0$ , ta đưa về biện luận phương trình bậc nhất.
- Nếu  $a \neq 0$ , ta biện luận phương trình bậc hai theo  $\Delta'$ .

**Ví dụ 7.** Giải và biện luận các phương trình sau ( $m$  là tham số)

a)  $mx^2 + 2x - 4 = 0$ .

b)  $x^2 - 4(m-1)x + 4m^2 = 0$ .

**Ví dụ 8.** Giải và biện luận các phương trình sau ( $m$  là tham số)

a)  $mx^2 - 6x + 2 = 0$ .

b)  $x^2 - 2(m+2)x + m^2 = 0$ .

**C. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1.** Sử dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a)  $x^2 - 10x + 16 = 0$ .

**ĐS:**  $\{2; 8\}$ .

b)  $-3x^2 - 4x + 2 = 0$ .

**ĐS:**  $\{2; 8\}$ .

c)  $x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 = 0$ .

**ĐS:**  $\frac{-2 + \sqrt{10}}{3}; -\frac{2 + \sqrt{10}}{3}$ .

d)  $x^2 - \sqrt{40}x + 10 = 0$ .

**ĐS:**  $\{\sqrt{10}\}$ .

**Bài 2.** Giải các phương trình sau

a)  $x^2 - 8x = 3$ .

**ĐS:**  $\{4 - \sqrt{19}; 4 + \sqrt{19}\}$ .

b)  $-x^2 - 3x = 7x - 1$ .

**ĐS:**  $\{-5 - \sqrt{6}; -5 + \sqrt{6}\}$ .

c)  $(x-2)^2 = 2(1-x)$ .

**ĐS:** vô nghiệm.

d)  $x^2 = 6(\sqrt{2}x - 3)$ .

**ĐS:**  $\{3\sqrt{2}\}$ .

**Bài 3.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 1 = 0$ , ( $m$  là tham số) Tìm  $m$  để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt.

**ĐS:**  $m < 0$ .

b) Có nghiệm kép.

**ĐS:**  $m = 0$ .

c) Vô nghiệm.

**ĐS:**  $m > 0$ .

d) Có đúng một nghiệm.

**ĐS:** không tồn tại.

**Bài 4.** Giải và biện luận phương trình  $mx^2 - 2(m-1)x + m-1 = 0$ , ( $m$  là tham số)

## HƯỚNG DẪN GIẢI

Ví dụ 1. [9D4B5]

Xác định các hệ số  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , tính biệt thức  $\Delta'$ , từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a)  $3x^2 - 4x + 1 = 0$ . **Đáp số**  $\left\{1; \frac{1}{3}\right\}$

b)  $-4x^2 + 4x + 1 = 0$ . **Đáp số**  $\left\{\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$

c)  $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$ . **Đáp số** Vô nghiệm

d)  $x^2 - \sqrt{8}x + 2 = 0$ . **Đáp số**  $\{\sqrt{2}\}$  r

**Lời giải.**

a)  $3x^2 - 4x + 1 = 0$ .  $a = 3, b' = -2, c = 1$ .  $\Delta' = (-2)^2 - 3 \cdot 1 = 1$ .

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{1}}{3} = 1, x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } S = \left\{1; \frac{1}{3}\right\}.$$

b)  $-4x^2 + 4x + 1 = 0$ .  $a = -4, b' = 2, c = 1$ .  $\Delta' = (2)^2 - (-4) \cdot 1 = 8$ .

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{-4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{-4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } S = \left\{\frac{1 - \sqrt{2}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right\}.$$

c)  $3x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$ .  $a = 3, b' = -\sqrt{2}, c = 4$ .  $\Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 3 \cdot 4 = -10 < 0$ . Vậy phương trình vô nghiệm.

d)  $x^2 - \sqrt{8}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ .  $a = 1, b' = -\sqrt{2}, c = 2$ .  $\Delta' = (\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 2 = 0$ .

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}. \text{ Vậy } S = \{\sqrt{2}\}. \text{ r}$$

Ví dụ 2. [9D4B5]

Xác định các hệ số  $a$ ,  $b'$ ,  $c$ , tính biệt thức  $\Delta'$ , từ đó áp dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a)  $x^2 - 6x + 5 = 0$ . **Đáp số**  $\{1; 5\}$

b)  $-3x^2 - 4x + 2 = 0$ . **Đáp số**  $\left\{\frac{-4 + \sqrt{10}}{3}; \frac{-4 - \sqrt{10}}{3}\right\}$

c)  $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$ . **Đáp số**  $\{\sqrt{3} - \sqrt{7}; \sqrt{3} + \sqrt{7}\}$

d)  $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0$ . **Đáp số**  $\{\sqrt{5}\}$

**Lời giải.**

a)  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .  $a = 1, b' = -3, c = 5$ .  $\Delta' = (-3)^2 - 1 \cdot 5 = 4$ .  $x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{4}}{1} = 1$ .

$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{4}}{1} = 5$ . Vậy  $S = \{1; 5\}$ .

b)  $-3x^2 - 4x + 2 = 0$ .  $a = -3, b' = -2, c = 2$ .  $\Delta' = (-2)^2 - (-3) \cdot 2 = 10$ .  $x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{10}}{-3} = \frac{-4 + \sqrt{10}}{3}$ .

$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{10}}{-3} = \frac{-4 - \sqrt{10}}{3}$ . Vậy  $S = \left\{ \frac{-4 + \sqrt{10}}{3}; \frac{-4 - \sqrt{10}}{3} \right\}$ .

c)  $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$ .  $a = 1, b' = -\sqrt{3}, c = -4$ .  $\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot (-4) = 7$ .

$x_1 = \frac{-(-\sqrt{3}) - \sqrt{7}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{7}$ .  $x_2 = \frac{-(-\sqrt{3}) + \sqrt{7}}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ . Vậy  $S = \{\sqrt{3} - \sqrt{7}; \sqrt{3} + \sqrt{7}\}$ .

d)  $x^2 - \sqrt{20}x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$ .  $a = 1, b' = -\sqrt{5}, c = 5$ .  $\Delta' = (-\sqrt{5})^2 - 1 \cdot 5 = 0$ .

$x_1 = x_2 = \frac{-(-\sqrt{5})}{1} = \sqrt{5}$ . Vậy  $S = \{\sqrt{5}\}$ .

**Ví dụ 3.** [9D4B5]

Đưa về dạng  $ax^2 + 2b'x + c = 0$ , từ đó giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn

a)  $x^2 - 2 = 4x$ . **Đáp số**  $\{2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}\}$ .

b)  $3 - x^2 = 2\sqrt{3}x - 2x^2$ . **Đáp số**  $\{\sqrt{3}\}$ .

c)  $2(x - 2)^2 = -2x + 5$ . **Đáp số**  $\left\{ \frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right\}$

d)  $\sqrt{8}(x - \sqrt{8}) = (x - \sqrt{2})^2$ . **Đáp số** Vô nghiệm

**Lời giải.**

a)  $x^2 - 2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2x - 2 = 0$ .  $a = 1, b' = -2, c = -2$ .  $\Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (-2) = 6$ .

$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{6}}{1} = 2 - \sqrt{6}$ .  $x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{6}}{1} = 2 + \sqrt{6}$ . Vậy  $S = \{2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}\}$ .

b)  $3 - x^2 = 2\sqrt{3}x - 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ .  $a = 1, b' = -\sqrt{3}, c = 3$ .  $\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - 1 \cdot 3 = 0$ .

