

MỤC LỤC

	▶ BÀI ③. NHỊ THỨC NEWTON.....	2
	 ①. Tóm tắt kiến thức	
2		
	 ②. Phân dạng toán cơ bản	
2		
	• Dạng ①: Nhị thức Newton.....	2
	 ③. Dạng toán rèn luyện	
4		
	• Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	4
	• Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	17
	• Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	23

A. Tóm tắt kiến thức

Ghi nhớ!

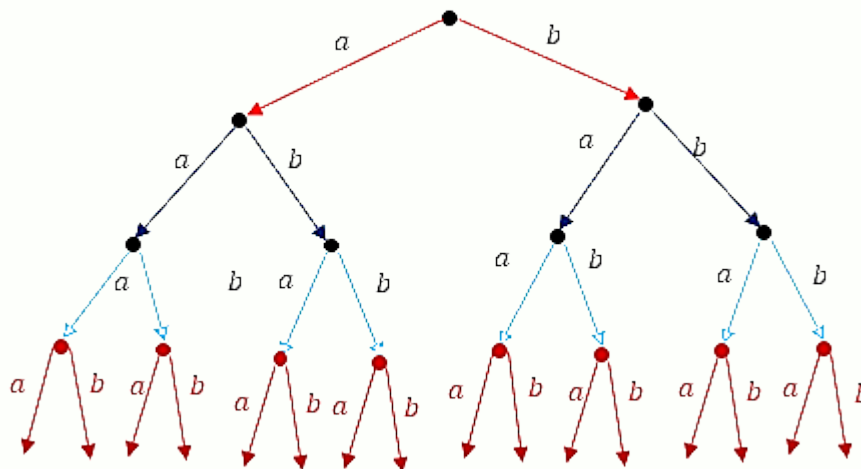
- Ở lớp 8, khi học về hằng đẳng thức, ta đã biết **khai triển**:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

- Quan sát các đơn thức ở vế phải của các đẳng thức trên, hãy nhận xét về quy luật số mũ của a và b . Có thể tìm được cách tính các hệ số của đơn thức trong khai triển $(a+b)^n$ khi $n \in \{4; 5\}$ không?

Sơ đồ hình cây của $(a+b)^4$



$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4$$

B. Phân dạng toán cơ bản

• Dạng 1: Nhị thức Newton

Phương pháp

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5$$

$$\checkmark = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

- 👉 Hai công thức trên gọi là **công thức nhị thức Newton** (gọi tắt là **nhị thức Newton**) $(a+b)^n$ ứng với $n=4$ và $n=5$.

 **Chú ý:** Các hệ số trong khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n$ với $n=0;1;2;3;\dots$ được viết thành từng hàng và xếp thành bảng số như bên. Bảng số này có quy luật: số đầu tiên và số cuối cùng của mỗi hàng đều là 1 ; tổng của hai số liên tiếp cùng hàng bằng số của hàng kế dưới ở vị trí giữa hai số đó (được chỉ bởi mũi tên trên bảng).

Diagram illustrating the construction of the 5th row of Pascal's triangle:

- $n=0$: 1
- $n=1$: 1, 1
- $n=2$: 1, 2, 1
- $n=3$: 1, 3, 3, 1
- $n=4$: 1, 4, 6, 4, 1
- $n=5$: 1, 5, 10, 10, 5, 1

Arrows indicate the addition of the two numbers from the row above to get the current value.

- ✓ Bảng số trên được gọi là **tam giác Pascal** (đặt theo tên của nhà toán học, vật lí học, triết học người Pháp Blaise Pascal, 1623-1662).

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Sử dụng công thức nhị thức Newton, hãy khai triển các biểu thức sau:

a) $(x + 3)^4$

b) $(1 - x)^5$

Lời giải

a) Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned}(x+3)^4 &= 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 3 + 6 \cdot x^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot x \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4 \\&= x^4 + 4 \cdot 3 \cdot x^3 + 6 \cdot 9 \cdot x^2 + 4 \cdot 27 \cdot x + 81 \\&= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81.\end{aligned}$$

b) Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned}(1-x)^5 &= 1 + 5 \cdot (-x) + 10 \cdot (-x)^2 + 10 \cdot (-x)^3 + 5 \cdot (-x)^4 + 1 \cdot (-x)^5 \\ &= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5\end{aligned}$$

Câu 2: Khai triển và rút gọn biểu thức: $(1 + \sqrt{2})^5 + (1 - \sqrt{2})^5$.

Lời giải

Áp dụng công thức nhị thức Newton, ta có

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= 1+5\cdot\sqrt{2}+10\cdot(\sqrt{2})^2+10\cdot(\sqrt{2})^3+5\cdot(\sqrt{2})^4+1\cdot(\sqrt{2})^5 \\ &= 1+5\cdot(-\sqrt{2})+10\cdot(-\sqrt{2})^2+10\cdot(-\sqrt{2})^3+5\cdot(-\sqrt{2})^4+1\cdot(-\sqrt{2})^5.\end{aligned}$$

Từ đó,

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &+ (1-\sqrt{2})^5 \\ &= 2\left[1+10\cdot(\sqrt{2})^2+5\cdot(\sqrt{2})^4\right] = 2(1+10\cdot 2+5\cdot 4) = 82\end{aligned}$$

Câu 3: Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d; e\}$. Tập hợp A có bao nhiêu tập hợp con?

