

Người làm: Thu Huyền

Zalo: Thu Huyền - số đt zalo: 0963867829

Email: huyen070479@gmail.com

CD1: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC, TÌM GTLN, GTNN**Dạng 1. TÌM GTLN, GTNN****B. Tự luận****Câu 1. (HSG 7 huyện Hương Khê – Hà Tĩnh 2022 - 2023)**

Cho biểu thức: $P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} (x \neq 2023)$. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải

$$P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} = \frac{3 - 2(x - 2023)}{x - 2023} = \frac{3}{x - 2023} - 2 (x \neq 2023)$$

Biểu thức P đạt GTNN khi và chỉ khi $\frac{3}{x - 2023}$ có GTNN $\Rightarrow x - 2023$ là số âm lớn nhất (vì x nguyên) $\Rightarrow x - 2023 = -1 \Rightarrow x = 2022$ (TM)

Khi đó GTNN của P là -5 khi $x = 2022$.

Vậy GTNN của P là -5 khi $x = 2022$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thái Thụy – Thái Bình 2022 - 2023)

Cho biểu thức $E = \frac{a - 5}{a - 2}$ với a là số nguyên. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của E ?

Lời giải

Điều kiện: $a \neq 2$

$$E = \frac{a - 5}{a - 2} = \frac{a - 2 - 3}{a - 2} = 1 - \frac{3}{a - 2};$$

E nhận giá trị nguyên khi $\frac{3}{a - 2}$ là số nguyên.

$$\Rightarrow 3 : a - 2 \Rightarrow a - 2 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow a \in \{3; 5; 1; -1\}$$

Thử lại các trường hợp thì ta tính được giá trị nhỏ nhất của E bằng -2 khi $a = 3$

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của E bằng -2 khi $a = 3$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Sông Lô 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{14 - x}{4 - x}$ với x là số nguyên khác 4.

Lời giải

$$P = \frac{14 - x}{4 - x} = 1 + \frac{10}{4 - x}$$

$$P \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow \frac{10}{4 - x} \text{ đạt GTLN}$$

$$\text{Nếu } 4 - x > 0 \text{ thì } \frac{10}{4 - x} > 0$$

$$\text{Nếu } 4 - x < 0 \text{ thì } \frac{10}{4 - x} < 0$$

Để $\frac{10}{4 - x}$ đạt GTLN thì $4 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất có thể $\Rightarrow 4 - x = 1$.
 $\Rightarrow x = 3$ (TM)

Khi $x = 3$ thì $P = 11$.

Vậy P có GTLN bằng 11 khi $x = 3$

Câu 4. (HSG 7 Trường Đôn Nghĩa – Hưng Hà 2022 - 2023)

Với giá trị nguyên nào của x thì biểu thức $A = \frac{14 - x}{4 - x}$ có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị đó.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{14 - x}{4 - x} = 1 + \frac{10}{4 - x}$$

$$A \text{ đạt GTLN} \Leftrightarrow \frac{10}{4 - x} \text{ đạt GTLN}$$

$$\text{Nếu } 4 - x > 0 \text{ thì } \frac{10}{4 - x} > 0$$

$$\text{Nếu } 4 - x < 0 \text{ thì } \frac{10}{4 - x} < 0$$

Để $\frac{10}{4 - x}$ đạt GTLN thì $4 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất có thể $\Rightarrow 4 - x = 1$.
 $\Rightarrow x = 3$ (TM)

Khi $x = 3$ thì $A = 11$.