$x_1 = x_2 = \frac{-(-\sqrt{3})}{1} = \sqrt{3}$ . Vậy  $S = \{\sqrt{3}\}$ .

c)  $2(x-2)^2 = -2x+5 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 \cdot 3x + 3 = 0. a = 2, b' = -3, c = 3. \Delta' = (-3)^2 - 2 \cdot 3 = 3.$   
 $x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{3}}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}. \text{Vậy } S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right\}.$

d)  $\sqrt{8}(x - \sqrt{8}) = (x - \sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}x + 10 = 0. a = 1, b' = -2\sqrt{2}, c = 10.$   
 $\Delta' = (-2\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 10 = -2 < 0. \text{Vậy phương trình vô nghiệm.}$

Ví dụ 4. [9D4B5]

Đưa về dạng  $ax^2 + 2b'x + c = 0$ , từ đó giải các phương trình sau bằng công thức nghiệm thu gọn

a)  $4x - x^2 = -5. \quad \text{Đáp số } \{-1; 5\}$

b)  $x^2 = \sqrt{8}x - 3. \quad \text{Đáp số } \text{Vô nghiệm.}$

c)  $x^2 - 2\sqrt{3}x = 2x^2 - 1. \quad \text{Đáp số } \{-\sqrt{3} - 2; -\sqrt{3} + 2\}$

d)  $(\sqrt{5} - x)^2 = 2\sqrt{5}x - 15. \quad \text{Đáp số } \{2\sqrt{5}\}$

**Lời giải.**

a)  $4x - x^2 = -5 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2x - 5 = 0. a = 1, b' = -2, c = -5. \Delta' = (-2)^2 - 1 \cdot (-5) = 9.$   
 $x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{9}}{1} = -1, x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{9}}{1} = 5. \text{Vậy } S = \{-1; 5\}.$

b)  $x^2 = \sqrt{8}x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 3 = 0. a = 1, b' = -\sqrt{2}, c = 3. \Delta' = (-\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 3 = -1 < 0. \text{Vậy}$   
 phương trình vô nghiệm.

c)  $x^2 - 2\sqrt{3}x = 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0. a = 1, b' = \sqrt{3}, c = -1. \Delta' = (\sqrt{3})^2 - 1 \cdot (-1) = 4.$   
 $x_1 = \frac{-(\sqrt{3}) - \sqrt{4}}{1} = -\sqrt{3} - 2, x_2 = \frac{-(\sqrt{3}) + \sqrt{4}}{1} = -\sqrt{3} + 2. \text{Vậy } S = \{-\sqrt{3} - 2; -\sqrt{3} + 2\}.$

d)  $(\sqrt{5} - x)^2 = 2\sqrt{5}x - 15 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5}x + 20 = 0. a = 1, b' = -2\sqrt{5}, c = 20.$   
 $\Delta' = (-2\sqrt{5})^2 - 1 \cdot 20 = 0. x_1 = x_2 = -\frac{-(2\sqrt{5})}{1} = 2\sqrt{5}. \text{Vậy } S = \{2\sqrt{5}\}.$

Ví dụ 5. [9D4K5]

Cho phương trình  $mx^2 - 6x - 1 = 0$ , ( $m$  là tham số) Tìm  $m$  để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt. **Đáp số**  $-9 < m \neq 0$

b) Có nghiệm kép. **Đáp số**  $m = -9$

c) Vô nghiệm. **Đáp số**  $m < -9$

**d)** Có đúng một nghiệm. **Đáp số**  $m = 0$

**Lời giải.**

**a)**  $\Delta' = (-3)^2 - m \cdot (-1) = 9 + m$ . Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -9. \end{cases}$$

**b)** Phương trình có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -9 \end{cases} \Leftrightarrow m = -9.$

**c)** Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 9 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -9 \end{cases} \Leftrightarrow m < -9.$

**d)** Phương trình có đúng một nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

**Ví dụ 6.** [9D4K5]

Cho phương trình  $mx^2 - 4x - 1 = 0$ , ( $m$  là tham số) Tìm  $m$  để phương trình

**a)** Có hai nghiệm phân biệt. **Đáp số**  $-4 < m \neq 0$

**b)** Có nghiệm kép. **Đáp số**  $m = -4$

**c)** Vô nghiệm. **Đáp số**  $m < -9$

**d)** Có đúng một nghiệm. **Đáp số**  $m = 0$

**Lời giải.**

**a)** Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = (-2)^2 - m \cdot (-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -4. \end{cases}$

**b)** Phương trình có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4.$

**c)** Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -4.$

**d)** Phương trình có đúng một nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

**Ví dụ 7.** [9D4G5]

Giải và biện luận các phương trình sau ( $m$  là tham số)

**a)**  $mx^2 + 2x - 4 = 0.$

**b)**  $x^2 - 4(m-1)x + 4m^2 = 0$ .r

**Lời giải.**

**a)**  $mx^2 + 2x - 4 = 0$ .TH1.  $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$ , phương trình trở thành  $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .TH2.  
 $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ .  $\Delta' = (1)^2 - m \cdot 4 = 1 - 4m$ .

**b)**  $1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$ , phương trình vô nghiệm.

**c)**  $1 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ , phương trình có nghiệm kép  $x_0 = \frac{-1}{m} = -4$ .

**d)**  $1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$ , phương trình có hai nghiệm phân biệt [ + ]2

**e)**  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}$

**f)**  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}$  r

Kết luận

**g)**  $m > \frac{1}{4}$ , phương trình vô nghiệm.

**h)**  $m = 0$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = 2$ .

**i)**  $m = \frac{1}{4}$ , phương trình có nghiệm kép  $x_0 = -4$ .

**j)**  $m < \frac{1}{4}$  và  $m \neq 0$ , phương trình có hai nghiệm phân biệt [ + ]2

**k)**  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m}}{m}$

**l)**  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m}}{m}$  r

**m)**  $x^2 - 4(m-1)x + 4m^2 = 0$ .  $\Delta' = (-2(m-1))^2 - 4m^2 = -8m + 4$ .

**n)**  $-8m + 4 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$ , phương trình vô nghiệm.

**o)**  $-8m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ , phương trình có nghiệm kép  $x_0 = \frac{-(-2(m-1))}{1} = 2m - 2 = -1$ .

**p)**  $-8m+4>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$ , phương trình có hai nghiệm phân biệt [+]1

**q)**  $x_1 = \frac{-(-2(m-1)) - \sqrt{-8m+4}}{1} = 2(m-1) - \sqrt{-8m+4}$

**r)**  $x_2 = \frac{-(-2(m-1)) + \sqrt{-8m+4}}{1} = 2(m-1) + \sqrt{-8m+4}$ .

Kết luận

**s)**  $m > \frac{1}{2}$ , phương trình vô nghiệm.

**t)**  $m = \frac{1}{2}$ , phương trình có nghiệm kép  $x_0 = -1$ .

**u)**  $m < \frac{1}{2}$ , phương trình có hai nghiệm phân biệt

.  $x_1 = 2(m-1) - \sqrt{-8m+4}$

.  $x_2 = 2(m-1) + \sqrt{-8m+4}$ .