Lời giải

Tập hợp A có 5 phần tử. Mỗi tập con của A có k phần tử ($1 \leq k \leq 5$) là một tổ hợp chập k của A . Do đó, số tập con như vậy bằng C_5^k . Mặt khác, có một tập con của A không có phần tử nào (tập rỗng), tức có $C_5^0 = 1$ tập con như vậy. Do đó, số tập con của A bằng

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5.$$

Theo công thức nhị thức Newton, ta có

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = (1+1)^5 = 2^5.$$

Vậy A có $2^5 = 32$ tập con.

©. Dạng toán rèn luyện

• Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Số số hạng trong khai triển $(x+2)^{50}$ là

- A.** 49. **B.** 50. **C.** 52. **D.** 51.

Lời giải

Số số hạng trong khai triển là: $n+1 = 50+1 = 51$.

Câu 2: Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu-tơn $(x-y)^5$.

- A.** $x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$. **B.** $x^5 - 5x^4y - 10x^3y^2 - 10x^2y^3 - 5xy^4 + y^5$.
C. $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$. **D.** $x^5 + 5x^4y - 10x^3y^2 + 10x^2y^3 - 5xy^4 + y^5$.

Lời giải

Ta có:

$$(x-y)^5 = [x+(-y)]^5 = C_5^0x^5 + C_5^1x^4(-y)^1 + C_5^2x^3(-y)^2 + C_5^3x^2(-y)^3 + C_5^4x^1(-y)^4 + C_5^5(-y)^5$$

Hay $(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$.

Câu 3: Từ khai triển biểu thức $(x+1)^{10}$ thành đa thức. Tổng các hệ số của đa thức là

- A.** 1023. **B.** 512. **C.** 1024. **D.** 2048.

Lời giải

Chọn C

Xét khai triển $f(x) = (x+1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^k$.

Gọi S là tổng các hệ số trong khai triển thì ta có $S = f(1) = (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Câu 4: Khai triển $(\sqrt{5} - \sqrt[4]{7})^{124}$. Có bao nhiêu số hạng hữu tỉ trong khai triển trên?

- A.** 30. **B.** 31. **C.** 32. **D.** 33.

Lời giải

Ta có $(\sqrt{5} - \sqrt[4]{7})^{124} = \sum_{k=0}^{124} C_{124}^k \cdot (-1)^k \cdot 5^{\frac{124-k}{2}} \cdot 7^{\frac{k}{4}}$

Số hạng hữu tỉ trong khai triển tương ứng với $\begin{cases} \frac{124-k}{2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{4} \in \mathbb{Z} \end{cases}$
 $\Leftrightarrow k \in \{0; 4; 8; 12; \dots; 124\}$.

Vậy số các giá trị k là: $\frac{124-0}{4} + 1 = 32$.

Câu 5: Trong khai triển $(1 - 2x)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$. Giá trị của $a_0 - a_1 + a_2$ bằng

- A.** 801. **B.** 800. **C.** 1. **D.** 721.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(1 - 2x)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (-2)^k x^k, \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a_0 = C_{20}^0, \quad a_1 = -2 \cdot C_{20}^1,$
 $a_2 = (-2)^2 C_{20}^2 = 4C_{20}^2.$

Vậy $a_0 - a_1 + a_2 = C_{20}^0 + 2C_{20}^1 + 4C_{20}^2 = 801.$

Câu 6: Trong khai triển $\left(x + \frac{8}{x^2}\right)^9$, số hạng không chứa x là

A. 40096.

B. 43008.

C. 512.

D. 84.

Lời giải

Chọn B

Số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_9^k \cdot 8^k \cdot x^{9-3k}, 0 \leq k \leq 9$.

Số hạng không chứa x ứng với $9 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $T_4 = C_9^3 \cdot 8^3 = 43008$.

Câu 7: Số hạng độc lập với x trong khai triển $\left(x^3 - \frac{2}{x}\right)^8$ là

A. 1792.

B. 792.

C. 972.

D. 1972.

Lời giải

Chọn A

Ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$$T_{k+1} = C_8^k (x^3)^{8-k} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_8^k x^{24-4k} \cdot (-2)^k.$$

Do tìm số hạng độc lập với x suy ra $24 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 6 \Rightarrow T_7 = C_8^6 \cdot (-2)^6 = 1792$.

Câu 8: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$.

A. - 220.

B. 220.

C. 924.

D. - 924.

Lời giải

Chọn A

Công thức số hạng thứ $(k+1)$ của khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ là:

$$T_k = C_{12}^k (-1)^k (x^3)^{12-k} \cdot \frac{1}{x^k} = C_{12}^k (-1)^k x^{36-4k}, 0 \leq k \leq 12, k \in \mathbb{N}$$

Số hạng không chứa x ứng với $36 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 9$.

Suy ra $T_9 = C_{12}^9 (-1)^9 = -220$.

Câu 9: Cho x là số thực dương, số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức

$$\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30}$$
 là

A. 2^{20} .

B. $2^{20} C_{30}^{10}$.

C. $2^{10} C_{30}^{20}$.

D. C_{30}^{20} .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30} = \left(x + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)^{30} = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k x^{30-k} \left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^k = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k 2^k x^{30-\frac{3}{2}k}$$

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = C_{30}^k 2^k x^{30-\frac{3}{2}k}$.