Vậy A có GTLN bằng 11 khi $x = 3$

Câu 5. (HSG 7 Trường Lê Quý Đôn – Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm GTNN của biểu thức : $A = |x - 2022| + |x - 2023|$

Lời giải

$$A = |x - 2022| + |x - 2023| = |x - 2022| + |2023 - x| \geq |x - 2022 + 2023 - x| = 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x - 2022)(2023 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2022 \leq x \leq 2023$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 1 \Leftrightarrow 2022 \leq x \leq 2023$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = |x - 2022| + |x - 2023|$

Lời giải

$$\text{Ta có: } C = |x - 2022| + |x - 2023|$$

$$C = |x - 2022| + |2023 - x| \geq |x - 2022 + 2023 - x|$$

$$\Rightarrow C \geq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: } (x - 2022)(2023 - x) \geq 0 \Rightarrow 2022 \leq x \leq 2023$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là 1 khi và chỉ khi $2022 \leq x \leq 2023$

Câu 7. (HSG 7 Trường Lý Nam Đế huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm x nguyên để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $B = \frac{2011}{2012 - |x - 2010|}$.

Lời giải

Ta có: $-|x - 2010| \leq 0$ với mọi $x \Rightarrow 2012 - |x - 2010| \leq 2012$ với mọi x .

$2012 - |x - 2010| < 0 \Rightarrow |x - 2010| > 2012 \Rightarrow \begin{cases} x > 4022 \\ x < -2 \end{cases}$.

* Trường hợp 1:

Khi đó, $B < 0$. B nhỏ nhất khi và chỉ khi $-B = \frac{2011}{|x - 2010| - 2012}$ đạt giá trị dương lớn nhất khi và chỉ khi $|x - 2010| - 2012 = 1$

$$\Leftrightarrow |x - 2010| = 2013 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4023 \\ x = -3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Khi đó, B nhỏ nhất bằng -2011 .

* Trường hợp 2: $2012 - |x - 2010| > 0 \Rightarrow |x - 2010| < 2012 \Rightarrow -2 < x < 4022$

Khi đó, $0 < 2012 - |x - 2010| \leq 2012 \Rightarrow B \geq \frac{2011}{2012}$.

Vậy $x = -3$ hoặc $x = 4023$, biểu thức $B = \frac{2011}{2012 - |x - 2010|}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2011 .

Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

$$D = \frac{2(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 100}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Lời giải

$$D = \frac{2(x-1)^2 + 2(y-2)^2 + 100}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$$

$$= \frac{2[(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2] - 4 + 100}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$$

$$= 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ (y-2)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Vì

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq \frac{96}{2} = 48$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{96}{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2} \leq 50$$

$$\Rightarrow D \leq 50$$

$$\text{khi } \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (y-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức: D là 50 khi $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Câu 9. (HSG 7 huyện Hương Khê – Hà Tĩnh 2022 - 2023)

$$C = \frac{2|x-1|+3}{|x-1|+1}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

$$C = \frac{2|x-1|+3}{|x-1|+1} = \frac{2|x-1|+2+1}{|x-1|+1} = 2 + \frac{1}{|x-1|+1}$$

Ta có

$$\text{Vì } |x-1| \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow |x-1|+1 \geq 1 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-1|+1} \leq 1 \text{ với mọi } x.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-1|+1} + 2 \leq 3 \text{ với mọi } x.$$

Vậy giá trị lớn nhất C là 3 khi và chỉ khi $x=1$

Câu 10. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \frac{2016x-2016}{3x+2}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$M = \frac{2016x-2016}{3x+2} = \frac{672(3x+2)-2016-1344}{3x+2} = 672 - \frac{3360}{3x+2}$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow \frac{3360}{3x+2} \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Xét } 3x+2 < 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x+2} < 0 \quad (1)$$

$$\text{Xét } 3x+2 > 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x+2} > 0$$

$$\frac{3360}{3x+2} \text{ lớn nhất khi } 3x+2 \text{ nhỏ nhất}$$

Mà x nguyên, $3x+2$ dương và $3x+2$ chia 3 dư 2 nên $3x+2=2$ nên $x=0$

$$\text{Khi đó: } \frac{3360}{3x+2} = \frac{3360}{3 \cdot 0 + 2} = 1680 \quad (2)$$

$$\text{So sánh (1) và (2) thì } \frac{3360}{3x+2} \text{ có giá trị lớn nhất bằng } 1680$$

Vậy $M_{\min} = -1008$ khi $x=0$.