Ví dụ 8. [9D4G5]

Giải và biện luận các phương trình sau ( $m$  là tham số)

**a)**  $mx^2 - 6x + 2 = 0$ .

**b)**  $x^2 - 2(m+2)x + m^2 = 0$ .

**Lời giải.**

**a)**  $mx^2 - 6x + 2 = 0$ . TH1.  $a=0 \Leftrightarrow m=0$ , phương trình trở thành  $-6x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ . TH2.

$a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ .  $\Delta' = (-3)^2 - m \cdot 2 = 9 - 2m$ .

**b)**  $9 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{2}$ , phương trình vô nghiệm.

**c)**  $9 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$ , phương trình có nghiệm kép  $x_0 = \frac{3}{m} = \frac{2}{3}$ .

**d)**  $9 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{2}$ , phương trình có hai nghiệm phân biệt [+]2

**e)**  $x_1 = \frac{3 + \sqrt{-2m+9}}{m}$

$$\text{f)} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{-2m+9}}{m} . r$$

Kết luận

$$\text{g)} \quad m > \frac{9}{2}, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\text{h)} \quad m = 0, \text{ phương trình có nghiệm duy nhất } x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{i)} \quad m = \frac{9}{2}, \text{ phương trình có nghiệm kép } x_0 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{j)} \quad m < \frac{9}{2} \text{ và } m \neq 0, \text{ phương trình có hai nghiệm phân biệt } [+2]$$

$$\text{k)} \quad x_1 = \frac{3 + \sqrt{-2m+9}}{m}$$

$$\text{l)} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{-2m+9}}{m} . r$$

$$\text{m)} \quad x^2 - 2(m+2)x + m^2 = 0 . \Delta' = (-(m+2))^2 - m^2 = 4m+4.$$

$$\text{n)} \quad 4m+4 < 0 \Leftrightarrow m < -1, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\text{o)} \quad 4m+4 = 0 \Leftrightarrow m = -1, \text{ phương trình có nghiệm kép } x_0 = \frac{-(-(m+2))}{1} = m+2 = 1.$$

$$\text{p)} \quad 4m+4 > 0 \Leftrightarrow m > -1, \text{ phương trình có hai nghiệm phân biệt } [+1]$$

$$\text{q)} \quad x_1 = \frac{-(-(m+2)) - \sqrt{4m+4}}{1} = (m+2) - 2\sqrt{m+1}$$

$$\text{r)} \quad x_2 = \frac{-(-(m+2)) + \sqrt{4m+4}}{1} = (m+2) + 2\sqrt{m+1} . r$$

Kết luận

$$\text{s)} \quad m < -1, \text{ phương trình vô nghiệm.}$$

$$\text{t)} \quad m = -1, \text{ phương trình có nghiệm kép } x_0 = 1.$$

$$\text{u)} \quad m > -1, \text{ phương trình có hai nghiệm phân biệt } [+2]$$

$$\text{v)} \quad x_1 = (m+2) - 2\sqrt{m+1}$$

$$\text{w)} \quad x_2 = (m+2) + 2\sqrt{m+1} . r$$

**Bài 1.** [9D4B5]

Sử dụng công thức nghiệm thu gọn để giải các phương trình sau

a)  $x^2 - 10x + 16 = 0$ . **Đáp số**  $\{2; 8\}$

b)  $-3x^2 - 4x + 2 = 0$ . **Đáp số**  $\{2; 8\}$

c)  $x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 = 0$ . **Đáp số**  $\frac{-2 + \sqrt{10}}{3}; -\frac{2 + \sqrt{10}}{3}$

d)  $x^2 - \sqrt{40}x + 10 = 0$ . **Đáp số**  $\{\sqrt{10}\}$

**Lời giải.**

a)  $x^2 - 10x + 16 = 0$ .  $\Delta' = (-5)^2 - 1 \cdot 16 = 9$ .  $x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{1} = 2$ ,  $x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{1} = 8$  Vậy  $S = \{2; 8\}$ .

b)  $-3x^2 - 4x + 2 = 0$ .  $\Delta' = (-2)^2 - (-3) \cdot 2 = 10$ .  $x_1 = \frac{2 - \sqrt{10}}{-3} = -\frac{2 + \sqrt{10}}{3}$ ,  $x_2 = \frac{2 + \sqrt{10}}{-3} = -\frac{2 + \sqrt{10}}{3}$   
 Vậy  $S = \left\{ -\frac{2 + \sqrt{10}}{3}; -\frac{2 + \sqrt{10}}{3} \right\}$ .

c)  $x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 = 0$ .  $\Delta' = (-3\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 2 = 16$ .  $x_1 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{16}}{1} = 3\sqrt{2} - 4$ ,  $x_2 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{16}}{1} = 3\sqrt{2} + 4$   
 Vậy  $S = \{3\sqrt{2} - 4; 3\sqrt{2} + 4\}$ .

d)  $x^2 - \sqrt{40}x + 10 = 0$ .  $\Delta' = (-\sqrt{10})^2 - 10 = 0$ ,  $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$  Vậy  $S = \{\sqrt{10}\}$ .

**Bài 2.** [9D4B5]

Giải các phương trình sau

a)  $x^2 - 8x = 3$ . **Đáp số**  $\{4 - \sqrt{19}; 4 + \sqrt{19}\}$

b)  $-x^2 - 3x = 7x - 1$ . **Đáp số**  $\{-5 - \sqrt{6}; -5 + \sqrt{6}\}$

c)  $(x - 2)^2 = 2(1 - x)$ . **Đáp số** vô nghiệm

d)  $x^2 = 6(\sqrt{2}x - 3)$ . **Đáp số**  $\{3\sqrt{2}\}$

**Lời giải.**

- a)  $x^2 - 8x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 3 = 0$ .  
 $\Delta' = (-4)^2 - (-3) = 19$   
 $x_1 = \frac{4 - \sqrt{19}}{1} = 4 - \sqrt{19}$ ,  $x_2 = \frac{4 + \sqrt{19}}{1} = 4 + \sqrt{19}$  Vậy  $S = \{4 - \sqrt{19}; 4 + \sqrt{19}\}$ .
- b)  $-x^2 - 3x = 7x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 1 = 0$ .  
 $\Delta' = 5^2 + 1 = 26$   
 $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{26}}{1} = -5 - \sqrt{26}$ ,  $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{26}}{1} = -5 + \sqrt{26}$  Vậy  $S = \{-5 - \sqrt{26}; -5 + \sqrt{26}\}$ .
- c)  $(x - 2)^2 = 2(1 - x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$ .  $\Delta' = (-1)^2 - 2 = -1 < 0$  Vậy phương trình vô nghiệm.
- d)  $x^2 = 6(\sqrt{2}x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = 0$ .  $\Delta' = (-3\sqrt{2})^2 - 18 = 0$   
 $x_1 = x_2 = \frac{-(-3\sqrt{2})}{1} = 3\sqrt{2}$ . Vậy  $S = \{3\sqrt{2}\}$ .

**Bài 3.** [9D4K5]

Cho phương trình  $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 + 1 = 0$ , ( $m$  là tham số) Tìm  $m$  để phương trình

- a) Có hai nghiệm phân biệt. **Đáp số**  $m < 0$
- b) Có nghiệm kép. **Đáp số**  $m = 0$
- c) Vô nghiệm. **Đáp số**  $m > 0$
- d) Có đúng một nghiệm. **Đáp số** không tồn tại

**Lời giải.**

- a)  $\Delta' = (-(m - 1))^2 - (m^2 + 1) = -2m$ . Phương trình có hai nghiệm phân biệt  
 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m > 0 \Leftrightarrow m < 0$ .
- b) Phương trình có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow -2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ .
- c) Phương trình vô nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow -2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$ .
- d) Có đúng một nghiệm  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \text{ (Vô lý)} \\ -2(m - 1) \neq 0 \end{cases}$ . Vậy không tồn tại giá trị  $m$ .