Số hạng này không chứa x tương ứng với trường hợp $30 - \frac{3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 20$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $T_{21} = C_{30}^{20} 2^{20} = 2^{20} C_{30}^{10}$.

Câu 10: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

A. C_{45}^5 .

B. $-C_{45}^5$.

C. C_{45}^{15} .

D. $-C_{45}^{15}$.

Lời giải

Chọn D

$$T_{k+1} = C_{45}^k x^{45-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{45}^k \cdot (-1)^k x^{45-3k}$$

Số hạng tổng quát trong khai triển là

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $45 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 15$.

Vậy số hạng cần tìm là $C_{45}^{15} \cdot (-1)^{15} = -C_{45}^{15}$.

Câu 11: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$ là

A. C_{10}^5 .

B. $-C_{10}^5 \cdot 2^5$.

C. $-C_{10}^5$.

D. $C_{10}^5 \cdot 2^5$.

Lời giải

Chọn D

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x + \frac{2}{x}\right)^{10}$ là:

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = C_{10}^k \cdot 2^k x^{10-2k}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển tương ứng với $10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$ (thỏa mãn).

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là: $C_{10}^5 \cdot 2^5$.

Câu 12: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là:

- A.** 5. **B.** 35. **C.** 45. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có:
$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (\sqrt[3]{x})^{7-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k x^{\frac{7}{3} - \frac{7}{12}k}.$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với
$$\begin{cases} \frac{7}{3} - \frac{7}{12}k = 0 \\ 0 \leq k \leq 7, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow k = 4.$$

Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là: $C_7^4 = 35.$

Câu 13: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6, x \neq 0.$

- A.** 240. **B.** 15. **C.** - 240. **D.** - 15.

Lời giải

Chọn A

Ta có:
$$\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k (2x)^{6-k} \cdot (-1)^k \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot 2^{6-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{6-3k}$$

Số hạng không chứa x xảy ra khi: $6 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$

Số hạng đó là $C_6^2 \cdot 2^4 \cdot (-1)^2 = 240$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển trên là 240

Câu 14: Số hạng không chứa x trong khai triển biểu thức $A = \left(\frac{1}{x} - x^2\right)^{12}$ là

- A.** - 924. **B.** 495. **C.** - 495. **D.** 924.

Lời giải

Chọn B

Số hạng tổng quát trong khai triển là
$$T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{1}{x}\right)^{12-k} (-x^2)^k = C_{12}^k (-1)^k x^{3k-12}.$$

Theo đề bài ta có $3k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = 4.$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{12}^4 (-1)^4 = 495$.

Câu 15: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{45}$ là

- A.** C_{45}^{15} . **B.** C_{45}^{30} . **C.** $-C_{45}^5$. **D.** $-C_{45}^{15}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{45} = \sum_{k=0}^{45} C_{45}^k \cdot x^{45-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = (-1)^k \sum_{k=0}^{45} C_{45}^k \cdot x^{45-3k}.$$

Tìm số hạng không chứa x thì $45 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 15$.

Vậy số hạng không chứa x là $-C_{45}^{15}$.

Câu 16: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5$.

- A.** 10. **B.** 20. **C.** 5. **D.** 1.

Chọn A

Lời giải.

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5$ là: $T_k = C_5^k (x^2)^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = C_5^k x^{10-5k}$.

Số hạng cần tìm không chứa x nên ta có: $10 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $T_2 = C_5^2 = 10$.

Câu 17: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là

- A.** 5. **B.** 35. **C.** 45. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (\sqrt[3]{x})^{7-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k x^{\frac{7}{3} - \frac{7}{12}k}.$$

Số hạng không chứa x trong khai triển ứng với $\begin{cases} \frac{7}{3} - \frac{7}{12}k = 0 \\ 0 \leq k \leq 7, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow k = 4$.

Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ là: $C_7^4 = 35$.

Câu 18: Cho x là số thực dương, số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức

$$\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30}$$
 là

A. 2^{20} .

B. $2^{20} \cdot C_{30}^{10}$.

C. $2^{10} \cdot C_{30}^{20}$.

D. C_{30}^{20} .

Lời giải

Chọn B

Ta có
$$\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{30} = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k (x)^{30-k} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{30} C_{30}^k (2)^k (x)^{\frac{60-3k}{2}}$$

Số hạng không chứa x tương ứng $\frac{60-3k}{2} = 0 \Rightarrow k = 20$.

Vậy số hạng không chứa x là: $2^{20} \cdot C_{30}^{20} = 2^{20} \cdot C_{30}^{10}$.

Câu 19: Cho khai triển $(2x-1)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$. Tìm a_1

A. 20.

B. 40.

C. -40.

D. -760.

Lời giải

Chọn C

Ta có: a_1 là hệ số của x

Hạng tử chứa x trong khai triển là: $-C_{20}^{19}2x \Rightarrow a_1 = -40$

Câu 20: Cho khai triển $(1-2x)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$. Giá trị của $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$ bằng:

A. 1.

B. 3^{20} .

C. 0.

D. -1.

Lời giải

$$(1-2x)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20} \quad (1)$$

Thay $x=1$ vào (1) ta có: $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = (-1)^{20} = 1$.