Dạng 2. 1. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ CHỨNG MINH TỔNG PHẦN SỐ TỰ NHIÊN

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022} + 1} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} \right) - \frac{1}{2^{2023}} \\ A &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{2022}} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} \right) - \frac{1}{2^{2023}} \\ A &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2022} \cdot \frac{1}{2^{2023}} - \frac{1}{2^{2023}} \\ A &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2006}} = 1 + 2016 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2016}} = \frac{2023}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^{2023}} \right) > \frac{2023}{2} \\ \text{Vậy } A &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1} > \frac{2023}{2} \end{aligned}$$

Dạng 2. 2. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ CHỨNG MINH TỔNG LŨY THỪA

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường Tri Thức tỉnh Đồng Nai 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} &= \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) \\ &< \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} \right) = \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{200} < \frac{1}{8} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ được xác định như sau:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Lời giải

Với mọi $k \geq 2$, ta có: $\frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$).

$$\text{Lại có: } \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$$

$$\text{Cho } k=2;3;\dots;n \text{ ta có: } \frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \dots; \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 1 + 1 = 2$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tiên Du Bắc Ninh 2022 - 2023)

$$\text{Cho } A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}. \text{ Chứng minh rằng } A < \frac{1}{50}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$$

$$7A = 1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}}$$

$$\Rightarrow 7A - A = \left(1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}} \right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 6A = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} - \frac{100}{7^{100}}$$

$$\text{Đặt } B = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}}$$

$$\Rightarrow 7B = 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 7B - B = \left(7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} \right) - \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} \right)$$

$$6B = 7 - \frac{1}{7^{99}} < 7$$

$$\Rightarrow B < \frac{7}{6}$$

$$\text{Lại có: } 6A = B - \frac{100}{7^{100}} < B \Rightarrow 6A < \frac{7}{6} \Rightarrow A < \frac{7}{36}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{7}{36}.$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{n.n} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

Câu 5. (HSG 7 Trường Lê Quý Đôn - huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$

Ta có:

$$7^2 A = 7^2 \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-2}} - \frac{1}{7^{4n}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$49A + A = \left(1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}} \right) + \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $D = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$. So sánh D với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Vì D là tích của 99 số âm nên:

$$-D = \left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{9} \right) \left(1 - \frac{1}{16} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2} \right)$$

$$-D = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{8}{3^2} \cdot \frac{15}{4^2} \dots \frac{9999}{100^2} = \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{2.4}{3^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \dots \frac{99.101}{100^2}$$

$$-D = \frac{1.2.3.4.5 \dots 98.99}{2.3.4.5 \dots 99.100} \cdot \frac{3.4.5 \dots 100.101}{2.3.4 \dots 99.100}$$

$$D = \frac{1}{100} \cdot \frac{101}{2} = \frac{101}{200} > \frac{100}{200}$$

$$D > \frac{1}{2}$$

$$D < -\frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 7. (HSG 7 Trường Lý Nam Đế - huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$

Lời giải

Tổng A không có thừa số chung, do vậy ta đánh giá từng số hạng

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{2}{2.4}$$

$$\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25} < \frac{2}{24} = \frac{2}{4.6}$$

$$\frac{2}{7^2} = \frac{2}{49} < \frac{2}{48} = \frac{2}{6.8}$$

.....

$$\frac{2}{2007^2} < \frac{2}{2006.2008}$$

$$A < \frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \dots + \frac{2}{2006.2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $S_1 = 1 + \frac{1}{5}; S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}; \dots; S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} (n \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$$

Lời giải

Ta có $S_n > S_{n-1} > \dots > S_2 > S_1 > 1$

$$\Rightarrow S_n^2 > S_{n-1}^2 > \dots > S_2^2 > S_1^2 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$\Rightarrow 5A = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{5^n} < 1$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{1}{4}$$

Dạng 2. 3. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ CHỨNG MINH TÍCH CỦA MỘT DÃY

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà – Thái Bình 2022 - 2023)