**Bài 4.** [9D4G5]

Giải và biện luận phương trình  $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 1 = 0$ , ( $m$  là tham số)

**Lời giải.**

TH1.  $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$ , phương trình trở thành  $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ . TH2.  $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ .

$$\Delta' = (-(m - 1))^2 - m \cdot (m - 1) = -m + 1.$$

- a)  $-m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$ , phương trình vô nghiệm.

**b)**  $-m+1=0 \Leftrightarrow m=1$ , phương trình có nghiệm kép  $x_0 = \frac{m-1}{m} = 0$ .

**c)**  $-m+1>0 \Leftrightarrow m<1$ , phương trình có hai nghiệm phân biệt  $[+]$ 2

**d)**  $x_1 = \frac{(m-1)-\sqrt{-m+1}}{m}$

**e)**  $x_2 = \frac{(m-1)+\sqrt{-m+1}}{m}$ .

Kết luận

**f)**  $m>1$ , phương trình vô nghiệm.

**g)**  $m=0$ , phương trình có nghiệm duy nhất  $x = \frac{1}{2}$ .

**h)**  $m=1$ , phương trình có nghiệm kép  $x_0 = 0$ .

**i)**  $m<1$  và  $m \neq 0$ , phương trình có hai nghiệm phân biệt

**j)**  $x_1 = \frac{(m-1)-\sqrt{-m+1}}{m}$

**k)**  $x_2 = \frac{(m-1)+\sqrt{-m+1}}{m}$ .

--- HẾT ---

## **Bài 6. HỆ THỨC VI-ÉT VÀ ỨNG DỤNG**

### **A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM**

#### **1. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng**

- Xét phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ . Nếu  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình thì

- $$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

#### **2. Ứng dụng của hệ thức Vi-ét**

- Nhẩm nghiệm phương trình bậc hai. Xét phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ .
  - ✓ Nếu  $a+b+c=0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1=1$ , nghiệm kia là  $x_2 = \frac{c}{a}$ .
  - ✓ Nếu  $a-b+c=0$  thì phương trình có một nghiệm là  $x_1=-1$ , nghiệm kia là  $x_2 = \frac{-c}{a}$ .

- Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng. Nếu hai số có tổng bằng  $S$  và tích bằng  $P$  thì hai số đó là nghiệm của phương trình  $X^2 - Sx + P = 0$ .

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### Dạng 1: Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức đối xứng giữa các nghiệm

- Bước 1: Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ . Từ đó áp dụng hệ thức Vi-ét

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ và } P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Bước 2: Biến đổi biểu thức đối xứng giữa các nghiệm của đề bài theo tổng  $x_1 + x_2$  và  $x_1 x_2$  rồi áp dụng bước 1.

**Ví dụ 1.** Đối với mỗi phương trình sau, ký hiệu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phương trình (nếu có) Không giải phương trình hãy điền vào chỗ trống

a)  $x^2 + 4x - 5 = 0, \Delta' = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

b)  $4x^2 + 4x + 1 = 0, \Delta' = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

c)  $3x^2 - x - 3 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

d)  $x^2 - 7x + 5 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

**Ví dụ 2.** Đối với mỗi phương trình sau, ký hiệu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phương trình (nếu có) Không giải phương trình hãy điền vào chỗ trống

a)  $x^2 + 3x - 4 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

b)  $x^2 - 6x + 9 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

c)  $2x^2 - x - 5 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

d)  $x^2 - 5x - 1 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

**Ví dụ 3.** Không giải phương trình sau, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

a)  $x^2 - 3x - 5 = 0.$  **ĐS:**  $S = 3, P = -5.$

b)  $5x^2 + 7x - 12 = 0.$  **ĐS:**  $S = -\frac{7}{5}, P = -\frac{12}{5}.$

c)  $4x^2 - 7x - 2 = 0.$  **ĐS:**  $S = \frac{7}{4}, P = -\frac{1}{2}.$

d)  $\sqrt{3}x^2 - 21x - 12 = 0.$  **ĐS:**  $S = 7\sqrt{3}, P = -4\sqrt{3}.$

**Ví dụ 4.** Không giải phương trình sau, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

a)  $x^2 - 2x - 5 = 0$ . **ĐS:**  $S = 2, P = -5$ .

b)  $-5x^2 + 3x + 7 = 0$ . **ĐS:**  $S = \frac{3}{5}, P = -\frac{7}{5}$ .

c)  $5x^2 - 7x - 3 = 0$ . **ĐS:**  $S = \frac{7}{5}, P = -\frac{3}{5}$ .

d)  $\sqrt{2}x^2 - 10x - 2 = 0$ . **ĐS:**  $S = 5\sqrt{2}, P = -\sqrt{2}$ .

**Ví dụ 5.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x - 1 = 0$ . Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = x_1^2 + x_2^2$ . **ĐS:** 6.

b)  $B = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ . **ĐS:** -2.

c)  $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ . **ĐS:** -2.

d)  $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ . **ĐS:** -6.

**Ví dụ 6.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - x - 3 = 0$ . Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

a)  $A = x_1^2 + x_2^2$ . **ĐS:** 7.

b)  $B = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ . **ĐS:** -3.

c)  $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ . **ĐS:**  $-\frac{1}{3}$ .

d)  $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ . **ĐS:**  $-\frac{7}{3}$ .

**Dạng 2: Giải phương trình bằng cách nhẩm nghiệm**

- Sử dụng hệ thức Vi-ét.

**Ví dụ 7.** Xét tổng  $a + b + c$  hoặc  $a - b + c$  rồi tính nhẩm các nghiệm của phương trình sau

a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$ . **ĐS:**  $\{1; 2\}$ .

b)  $3x^2 + 7x - 10 = 0$ . **ĐS:**  $\left\{1; -\frac{10}{3}\right\}$ .

c)  $3x^2 + 4x + 1 = 0$ . **ĐS:**  $\left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}$ .

d)  $\sqrt{3}x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0$ . **ĐS:**  $\left\{1; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right\}$ .

**Ví dụ 8.** Xét tổng  $a+b+c$  hoặc  $a-b+c$  rồi tính nhẩm các nghiệm của phương trình sau

a)  $x^2 + 3x - 4 = 0$ . **ĐS:**  $\{1; -4\}$ .

b)  $2x^2 + 7x + 5 = 0$ . **ĐS:**  $\left\{-1; -\frac{5}{2}\right\}$ .

c)  $6x^2 - 5x - 1 = 0$ . **ĐS:**  $\left\{1; -\frac{1}{6}\right\}$ .

d)  $x^2 + \sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2} = 0$ . **ĐS:**  $\{1; -1 + \sqrt{2}\}$ .

**Ví dụ 9.** Sử dụng định lý Vi-ét tính nhẩm nghiệm của phương trình

a)  $x^2 - 7x + 10 = 0$ . **ĐS:**  $\{2; 5\}$ .

b)  $x^2 + 7x + 10 = 0$ . **ĐS:**  $\{-2; -5\}$ .