Câu 21: Hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển nhị thức $\left(x - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ là:

A. 376.

B. -264.

C. 264.

D. 260.

Lời giải

Chọn C

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^{12}$ (với $x > 0$) là

$$T_{k+1} = C_{12}^k \cdot x^{12-k} \cdot \left(-\frac{2}{x\sqrt{x}}\right)^k = (-2)^k \cdot C_{12}^k \cdot x^{12-k} \cdot x^{-\frac{3k}{2}} = (-2)^k \cdot C_{12}^k \cdot x^{12-\frac{5k}{2}}$$

Số hạng trên chứa x^7 suy ra $12 - \frac{5k}{2} = 7 \Leftrightarrow k = 2$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển trên là $= (-2)^2 \cdot C_{12}^2 = 264$

Câu 22: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $f(x) = (1 - 3x + 2x^3)^{10}$ thành đa thức.

A. 204120

B. -262440

C. -4320

D. -62640

Lời giải

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - 3x + 2x^3)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (1 - 3x)^{10-k} \cdot (2x^3)^k = \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^{10-k} C_{10}^k C_{10-k}^i (-3x)^i \cdot (2x^3)^k \\ &= \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^{10-k} C_{10}^k C_{10-k}^i (-3)^i \cdot 2^k \cdot x^{i+3k} \quad (i, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 10, 0 \leq i \leq 10-k) \end{aligned}$$

Số hạng chứa x^7 ứng với $i + 3k = 7$

i	1	2	3	4	5	6	7
k	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
	T/m	Không t/m	Không t/m	T/m	Không t/m	Không t/m	T/m

Vậy hệ số của x^7 là: $C_{10}^2 \cdot C_8^1 \cdot (-3) \cdot 2^2 + C_{10}^1 \cdot C_9^4 \cdot (-3)^4 \cdot 2 + C_{10}^0 \cdot C_{10}^7 \cdot (-3)^7 = -62640$

Câu 23: Cho khai triển $(3 - 2x + x^2)^9 = a_0 x^{18} + a_1 x^{17} + a_2 x^{16} + \dots + a_{18}$. Giá trị a_{15} bằng

A. 218700

B. 489888

C. -804816

D. -174960

Lời giải

Ta có: $(3 - 2x + x^2)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k x^{18-2k} \cdot (3 - 2x)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k x^{18-2k} \sum_{i=0}^k C_k^i 3^{k-i} (-2x)^i \quad (0 \leq i \leq k \leq 9)$

Giá trị a_{15} ứng với: $18 - 2k + i = 15 \Rightarrow \begin{cases} i=1 \\ k=8 \end{cases} \vee \begin{cases} i=3 \\ k=9 \end{cases}$

Vậy: $a_{15} = C_9^8 \cdot C_8^1 \cdot 3^7 \cdot (-2)^1 + C_9^9 \cdot C_9^3 \cdot 3^6 \cdot (-2)^3 = -804816$

Câu 24: Tìm hệ số của x^3 sau khi khai triển và rút gọn các đơn thức đồng dạng của

$$\left(\frac{1}{x} - x + 2x^2\right)^9, x \neq 0.$$

A. - 2940.

B. 3210.

C. 2940.

D. - 3210.

Lời giải

Ta có

$$\left(\frac{1}{x} - x + 2x^2\right)^9 = \left[\frac{1}{x} + x(2x - 1)\right]^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k \left(\frac{1}{x}\right)^{9-k} \cdot x^k \cdot (2x - 1)^k = \sum_{k=0}^9 \sum_{i=0}^k C_k^i C_9^k (-1)^{k-i} 2^i \cdot x^{2k+i-9}.$$

Theo yêu cầu bài toán ta có $2k + i - 9 = 3 \Leftrightarrow 2k + i = 12; 0 \leq i \leq k \leq 9; i, k \in \mathbb{N}$

Ta có các cặp $(i; k)$ thỏa mãn là: $(0; 6), (2; 5), (4; 4)$.

Từ đó hệ số của x^3 là: $C_6^0 C_9^6 (-1)^{6-0} \cdot 2^0 + C_5^2 C_9^5 (-1)^{5-2} \cdot 2^2 + C_4^4 C_9^4 (-1)^{4-4} \cdot 2^4 = -2940$.

Câu 25: Tìm hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(1 + x + x^2 + x^3)^{10}$.

A. 582.

B. 1902.

C. 7752.

D. 252.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (1 + x + x^2 + x^3)^{10} = (1 + x^2)^{10} (1 + x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot x^{2k} \cdot \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i \cdot x^i = \sum_{k=0}^{10} \sum_{i=0}^{10} C_{10}^k \cdot C_{10}^i \cdot x^{2k+i}$$

Hệ số của số hạng chứa x^5 nên $2k + i = 5$.

Trường hợp 1: $k = 0, i = 5$ nên hệ số chứa x^5 là $C_{10}^0 \cdot C_{10}^5$.

Trường hợp 2: $k = 1, i = 3$ nên hệ số chứa x^5 là $C_{10}^1 \cdot C_{10}^3$.

Trường hợp 3: $k = 2, i = 1$ nên hệ số chứa x^5 là $C_{10}^2 \cdot C_{10}^1$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^5 là $C_{10}^0 \cdot C_{10}^5 + C_{10}^1 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^2 \cdot C_{10}^1 = 1902$.

