

CHỦ ĐỀ 1 : HỆ TRỤC TỌA ĐỘ OXYZ

LÍ THUYẾT

- Trong không gian xét hệ trục $Oxyz$, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O , và trục Oz vuông góc với mặt phẳng Oxy tại O . Các vectơ đơn vị trên từng trục Ox , Oy , Oz lần lượt là $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
- Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.
 - $M(x_M; y_M; z_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$
 - Cho $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$
 - Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ và $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
 - M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \quad \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3) \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
 - $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
 - $\cos \varphi = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$
 - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
 - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$
- Tích có hướng của $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là $[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$
 - Diện tích tam giác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$
 - Thể tích tứ diện $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$
 - Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'}|$
- Một số kiến thức khác
- Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) thì ta có :

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}; z_M = \frac{z_A - kz_B}{1 - k} \quad \text{Với } (k \neq 1)$$
 - G là trọng tâm của tam giác ABC

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$
 - G là trọng tâm của tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

A $m = 2$

B $m = 2 - \sqrt{6}$

C $m = 2 + \sqrt{6}$

D

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1 - 2m}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}} = \frac{1 - 2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2m = \sqrt{3} \sqrt{1 + m^2}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 3 + 3m^2 \quad (\text{điều kiện } m < \frac{1}{2}).$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6} \end{cases}. \text{Đổi chiều điều kiện ta có } m = 2 - \sqrt{6}.$$

VÍ DỤ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = 2; 1; -2$, $\vec{b} = 0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$. Tất cả giá trị của

m để hai vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$ và $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau là

A. $\frac{\pm 26 + \sqrt{2}}{6}$.

B. $\frac{26 \pm \sqrt{2}}{6}$.

C. $\frac{11\sqrt{2} \pm \sqrt{26}}{18}$.

D. $\frac{\pm \sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b} = 2; 2 - 3m\sqrt{2}; -4 + 3m\sqrt{2} \quad \text{và} \quad \vec{v} = m\vec{a} - \vec{b} = 2m; m + \sqrt{2}; -2m - \sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + 2 - 3m\sqrt{2} \cdot m + \sqrt{2} + -4 + 3m\sqrt{2} \cdot -2m - \sqrt{2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow 9m^2\sqrt{2} - 6m - 6\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{\pm \sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}.$$

VÍ DỤ 3: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 1; 1)$,

$D(0; -1; 3)$ Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

D. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

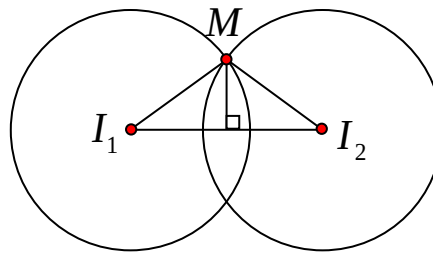
Gọi $M(x; y; z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$$\overrightarrow{AM} = (x; y+1; z-2), \overrightarrow{BM} = (x-2; y+3; z), \overrightarrow{CM} = (x+2; y-1; z-1), \overrightarrow{DM} = (x; y+1; z-3).$$

$$\text{Từ giả thiết: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + (y+1)(y+3) + z(z-2) = 1 \\ x(x+2) + (y+1)(y-1) + (z-1)(z-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1; -2; 1)$, $R_1 = 2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1; 0; 2)$, $R_2 = 2$.



$$\text{Ta có: } I_1I_2 = \sqrt{5}. \text{ Dễ thấy: } r = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

VÍ DỤ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng

AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = 2$.

B. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$.

D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

Lời giải

Chọn B

$$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z); \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59} \\ \overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1) \end{cases}$$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$$

$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2) \Rightarrow BM = \sqrt{118} = 2 \cdot AB.$$

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -3; 7)$, $B(0; 4; 1)$, $C(3; 0; 5)$

và $D(3; 3; 3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:

A. $M(0; 1; -2)$.

B. $M(0; 1; 4)$.

C. $M(0; 1; -4)$.

D. $M(2; 1; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 7; -6)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 6; -4)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \neq 0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2; 1; 4)$.

Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MG}| = 4MG$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0; 1; 4)$.

VÍ DỤ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(7; 2; 3)$, $B(1; 4; 3)$, $C(1; 2; 6)$, $D(1; 2; 3)$

và điểm M tùy ý. Tính độ dài đoạn OM khi biểu thức $P = MA + MB + MC + \sqrt{3}MD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $OM = \frac{3\sqrt{21}}{4}$.

B. $OM = \sqrt{26}$.

C. $OM = \sqrt{14}$.

D. $OM = \frac{5\sqrt{17}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{DA} = (6; 0; 0)$, $\overrightarrow{DB} = (0; 2; 0)$, $\overrightarrow{DC} = (0; 0; 3)$ nên tứ diện $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh D .

Giả sử $M(x+1; y+2; z+3)$.

Ta có $MA = \sqrt{(x-6)^2 + y^2 + z^2} \geq |x-6| \geq 6-x$, $MB = \sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2} \geq |y-2| \geq 2-y$.

$$MC = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \geq |z-3| \geq 3-z, \quad \sqrt{3}MD = \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \sqrt{(x+y+z)^2}$$

$\geq x+y+z$. Do đó $P \geq (6-x) + (2-y) + (3-z) + (x+y+z) = 11$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 11 , khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x = y = z = 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 2-y \geq 0 \\ 3-z \geq 0 \\ x+y+z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Khi đó $M(1; 2; 3)$ suy ra $OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

VÍ DỤ 7: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 1; 4)$, $B(5; -1; 3)$, $C(2; 2; m)$, $D(3; 1; 5)$. Tìm tất cả

giá trị thực của tham số m để A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

A. $m > 6$.

B. $m < 6$.

C. $m \neq 6$.

D. $m = 6$.

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2; -1)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 0; 1)$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (-2; -6; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; m-4)$

Để A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện khi $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$

$$\Leftrightarrow -2 - 6 + 4m - 16 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 6.$$