**Ví dụ 10.** Sử dụng định lý Vi-ét tính nhẩm nghiệm của phương trình

a)  $x^2 + 5x + 6 = 0$ . **ĐS:**  $\{-2; -3\}$ .

b)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . **ĐS:**  $\{2; 3\}$ .

**Ví dụ 11.** Cho phương trình  $x^2 - mx + m - 1 = 0$ . Chứng minh phương trình đã cho luôn một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại. **ĐS:**  $\{1; m-1\}$ .

**Ví dụ 12.** Cho phương trình  $-x^2 + mx + m + 1 = 0$ . Chứng minh phương trình đã cho luôn một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại. **ĐS:**  $\{-1; -m-1\}$ .

**Dạng 3: Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng**

- Để tìm hai số  $x, y$  khi biết tổng  $S = x + y$  và tích  $P = xy$ , ta làm như sau
- Bước 1: Giải phương trình  $X^2 - Sx + P = 0$  để tìm các nghiệm  $X_1, X_2$ .
- Bước 2: Suy ra các số  $x, y$  cần tìm là  $x, y = X_1, X_2$  hoặc  $x, y = X_2, X_1$ .

**Ví dụ 13.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau

a)  $u + v = 5$  và  $uv = -14$ . **ĐS:**  $-2$  và  $7$ .

b)  $u + v = 5$  và  $uv = -24$ . **ĐS:**  $-3$  và  $8$ .

**Ví dụ 14.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau

a)  $u + v = -6$  và  $uv = -16$ .

**ĐS:** 2 và  $-8$ .

b)  $u + v = 1$  và  $uv = \frac{1}{4}$ .

**ĐS:**  $\frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 15.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\sqrt{2} - 1$  và  $\sqrt{2} + 1$ .

**ĐS:**  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ .

**Ví dụ 16.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là 5 và  $-7$ .

**ĐS:**  $x^2 + 2x - 35 = 0$ .

**Ví dụ 17.** Cho phương trình  $x^2 - 3x + 1 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có

hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  và  $x_1^2 + x_2^2$ .

**ĐS:**  $x^2 - 10x + 21 = 0$ .

**Ví dụ 18.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + 2 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có

hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1}$  và  $\frac{1}{x_2}$ .

**ĐS:**  $2x^2 - 4x + 1 = 0$ .

**Dạng 4: Phân tích tam giác bậc hai thành nhân tử**

- Xét tam thức bậc hai  $ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ . Nếu phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì tam thức được phân tích thành

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

**Ví dụ 19.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^2 + 2x - 3$ .

**ĐS:**  $(x - 1)(x + 3)$ .

b)  $3x^2 - 2x - 1$ .

**ĐS:**  $3(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ .

c)  $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$ .

**ĐS:**  $(x - 1)(x - \sqrt{2})$ .

d)  $x^2 - mx + m - 1$ .

**ĐS:**  $(x - 1)(x - m + 1)$ .

**Ví dụ 20.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^2 - 3x - 4$ .

**ĐS:**  $(x + 1)(x - 4)$ .

b)  $4x^2 - 3x - 1$ .

**ĐS:**  $4(x - 1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$ .

c)  $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$ .

**ĐS:**  $(x - 1)(x - \sqrt{3})$ .

d)  $x^2 - mx - m - 1$ .

**ĐS:**  $(x + 1)(x - m - 1)$ .

**Dạng 5: Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai**

Xét phương trình bậc hai một ẩn  $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ . Khi đó

- Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi  $P < 0$ .
- Phương trình có hai nghiệm cùng dấu khi và chỉ khi  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .
- Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .
- Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$ .

**Ví dụ 21.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình

- a) Có hai nghiệm trái dấu. **ĐS:**  $m < 1$ .
- b) Có hai nghiệm phân biệt. **ĐS:** mọi  $m$ .
- c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu. **ĐS:**  $m > 1$ .
- d) Có hai nghiệm dương phân biệt. **ĐS:**  $m > 1$ .
- e) Có hai nghiệm âm phân biệt. **ĐS:** không tồn tại  $m$ .

**Ví dụ 22.** Cho phương trình  $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình

- a) Có hai nghiệm trái dấu. **ĐS:**  $m > -1$ .
- b) Có hai nghiệm phân biệt. **ĐS:** mọi  $m$ .
- c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu. **ĐS:**  $m < -1$ .
- d) Có hai nghiệm dương phân biệt. **ĐS:** không tồn tại.
- e) Có hai nghiệm âm phân biệt. **ĐS:**  $m < -1$ .

**Dạng 6: Xác định điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn hệ thức cho trước**

- Bước 1: Điều kiện để phương trình có nghiệm  $\Delta \geq 0$ .
- Bước 2: Từ hệ thức cho trước và hệ thức Vi-ét, ta tìm được điều kiện của tham số.

**Ví dụ 23.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + m = 0$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 10$ . **ĐS:**  $m = -3$ .

**Ví dụ 24.** Cho phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 1$ . **ĐS:**  $m = \frac{3}{2}$ .

### **C. BÀI TẬP VẬN DỤNG**

**Bài 1.** Không giải các phương trình, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

a)  $x^2 - 5x - 7 = 0$ . **ĐS:**  $S = 5, P = -7$ .

b)  $-x^2 - 3x + 12 = 0$ . **ĐS:**  $S = -3, P = -12$ .

c)  $\sqrt{2}x^2 - 4x - 8 = 0$ . **ĐS:**  $S = 2\sqrt{2}, P = -4\sqrt{2}$ .

d)  $6x^2 - 5x = 2$ . **ĐS:**  $S = \frac{5}{6}, P = -\frac{1}{3}$ .

**Bài 2.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 3x - 5 = 0$ . Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức

a)  $A = 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2$ . **ĐS:** 4.

b)  $B = x_1^2 + x_2^2$ . **ĐS:** 19.

c)  $C = (x_1 - x_2)^2$ . **ĐS:** 29.

d)  $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ . **ĐS:**  $-\frac{19}{5}$ .

**Bài 3.** Tính nhẩm các nghiệm của phương trình sau

a)  $x^2 - 5x - 6 = 0$ . **ĐS:**  $\{-1; -6\}$ .

b)  $2x^2 + 7x + 5 = 0$ . **ĐS:**  $\{-1; 5\}$ .

c)  $x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - 2 + \sqrt{5} = 0$ . **ĐS:**  $\{-1; 2 - \sqrt{5}\}$ .

d)  $x^2 - 2x + 15 = 0$ . **ĐS:** vô nghiệm.

**Bài 4.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau

a)  $u + v = 5$  và  $uv = -14$ . **ĐS:**  $-2$  và  $7$ .

b)  $u + v = -4$  và  $uv = -21$ . **ĐS:**  $3$  và  $-7$ .

**Bài 5.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\sqrt{3} - 1$  và  $\sqrt{3} + 1$ . **ĐS:**  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ .

**Bài 6.** Cho phương trình  $x^2 - 5x - 2 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1}$  và  $\frac{1}{x_2}$ . **ĐS:**  $2x^2 + 5x - 1 = 0$ .