Câu 26: Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (n+3)C_n^n = 3840$. Tổng tất cả các hệ số của các số hạng trong khai triển $(1 + x - x^2 + x^3)^n$ là

A. 4^{10} .

B. 4^9 .

C. 2^{10} .

D. 2^9 .

Lời giải

$$3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + \dots + (n+3)C_n^n = 3840$$

$$\Leftrightarrow (0+3)C_n^0 + (1+3)C_n^1 + (2+3)C_n^2 + \dots + (n+3)C_n^n = 3840$$

$$\Leftrightarrow (C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n) + 3(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n) = 3840$$

$$\Leftrightarrow n \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^n = 3840 \Leftrightarrow n = 9$$

$$\text{Cho } x=1 \Rightarrow (1+x+x^2+x^3)^9 = (1+1+1^2+1^3)^9 = 2^9$$

Câu 27: Giả sử $(1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{110}x^{110}$ với $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{110}$ là các hệ số. Giá trị của tổng $T = C_{11}^0 a_{11} - C_{11}^1 a_{10} + C_{11}^2 a_9 - C_{11}^3 a_8 + \dots + C_{11}^{10} a_1 - C_{11}^{11} a_0$ bằng

- A.** $T = -11$. **B.** $T = 11$. **C.** $T = 0$. **D.** $T = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = (1+x+x^2+x^3+\dots+x^{10})^{11} \Leftrightarrow (1-x)^{11} A = (1-x^{11})^{11}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k (-x)^k \cdot \sum_{i=0}^{110} a_i x^i = \sum_{m=0}^{11} C_{11}^m (-x^{11})^m$$

$$\text{Hệ số của } x^{11} \text{ trong } P \text{ là: } C_{11}^0 a_{11} - C_{11}^1 a_{10} + C_{11}^2 a_9 - C_{11}^3 a_8 + \dots + C_{11}^{10} a_1 - C_{11}^{11} a_0 = T$$

$$\text{Hệ số của } x^{11} \text{ trong } Q \text{ là: } -C_{11}^1$$

$$\text{Vậy } T = -C_{11}^1 = -11.$$

Câu 28: Sau khi khai triển và rút gọn thì $P(x) = (1+x)^{12} + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18}$ có tất cả bao nhiêu số hạng

- A.** 27. **B.** 28. **C.** 30. **D.** 25

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } A = (1+x)^{12}; \quad B = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18}$$

$$\text{Ta có khai triển } A = (1+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^k \text{ có 13 số hạng.}$$

$$\text{Và khai triển } B = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18} = \sum_{l=0}^{18} C_{18}^l x^{36-3l} \text{ có 19 số hạng.}$$

Ta đi tìm các số hạng có cùng lũy thừa, mà giản ước được trong khai triển $P(x)$, ta phải có :

$$36 - 3l = k \Leftrightarrow k + 3l = 36 \quad (1)$$

Phương trình cho ta 5 cặp nghiệm thỏa mãn $(k;l) = \{(0;12), (3;11), (6;10), (9;9), (12;8)\}$ tương ứng với 5 số hạng.

Vậy sau khi khai triển và rút gọn $P(x)$ ta có $13+19-5=27$ số hạng.

Câu 29: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = (x+1)^6 + (x+1)^7 + \dots + (x+1)^{12}$.

- A. 1716. B. 1715. C. 1287. D. 1711.

Lời giải

Xét nhị thức $(x+1)^n = (1+x)^n$ có số hạng tổng quát là $C_n^k x^k$. Ta có:

Hệ số của x^5 trong $(1+x)^6$ là C_6^5 .

Hệ số của x^5 trong $(1+x)^7$ là C_7^5 .

Hệ số của x^5 trong $(1+x)^{12}$ là C_{12}^5 .

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $P(x)$ là $C_6^5 + C_7^5 + \dots + C_{12}^5 = 1715$.

Câu 30: Cho đa thức $P(x) = (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{12}x^{12}$. Tính tổng các hệ số a_i , $i = 0; 1; 2; \dots; 12$.

- A. 5. B. 7936. C. 0. D. 7920.

Lời giải

Ta có

$$P(x) = (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12}.$$

Áp dụng khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n.$$

Cho $x=1$, ta có $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Do đó ta có tổng hệ số của $P(x)$ là:

$$S = 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} = 2^8(1+2+4+8+16) = 31 \cdot 2^8 = 7936.$$

Câu 31: Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển nhị thức Newton $(1+2x)(3+x)^{11}$.

- A. 4620. B. 1380. C. 9405. D. 2890.

Lời giải

$$(1+2x)(3+x)^{11} = (3+x)^{11} + 2x(3+x)^{11}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 3^{11-k} \cdot x^k + 2x \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 3^{11-k} \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 3^{11-k} \cdot x^k + \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 2 \cdot 3^{11-k} \cdot x^{k+1}
\end{aligned}$$

Suy ra hệ số của x^9 khi triển khai nhị thức trên là: $C_{11}^9 \cdot 3^2 + C_{11}^8 \cdot 2 \cdot 3 = 9045$.

Câu 32: Cho khai triển $(1+2x)^{10} (3+4x+4x^2)^2 = a_0x + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{14}x^{14}$. Tìm giá trị của a_6 .

- A.** 482496. **B.** 529536. **C.** 278016. **D.** 453504.