Cho $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $P < \frac{1}{10}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Cho n các giá trị từ 1 đến 99 ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &< \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{5}{6}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots; \frac{99}{100} < \frac{100}{101} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} &< \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{100}{101} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{100}{101} \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{99}{100} \right)^2 &< \frac{1}{101} \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{1}{4048} &< \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025} \\ \text{Với mọi } n \geq 1 \text{ ta có: } \frac{n^2}{(n+1)^2} &= \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} < \frac{n^2}{n^2 + 2n} = \frac{n}{n+2} \\ \text{Từ đó suy ra: } \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 &< \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \dots \frac{2021}{2023} \cdot \frac{2023}{2025} = \frac{1}{2025} \\ \text{Với mọi } n \geq 2 \text{ ta có: } \frac{n^2}{(n+1)^2} &> \frac{n^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n-1}{n+1} \\ \text{Từ đó suy ra: } \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 &> \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} \dots \frac{2020}{2022} \cdot \frac{2022}{2024} = \frac{1}{4048} \end{aligned}$$

Dạng 3: BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG CHỮ

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn Hà Đông 2022 - 2023)

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh: $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

Trong tam giác, tổng độ dài hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại nên ta có:

$$b + c > a \Rightarrow a(b + c) > a^2 \Rightarrow ab + ac > a^2$$

Tương tự ta có: $bc + ba > b^2$ và $ac + cb > c^2$

Cộng theo vế ta được: $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$

Vậy a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$

Câu 2. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2022 - 2023)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a-1 \leq 0 \\ b-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab - a - b + 1 \geq 0$$

Vì

$$\Rightarrow ab+1 \geq a+b \Rightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (c \geq 0)$$

$$\text{Mà: } \frac{c}{a+b} \leq \frac{2c}{a+b+c} \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c}$$

Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{b}{ac+1} \leq \frac{2b}{a+b+c}$ và $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{2a}{a+b+c}$

$$\text{Cộng theo vế, ta được: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2 \quad (\text{đpcm})$$

Vậy với ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ thì $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$ có giá trị không nguyên.

Lời giải

Với $a, b, c, d > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a+b+c} &> \frac{a+b}{a+b+c+d} \\ \frac{b+c}{b+c+d} &> \frac{b+c}{a+b+c+d} \\ \frac{c+d}{c+d+a} &> \frac{c+d}{a+b+c+d} \\ \frac{d+a}{d+a+b} &> \frac{d+a}{a+b+c+d} \end{aligned}$$

$$\text{Cộng theo vế ta được: } \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} > \frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 2(*)$$

$$\text{Với } a, b, c, d > 0, \text{ ta có: } \frac{a+b+c}{a+b+c} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+d}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d}$$

$$\frac{c}{a+b+c} > \frac{c}{a+b+c+d} \quad (\text{với } a, b, c, d > 0) \text{ nên suy ra: } \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{b+c}{b+c+d} < \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \quad (2)$$

$$\frac{c+d}{c+d+a} < \frac{c+d+b}{a+b+c+d} \quad (3)$$

$$\frac{d+a}{a+b+d} < \frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) cộng theo vế ta được:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < \frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3^{(**)}$$

$$2 < M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3$$

Từ (*) và (**)

Vậy với $a, b, c, d > 0$, M có giá trị không nguyên (đpcm)

Câu 4. (HSG 7 Trường Lê Quý Đôn Huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho ba số dương $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Chứng minh: $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 0; y-1 \leq 0$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy+1 \geq x+y \Rightarrow \frac{1}{xy+1} \leq \frac{1}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{xy+1} \leq \frac{z}{x+y}$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \frac{x}{yz+1} \leq \frac{x}{y+z}; \frac{y}{xz+1} \leq \frac{y}{x+z} \quad (3)$$

$$\text{Cộng từng vế (1) (2) (3) ta có: } \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{x}{y+z} \leq \frac{x+x}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} \leq \frac{2x}{x+y+z}$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \frac{y}{x+z} \leq \frac{2y}{x+y+z}; \frac{z}{x+y} \leq \frac{2z}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \leq \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} \leq 2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra đpcm

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>