**Bài 7.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a)  $x^2 + 3x - 4$ . **ĐS:**  $(x-1)(x+4)$ .

b)  $4x^2 + 5x + 1$ . **ĐS:**  $4(x+1)\left(x + \frac{1}{4}\right)$ .

c)  $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$ . **ĐS:**  $(x-1)(x + \sqrt{2})$ .

d)  $x^2 - (m+1)x + m$ . **ĐS:**  $(x-1)(x-m)$ .

**Bài 8.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình

a) Có hai nghiệm phân biệt. **ĐS:** mọi  $m$ .

b) Có hai nghiệm phân biệt trái dấu. **ĐS:**  $m < 1$ .

c) Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu. **ĐS:**  $m > 1$ .

d) Có hai nghiệm dương phân biệt. **ĐS:**  $m > 1$ .

e) Có hai nghiệm âm phân biệt. **ĐS:** không tồn tại  $m$ .

**Bài 9.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình

a) Có nghiệm. **ĐS:** mọi  $m$ .

b) Có một nghiệm bằng 2. Tìm nghiệm còn lại. **ĐS:**  $m = 2$ ,  $x_2 = 0$ .

c) Có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 8$ . **ĐS:**  $m = 0$  hoặc  $m = \frac{5}{2}$ .

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Ví dụ 1.** Đối với mỗi phương trình sau, ký hiệu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phương trình (nếu có) Không giải phương trình hãy điền vào chỗ trống

a)  $x^2 + 4x - 5 = 0, \Delta' = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

b)  $4x^2 + 4x + 1 = 0, \Delta' = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

c)  $3x^2 - x - 3 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

d)  $x^2 - 7x + 5 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

**Lời giải.**

a)  $x^2 + 4x - 5 = 0, \Delta' = (2)^2 - (-5) = 9, x_1 + x_2 = -4, x_1 x_2 = -5.$

b)  $4x^2 + 4x + 1 = 0, \Delta' = 0, x_1 + x_2 = -1, x_1 x_2 = \frac{1}{4}.$

c)  $3x^2 - x - 3 = 0, \Delta = 37, x_1 + x_2 = \frac{1}{3}, x_1 x_2 = -1.$

d)  $x^2 - 7x + 5 = 0, \Delta = 29, x_1 + x_2 = 7, x_1 x_2 = 5.$

**Ví dụ 2.** Đối với mỗi phương trình sau, ký hiệu  $x_1, x_2$  là hai nghiệm phương trình (nếu có) Không giải phương trình hãy điền vào chỗ trống

a)  $x^2 + 3x - 4 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

b)  $x^2 - 6x + 9 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

c)  $2x^2 - x - 5 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

d)  $x^2 - 5x - 1 = 0, \Delta = \dots, x_1 + x_2 = \dots, x_1 x_2 = \dots$

**Lời giải.**

a)  $x^2 + 3x - 4 = 0, \Delta = 25, x_1 + x_2 = -3, x_1 x_2 = -4.$

b)  $x^2 - 6x + 9 = 0, \Delta = 0, x_1 + x_2 = 6, x_1 x_2 = 9.$

c)  $2x^2 - x - 5 = 0, \Delta = 41, x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, x_1 x_2 = -\frac{5}{2}.$

d)  $x^2 - 5x - 1 = 0, \Delta = 29, x_1 + x_2 = 5, x_1 x_2 = -1.$

**Ví dụ 3.** Không giải phương trình sau, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

**a)**  $x^2 - 3x - 5 = 0$ .

**b)**  $5x^2 + 7x - 12 = 0$ .

**c)**  $4x^2 - 7x - 2 = 0$ .

**d)**  $\sqrt{3}x^2 - 21x - 12 = 0$ .

**Lời giải.**

Tất cả các phương trình trình đã cho đều có tích  $ac < 0$  nên luôn có nghiệm.

**a)**  $x^2 - 3x - 5 = 0$ .  $x_1 + x_2 = 3$ ,  $x_1x_2 = -5$ .

**b)**  $5x^2 + 7x - 12 = 0$ .  $x_1 + x_2 = -\frac{7}{5}$ ,  $x_1x_2 = -\frac{12}{5}$ .

**c)**  $4x^2 - 7x - 2 = 0$ .  $x_1 + x_2 = \frac{7}{4}$ ,  $x_1x_2 = -\frac{1}{2}$ .

**d)**  $\sqrt{3}x^2 - 21x - 12 = 0$ .  $x_1 + x_2 = 7\sqrt{3}$ ,  $x_1x_2 = -4\sqrt{3}$ .

**Ví dụ 4.** Không giải phương trình sau, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

**a)**  $x^2 - 2x - 5 = 0$ .

**b)**  $-5x^2 + 3x + 7 = 0$ .

**c)**  $5x^2 - 7x - 3 = 0$ .

**d)**  $\sqrt{2}x^2 - 10x - 2 = 0$ .

**Ví dụ 5.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x - 1 = 0$ . Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

**a)**  $A = x_1^2 + x_2^2$ .

**b)**  $B = x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ .

**c)**  $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ .

**d)**  $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ .

**Lời giải.**

Phương trình có tích  $ac = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$  nên có nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và  $x_1, x_2 \neq 0$ . Theo định lý Vi-ét, ta có  $x_1 + x_2 = 2$  và  $x_1x_2 = -1$ .

**a)**  $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2^2 - 2 \cdot (-1) = 6$ .

**b)**  $B = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = (-1) \cdot 2 = -2$ .

**c)**  $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{2}{-1} = -2$ .

**d)**  $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{6}{-1} = -6$ .

**Ví dụ 6.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - x - 3 = 0$ . Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức sau

**a)**  $A = x_1^2 + x_2^2$ .

**b)**  $B = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ .

**c)**  $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ .

**d)**  $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ .

**Lời giải.**

Phương trình có tích  $ac = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$  nên có nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  và  $x_1, x_2 \neq 0$ . Theo định lý Vi-ét, ta có  $x_1 + x_2 = 1$  và  $x_1 x_2 = -3$ .

**a)**  $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1^2 - 2 \cdot (-3) = 7$ .

**b)**  $B = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -3 \cdot 1 = -3$ .

**c)**  $C = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ .

**d)**  $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$ .

**Ví dụ 7.** Xét tổng  $a + b + c$  hoặc  $a - b + c$  rồi tính nhằm các nghiệm của phương trình sau

**a)**  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

**b)**  $3x^2 + 7x - 10 = 0$ .

**c)**  $3x^2 + 4x + 1 = 0$ .

**d)**  $\sqrt{3}x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0$ .

**Lời giải.**

**a)**  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .  $a + b + c = 1 + (-3) + 2 = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = 2$ .

**b)**  $3x^2 + 7x - 10 = 0$ .  $a + b + c = 3 + 7 + (-10) = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{10}{3}$ .

**c)**  $3x^2 + 4x + 1 = 0$ .  $a - b + c = 3 - 4 + 1 = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$ .

**d)**  $\sqrt{3}x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0$ .  $a + b + c = \sqrt{3} + (-1) + 1 - \sqrt{3} = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = 1, x_2 = \frac{\sqrt{3} - 3}{3}$ .

**Ví dụ 8.** Xét tổng  $a + b + c$  hoặc  $a - b + c$  rồi tính nhằm các nghiệm của phương trình sau

**a)**  $x^2 + 3x - 4 = 0$ .

**b)**  $2x^2 + 7x + 5 = 0$ .

**c)**  $6x^2 - 5x - 1 = 0$ .

**d)**  $x^2 + \sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2} = 0$ .

**Lời giải.**

**a)**  $x^2 + 3x - 4 = 0$ .  $a + b + c = 1 + 3 + (-4) = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = 1, x_2 = -4$ .