Lời giải

$$(1+2x)^{10} (3+4x+4x^2)^2 = \left(\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^k \right) \cdot (16x^4 + 32x^3 + 40x^2 + 24x + 9)$$

Ta có:

$$\text{Do đó } a_6 = C_{10}^2 \cdot 2^2 \cdot 16 + C_{10}^3 \cdot 2^3 \cdot 32 + C_{10}^4 \cdot 2^4 \cdot 40 + C_{10}^5 \cdot 2^5 \cdot 24 + C_{10}^6 \cdot 2^6 \cdot 9 = 482496.$$

Câu 33: Sau khi khai triển và rút gọn biểu thức $f(x) = \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{12} + \left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{21}$ thì $f(x)$ có bao nhiêu số hạng?

- A.** 30. **B.** 32. **C.** 29. **D.** 35.

Lời giải

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x^2)^{12-k} \left(\frac{3}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 3^k x^{24-3k}$$

$$\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{21} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k (2x^3)^{21-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k 2^{21-k} x^{63-5k}$$

Ta cho k chạy từ 0 đến 12 thì các số mũ của x không bằng nhau.

Với khai triển $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^{12}$ ta có 13 số hạng; Với khai triển $\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{21}$ ta có 22 số hạng. Vậy tổng số hạng là: 35.

Câu 34: Cho đa thức: $P(x) = (1+x)^8 + (1+x)^9 + (1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12}$. Khai triển và rút gọn ta được đa thức: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_8 .

- A.** 720. **B.** 700. **C.** 715. **D.** 730.

Lời giải

Ta có $(1+x)^8 = C_8^0 + C_8^1x + \dots + C_8^8x^8$ suy ra hệ số chứa x^8 là C_8^8 .

Lại có $(1+x)^9 = C_9^0 + C_9^1 x + \dots + C_9^8 x^8 + C_9^9 x^9$ suy ra hệ số của x^8 là C_9^8 .

Tương tự trong khai triển $(1+x)^{10}$ có hệ số của x^8 là C_{10}^8 .

$(1+x)^{11}$ có hệ số của x^8 là C_{11}^8 .

$(1+x)^{12}$ có hệ số của x^8 là C_{12}^8 .

Suy ra hệ số của x^8 trong $P(x)$ là $a_8 = C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 + C_{11}^8 + C_{12}^8 = 715$.

Câu 35: Hệ số của x^6 trong khai triển $(2x+1)^6 \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức là

A. $\frac{1}{2}C_{14}^6$.

B. $\frac{1}{4}C_{14}^6$.

C. C_{14}^6 .

D. $4C_{14}^8$.

Lời giải

$$(2x+1)^6 = (1+2x)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k 1^{6-k} (2x)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k 2^k x^k$$

Xét khai triển

$$\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}+x\right)^8 = \sum_{j=0}^8 C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j$$

Vậy

$$(2x+1)^6 \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4 = \sum_{k=0}^6 C_6^k 2^k x^k \cdot \sum_{j=0}^8 C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^j = \sum_{k=0}^6 C_6^k 2^k \cdot \sum_{j=0}^8 C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j} x^{j+k}$$

Số hạng của khai triển chứa x^6 khi $j+k=6$

Xét bảng:

k	0	1	2	3
j	6	5	4	3
$C_6^k 2^k \cdot C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$	$C_6^0 2^0 \cdot C_8^6 \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$C_6^1 2^1 \cdot C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$C_6^2 2^2 \cdot C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4$	$C_6^3 2^3 \cdot C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5$
k	4	5	6	
j	2	1	0	
$C_6^k 2^k \cdot C_8^j \left(\frac{1}{2}\right)^{8-j}$	$C_6^4 2^4 \cdot C_8^2 \left(\frac{1}{2}\right)^6$	$C_6^5 2^5 \cdot C_8^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5$	$C_6^6 2^6 \cdot C_8^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2$	

Vậy hệ số x^6 trong khai triển $(2x+1)^6 \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4$ thành đa thức là

$$\frac{3003}{4} = \frac{1}{4}C_{14}^6.$$

Câu 36: Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6 + (x-3)^8$ bằng

A. 1752

B. - 1272

C. 1272

D. - 1752

Lời giải

Chọn B

Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6$ là $C_6^4 2^4 (-1)^2 = 240$.

Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(x-3)^8$ là $C_8^5 (-3)^3 = -1512$.

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6 + (x-3)^8$ là $240 - 1512 = -1272$

Câu 37: Hệ số của x^5 trong khai triển $x(3x-1)^6 + (2x-1)^8$ bằng

A. - 3007

B. - 577

C. 3007

D. 577

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} x(3x-1)^6 + (2x-1)^8 &= x \sum_{k=0}^6 C_6^k (3x)^k (-1)^{6-k} + \sum_{m=0}^8 C_8^m (2x)^m (-1)^{8-m} \\ &= \sum_{k=0}^6 C_6^k 3^k (-1)^{6-k} x^{k+1} + \sum_{m=0}^8 C_8^m 2^m (-1)^{8-m} x^m \end{aligned}$$

Hệ số x^5 ứng với $k=4; m=5$.

Hệ số cần tìm là $C_6^4 3^4 (-1)^2 + C_8^5 2^5 (-1)^3 = -577$.

Câu 38: Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(x-2)^6 + (3x-1)^8$ bằng

A. - 13548

B. 13668

C. - 13668

D. 13548

Lời giải

Chọn A

Hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức $(x-2)^6$ là $C_6^4 2^2 = 60$.

Hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức $(3x-1)^8$ là $C_8^5 (-3)^5 = -13608$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(x-2)^6 + (3x-1)^8$ bằng $-13608 + 60 = -13548$.