**b)**  $2x^2 + 7x + 5 = 0$ .  $a - b + c = 1 - 7 + 5 = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -1, x_2 = -\frac{5}{2}$ .

**c)**  $6x^2 - 5x - 1 = 0$ .  $a + b + c = 6 + (-5) + (-1) = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{6}$ .

**d)**  $x^2 + \sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2} = 0$ .  $a - b + c = 1 - \sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2}) = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -1, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ .

**Ví dụ 9.** Sử dụng định lý Vi-ét tính nhẩm nghiệm của phương trình

**a)**  $x^2 - 7x + 10 = 0$ .

**b)**  $x^2 + 7x + 10 = 0$ .

**Lời giải.**

**a)**  $x^2 - 7x + 10 = 0$ . Theo định lý Vi-ét, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 5$ .

**b)**  $x^2 + 7x + 10 = 0$ . Theo định lý Vi-ét, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -5$ .

**Ví dụ 10.** Sử dụng định lý Vi-ét tính nhẩm nghiệm của phương trình

**a)**  $x^2 + 5x + 6 = 0$ .

**b)**  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

**Lời giải.**

**a)**  $x^2 + 5x + 6 = 0$ . Theo định lý Vi-ét, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -3$ .

**b)**  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Theo định lý Vi-ét, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$ .

**Ví dụ 11.** Cho phương trình  $x^2 - mx + m - 1 = 0$ . Chứng minh phương trình đã cho luôn một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại.

**Lời giải.**

Ta có  $a + b + c = 1 + (-m) + m - 1 = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = 1, x_2 = m - 1$ .

**Ví dụ 12.** Cho phương trình  $-x^2 + mx + m + 1 = 0$ . Chứng minh phương trình đã cho luôn một nghiệm không phụ thuộc vào  $m$ . Tìm nghiệm còn lại.

**Lời giải.**

Ta có  $a - b + c = -1 - m + m + 1 = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -1, x_2 = -m - 1$ .

**Ví dụ 13.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau

**a)**  $u + v = 5$  và  $uv = -14$ .

**b)**  $u + v = 5$  và  $uv = -24$ .

**Lời giải.**

**a)**  $u + v = 5$  và  $uv = -14$ .  $u$  và  $v$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -2. \end{cases}$

Vậy  $\begin{cases} u = 7 \\ v = -2 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} u = -2 \\ v = 7. \end{cases}$

**b)**  $u + v = 5$  và  $uv = -24$ .  $u$  và  $v$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -33. \end{cases}$

Vậy  $\begin{cases} u = 8 \\ v = -3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} u = -3 \\ v = 8. \end{cases}$

**Ví dụ 14.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau

**a)**  $u + v = -6$  và  $uv = -16$ .

**b)**  $u + v = 1$  và  $uv = \frac{1}{4}$ .

**Lời giải.**

**a)**  $u + v = -6$  và  $uv = -16$ .  $u$  và  $v$  là nghiệm của phương trình  $x^2 + 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8. \end{cases}$

Vậy  $\begin{cases} u = 2 \\ v = -8 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} u = -8 \\ v = 2. \end{cases}$

**b)**  $u + v = 1$  và  $uv = \frac{1}{4}$ .  $u$  và  $v$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

Vậy  $u = v = \frac{1}{2}$ .

**Ví dụ 15.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\sqrt{2} - 1$  và  $\sqrt{2} + 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$  và  $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1$  nên hai số đã cho là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0.$$

**Ví dụ 16.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là 5 và  $-7$ .

**Lời giải.**

Ta có  $5 + (-7) = -2$  và  $5 \cdot (-7) = -35$  nên hai số đã cho là nghiệm của phương trình

$$x^2 + 2x - 35 = 0.$$

**Ví dụ 17.** Cho phương trình  $x^2 - 3x + 1 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  và  $x_1^2 + x_2^2$ .

**Lời giải.**

Theo định lý Vi-ét, ta có  $x_1 + x_2 = 3$  và  $x_1 x_2 = 1$ .

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3, x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7.$$

Vậy phương trình thỏa đề bài là  $x^2 - 10x + 21 = 0$ .

**Ví dụ 18.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + 2 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1}$  và  $\frac{1}{x_2}$ .

**Lời giải.**

Theo định lý Vi-ét, ta có  $x_1 + x_2 = 4$  và  $x_1 x_2 = 2$ .  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{4}{2} = 2$  và  $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}$ .

Vậy phương trình thỏa đề bài là  $x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$ .

**Ví dụ 19.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

**a)**  $x^2 + 2x - 3$ .

**b)**  $3x^2 - 2x - 1$ .

**c)**  $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$ .

**d)**  $x^2 - mx + m - 1$ .

**Lời giải.**

**a)**  $x^2 + 2x - 3$ .  $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$ . Vậy  $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ .

**b)**  $3x^2 - 2x - 1$ .  $3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$ . Vậy  $3x^2 - 2x - 1 = 3(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ .

$$\text{c) } x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} \cdot x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{2}. \end{cases} \text{ Vậy}$$

$$x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = (x - 1)(x - \sqrt{2}).$$

$$\text{d) } x^2 - mx + m - 1 \cdot x^2 - mx + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = m - 1. \end{cases} \text{ Vậy } x^2 - mx + m - 1 = (x - 1)(x - m + 1).$$

**Ví dụ 20.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

**a)**  $x^2 - 3x - 4.$

**b)**  $4x^2 - 3x - 1.$

**c)**  $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}.$

**d)**  $x^2 - mx - m - 1.$

**Lời giải.**

$$\text{a) } x^2 - 3x - 4 \cdot x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4).$$

$$\text{b) } 4x^2 - 3x - 1 \cdot 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } 4x^2 - 3x - 1 = 4(x - 1)\left(x + \frac{1}{4}\right).$$

$$\text{c) } x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} \cdot x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = (x - 1)(x - \sqrt{3}).$$

$$\text{d) } x^2 - mx - m - 1 \cdot x^2 - mx - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = m + 1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^2 - mx - m - 1 = (x + 1)(x - m - 1).$$

**Ví dụ 21.** Cho phương trình  $x^2 - 2(m + 2)x + m - 1 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình

**a)** Có hai nghiệm trái dấu.

**b)** Có hai nghiệm phân biệt.

**c)** Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

**d)** Có hai nghiệm dương phân biệt.

**e)** Có hai nghiệm âm phân biệt.

**Lời giải.**

$$\Delta = (-2(m+2))^2 - 4(m-1) = 4m^2 + 12m + 20 = (2m+3)^2 + 11. S = \frac{-b}{a} = 2(m+2). P = \frac{c}{a} = m-1.$$

**a)** Phương trình có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ .

**b)** Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+3)^2 + 11 > 0$ , đúng với mọi  $m$ .

**c)** Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = \frac{a}{c} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$

**d)** Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = \frac{-b}{a} > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ 2(m+2) > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$

**e)** Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = \frac{-b}{a} < 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 + 11 > 0 \\ 2(m+2) < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases} \text{ (Vô}$

lý). Vậy không tồn tại  $m$ .