•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Khai triển $(x+\sqrt{2})^4$. Khi đó

a) Hệ số của x^2 là 12

b) Hệ số của x^3 là $6\sqrt{2}$

c) Hệ số của x là $8\sqrt{2}$

d) Số hạng không chứa x trong khai triển trên bằng 4

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

Ta có: $(x + \sqrt{2})^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3(\sqrt{2}) + C_4^2 x^2(\sqrt{2})^2 + C_4^3 x(\sqrt{2})^3 + C_4^4 (\sqrt{2})^4$
 $= x^4 + 4\sqrt{2}x^3 + 12x^2 + 8\sqrt{2}x + 4$.

Câu 2: Khai triển $(x+2y)^3 + (2x-y)^3$. Khi đó

a) Hệ số của x^3 là 9

b) Hệ số của y^3 là 7

c) Hệ số của x^2y là 6

d) Tổng các hệ số của số hạng mà lũy thừa của x lớn hơn lũy thừa của y bằng -3

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

a) Ta có: $(x+2y)^3 + (2x-y)^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2(2y) + C_3^2 x(2y)^2 + C_3^3 (2y)^3$
 $+ C_3^0 (2x)^3 + C_3^1 (2x)^2(-y) + C_3^2 (2x)(-y)^2 + C_3^3 (-y)^3$
 $= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 + 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 = 9x^3 - 6x^2y + 18xy^2 + 7y^3$.

b) Có hai số hạng mà lũy thừa của x lớn hơn lũy thừa của y là $9x^3 - 6x^2y$.
Tổng hệ số của chúng: $9 + (-6) = 3$.

Câu 3: Khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$. Khi đó

a) Hệ số của x^2 là $\frac{1}{4}$.

b) Số hạng không chứa x là 6.

c) Hệ số của x^4 là 1.

d) Sau khi khai triển, biểu thức có 5 số hạng.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Ta có: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3\left(\frac{1}{x}\right) + C_4^2 x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + C_4^3 x\left(\frac{1}{x}\right)^3 + C_4^4 \left(\frac{1}{x}\right)^4$
 $= x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$.

Câu 4: Khai triển $(x+1)^5$. Khi đó

- a) Hệ số của x^4 là 5
- b) Số hạng không chứa x là 1
- c) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 3^5$.
- d) $32C_5^0 + 16C_5^1 + 8C_5^2 + 4C_5^3 + 2C_5^4 + C_5^5 = 3^5$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Ta có: $(x+1)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 + C_5^2 x^3 + C_5^3 x^2 + C_5^4 x + C_5^5 (*)$

$$= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5.$$

c) Từ khai triển (*) trong câu a), thay $x=1$, ta được:
 $(1+1)^5 = C_5^0 \cdot 1^5 + C_5^1 \cdot 1^4 + C_5^2 \cdot 1^3 + C_5^3 \cdot 1^2 + C_5^4 \cdot 1 + C_5^5 = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5.$

$$\text{Vậy } C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5.$$

d) Từ khai triển (*) của câu a), thay $x=2$, ta được:

$$\begin{aligned} (2+1)^5 &= C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 + C_5^2 \cdot 2^3 + C_5^3 \cdot 2^2 + C_5^4 \cdot 2 + C_5^5 \\ &= 32C_5^0 + 16C_5^1 + 8C_5^2 + 4C_5^3 + 2C_5^4 + C_5^5 = S \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = 3^5.$$

Câu 5: Khai triển $P = (x - \sqrt{3})^5$. Khi đó

- a) Hệ số của x^4 trong khai triển là $5\sqrt{3}$.
- b) Hệ số của x^2 trong khai triển là $-30\sqrt{3}$.
- c) Hệ số của x^3 trong khai triển là 30.
- d) Hệ số của x trong khai triển là 45.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Ta có: $P = (x - \sqrt{3})^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4 (-\sqrt{3}) + C_5^2 x^3 (-\sqrt{3})^2 + C_5^3 x^2 (-\sqrt{3})^3$

$$\begin{aligned} &+ C_5^4 x (-\sqrt{3})^4 + C_5^5 (-\sqrt{3})^5 \\ &= x^5 - 5\sqrt{3}x^4 + 30x^3 - 30\sqrt{3}x^2 + 45x - 9\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Hệ số của } x^4 \text{ trong khai triển là } -5\sqrt{3}.$$

Câu 6: Khai triển $Q = (xy - 1)^5$. Khi đó

- a) Số hạng có chứa x^2y^2 là $-10x^2y^2$
- b) Hệ số của x^4y^4 trong khai triển là -5 .
- c) Hệ số của x^3y^3 trong khai triển là 10 .
- d) Hệ số của xy trong khai triển là -10 .

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

Ta có:
$$\begin{aligned} Q &= (xy - 1)^5 = C_5^0(xy)^5 + C_5^1(xy)^4(-1) + C_5^2(xy)^3(-1)^2 \\ &\quad + C_5^3(xy)^2(-1)^3 + C_5^4(xy)(-1)^4 + C_5^5(-1)^5 \\ &= x^5y^5 - 5x^4y^4 + 10x^3y^3 - 10x^2y^2 + 5xy - 1. \end{aligned}$$

Số hạng có chứa x^2y^2 trong khai triển là $-10x^2y^2$.