**Ví dụ 22.** Cho phương trình  $x^2 - 2mx - m - 1 = 0$ . Tìm  $m$  để phương trình

**a)** Có hai nghiệm trái dấu.

**b)** Có hai nghiệm phân biệt.

**c)** Có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

**d)** Có hai nghiệm dương phân biệt.

**e)** Có hai nghiệm âm phân biệt.

**Lời giải.**

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(-m-1) = 4m^2 + 4m + 4 = (2m+1)^2 + 3. S = \frac{-b}{a} = 2m. P = \frac{c}{a} = -m-1.$$

**a)** Phương trình có hai nghiệm trái dấu  $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow -m-1 < 0 \Leftrightarrow m > -1$ .

**b)** Phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta = (2m+1)^2 + 3 > 0$ , đúng với mọi  $m$ .

**c)** Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 + 3 > 0 \\ -m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$

$$\text{d) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 + 3 > 0 \\ 2m > 0 \\ -m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \end{cases} \text{ (Vô}$$

lý). Vậy không tồn tại  $m$ .

$$\text{e) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 + 3 > 0 \\ 2m < 0 \\ -m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

**Ví dụ 23.** Cho phương trình  $x^2 - 4x + m = 0$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 10$ .

**Lời giải.**

$$\Delta = (-4)^2 - 4m = 16 - 4m.$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 16 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

Theo định lý Vi-et ta có  $x_1 + x_2 = 4$  và  $x_1 x_2 = m$ . Ta có

$$x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10 \Leftrightarrow 4^2 - 2m = 10 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy  $m = 3$ .

**Ví dụ 24.** Cho phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 1$ .

**Lời giải.**

$$\Delta = (-2)^2 - 4(m-1) = 4 - 4m + 4 = 8 - 4m.$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 8 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Theo định lý Vi-et ta có  $x_1 + x_2 = 2$  và  $x_1 x_2 = m - 1$ . Ta có

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow (m-1)2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy  $m = \frac{3}{2}$ .

**Bài 1.** Không giải các phương trình, tính tổng và tích các nghiệm phương trình sau

a)  $x^2 - 5x - 7 = 0$ .

b)  $-x^2 - 3x + 12 = 0$ .

c)  $\sqrt{2}x^2 - 4x - 8 = 0$ .

d)  $6x^2 - 5x = 2$ .

**Lời giải.**

Tất cả các phương trình đã cho đều có tích  $ac < 0$  nên luôn có nghiệm.2

a)  $x^2 - 5x - 7 = 0$ .  $x_1 + x_2 = 5$ ,  $x_1x_2 = -7$ .

b)  $-x^2 - 3x + 12 = 0$ .  $x_1 + x_2 = -3$ ,  $x_1x_2 = -12$ .

c)  $\sqrt{2}x^2 - 4x - 8 = 0$ .  $x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}$ ,  $x_1x_2 = -4\sqrt{2}$ .

d)  $6x^2 - 5x = 2 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x - 2 = 0$ .  $x_1 + x_2 = \frac{5}{6}$ ,  $x_1x_2 = -\frac{1}{3}$ .

**Bài 2.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 3x - 5 = 0$ . Không giải phương trình hãy tính giá trị của các biểu thức

a)  $A = 3(x_1 + x_2) + x_1x_2$ .

b)  $B = x_1^2 + x_2^2$ .

c)  $C = (x_1 - x_2)^2$ .

d)  $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ .

**Lời giải.**

Theo định lý Vi-ét, ta có  $x_1 + x_2 = 3$  và  $x_1x_2 = -5$ .

a)  $A = 3(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 3 \cdot 3 + (-5) = 4$ .

b)  $B = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2 \cdot (-5) = 19$ .

c)  $C = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 19 - 2 \cdot (-5) = 29$ .

d)  $D = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{19}{-5} = -\frac{19}{5}$ .

**Bài 3.** Tính nhẩm các nghiệm của phương trình sau2

a)  $x^2 - 5x - 6 = 0$ .

b)  $2x^2 + 7x + 5 = 0$ .

c)  $x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - 2 + \sqrt{5} = 0$ .

d)  $x^2 - 2x + 15 = 0$ .

**Lời giải.**

a)  $x^2 - 5x - 6 = 0$ . Ta có  $a - b + c = 1 - (-5) + (-6) = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -6$ .

b)  $2x^2 + 7x + 5 = 0$ . Ta có  $a - b + c = 2 - 7 + 5 = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 5$ .

c)  $x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - 2 + \sqrt{5} = 0$ . Ta có  $a - b + c = 1 - (\sqrt{5} - 1) - 2 + \sqrt{5} = 0$  nên phương trình có nghiệm  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2 - \sqrt{5}$ .

**d)**  $x^2 - 2x + 15 = 0$ . Ta có  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 15 = -56 < 0$  nên phương trình vô nghiệm.

**Bài 4.** Tìm hai số  $u$  và  $v$  trong mỗi trường hợp sau

**a)**  $u + v = 5$  và  $uv = -14$ .

**b)**  $u + v = -4$  và  $uv = -21$ .

**Lời giải.**

**a)**  $u + v = 5$  và  $uv = -14$ . Hai số  $u$  và  $v$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 7. \end{cases}$

Vậy  $\begin{cases} u = -2 \\ v = 7 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} u = 7 \\ v = -2. \end{cases}$

**b)**  $u + v = -4$  và  $uv = -21$ . Hai số  $u$  và  $v$  là nghiệm của phương trình  $x^2 + 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 3. \end{cases}$

Vậy  $\begin{cases} u = -7 \\ v = 3 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} u = 3 \\ v = -7. \end{cases}$

**Bài 5.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\sqrt{3} - 1$  và  $\sqrt{3} + 1$ .

**Lời giải.**

Ta có  $(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3}$  và  $(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} - 1) = 2$  nên hai số đã cho là nghiệm của phương trình  $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ .

**Bài 6.** Cho phương trình  $x^2 - 5x - 2 = 0$  có hai nghiệm là  $x_1$  và  $x_2$ . Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là  $\frac{1}{x_1}$  và  $\frac{1}{x_2}$ .

**Lời giải.**

Phương trình có tích  $ac = -2 < 0$  nên có nghiệm.

Theo định lý Vi-et ta có  $x_1 + x_2 = 5$  và  $x_1 x_2 = -2$ . Ta có  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$  và

$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$  nên phương trình cần tìm là  $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 1 = 0$ .

**Bài 7.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

**a)**  $x^2 + 3x - 4$ .

**b)**  $4x^2 + 5x + 1$ .

**c)**  $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$ .

**d)**  $x^2 - (m + 1)x + m$ .

**Lời giải.**



**c)** Có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 = 8$ .

**Lời giải.**

**a)**  $\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m-2) = m^2 - 3m + 3 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  nên phương trình luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

**b)** Theo định lý Vi-ét, ta có  $x_1 + x_2 = 2(m-1)$  và  $x_1 x_2 = m-2$ . Phương trình có nghiệm  $x_1 = 2$  ta có

$$\begin{cases} 2 + x_2 = 2(m-1) \\ 2x_2 = m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - 2m = -4 \\ 2x_2 - m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ m = 2. \end{cases}$$

Vậy  $m = 2$  và nghiệm còn lại là  $0$ .

**c)**  $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 8 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 2(m-2) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{5}{2}. \end{cases}$

Vậy  $m = 0$  hoặc  $m = \frac{5}{2}$ .

**--- HẾT ---**