Câu 7: Khai triển $(1-x)^6$. Khi đó

- a) Hệ số của x^2 trong khai triển là C_6^2
- b) Hệ số của x^3 trong khai triển là C_6^3
- c) Hệ số của x^5 trong khai triển là $-C_6^5$
- d) $C_6^0 - C_6^1 + C_6^2 - C_6^3 + C_6^4 - C_6^5 + C_6^6 = 1$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

Ta có:
$$(1-x)^6 = C_6^0 - C_6^1x + C_6^2x^2 - C_6^3x^3 + C_6^4x^4 - C_6^5x^5 + C_6^6x^6 (*)$$

Thay $x=1$ vào $(*)$, ta được: $(1-1)^6 = C_6^0 - C_6^1 + C_6^2 - C_6^3 + C_6^4 - C_6^5 + C_6^6 = S$. Vậy $S=0$.

Câu 8: Cho $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$.

a) $a_3 = \frac{5}{2}$

b) $a_5 = -\frac{1}{32}$

c) Hệ số lớn nhất trong tất cả hệ số là $\frac{5}{2}$

d) Tổng $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{16}$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Sai

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^5 &= C_5^0 + C_5^1\left(-\frac{1}{2}x\right) + C_5^2\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + C_5^3\left(-\frac{1}{2}x\right)^3 + C_5^4\left(-\frac{1}{2}x\right)^4 + C_5^5\left(-\frac{1}{2}x\right)^5 \\ &= 1 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x^4 - \frac{1}{32}x^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \quad (*)\end{aligned}$$

Suy ra: $a_0 = 1, a_1 = -\frac{5}{2}, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = -\frac{5}{4}, a_4 = \frac{5}{16}, a_5 = -\frac{1}{32}$.

Ta thấy hệ số lớn nhất tìm được là $a_2 = \frac{5}{2}$.

Thay $x=1$ vào (*), ta được: $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Vậy $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{32}$.

Câu 9: Khai triển $(3x+1)^4$. Khi đó:

- a) Hệ số của x^4 trong khai triển là 81
- b) Hệ số của x^3 trong khai triển là 118
- c) Hệ số của x^2 trong khai triển là 54
- d) Hệ số của x trong khai triển là 1

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

$$(3x+1)^4 = (3x)^4 + 4 \cdot (3x)^3 \cdot 1 + 6 \cdot (3x)^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 3x \cdot 1^3 + 1^4 = 81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1.$$

Câu 10: Khai triển $(x+2)^5$. Khi đó:

- a) Hệ số của x^4 trong khai triển là 10
- b) Hệ số của x^3 trong khai triển là 40
- c) Hệ số của x^2 trong khai triển là 54
- d) Hệ số của x trong khai triển là 80

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$\begin{aligned}(x+2)^5 &= x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot 2 + 10 \cdot x^3 \cdot 2^2 + 10 \cdot x^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot x \cdot 2^4 + 2^5 \\ &= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32.\end{aligned}$$

Câu 11: Khai triển $(x-1)^4 + (x+1)^4$. Khi đó:

- a) Hệ số của x^4 trong khai triển là 2
- b) Hệ số của x^2 trong khai triển là 2
- c) Hệ số lớn nhất trong tất cả các hệ số là 12
- d) Số hạng không chứa x là 2

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

$$(x-1)^4 + (x+1)^4 = (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) + (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) = 2x^4 + 12x^2 + 2.$$

Câu 12: Khai triển $(4x-1)^4$. Khi đó:

- a) Hệ số của x^4 trong khai triển là 250
- b) Hệ số của x^3 trong khai triển là -256
- c) Hệ số của x^2 trong khai triển là 96
- d) Hệ số của x trong khai triển là -16

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

$$\text{Ta có: } (4x-1)^4 = 256x^4 - 256x^3 + 96x^2 - 16x + 1.$$

Câu 13: Khai triển $(x-3)^5$. Khi đó:

- a) Hệ số của x^4 trong khai triển là 20
- b) Hệ số của x^3 trong khai triển là 90
- c) Hệ số của x^2 trong khai triển là -270
- d) Hệ số của x trong khai triển là 405

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

$$\text{Ta có: } (x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243.$$

Câu 14: Khai triển $(3x+2)^5$. Khi đó:

- a) Hệ số của x^4 trong khai triển là 1080
- b) Hệ số của x^3 trong khai triển là 810
- c) Hệ số của x^2 trong khai triển là 720
- d) Hệ số của x^3 lớn hơn hệ số của x^4 .

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

Ta có: $(3x+2)^5 = 243x^5 + 810x^4 + 1080x^3 + 720x^2 + 240x + 32$.

Hệ số của x^3 và x^4 trong khai triển của $(3x+2)^5$ lần lượt là 1080 và 810. Do đó, hệ

số của x^3 lớn hơn hệ số của x^4 trong khai triển của $(3x+2)^5$.

Câu 15: Khai triển $(x-3)^4$. Khi đó

a) Hệ số của x^4 trong khai triển là 1

b) Hệ số của x^3 trong khai triển là -12

c) Hệ số của x^2 trong khai triển là 54

d) Tổng các hệ số của các hạng tử có bậc chẵn trong khai triển bằng 134.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

Ta có: $(x-3)^4 = x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81$.

Hệ số của các hạng tử có bậc chẵn là $1; 54$ và 81. Vậy tổng các hệ số đó là 136.

•Dạng 9: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Bác An gửi vào ngân hàng 200000000 đồng với lãi suất 7%/năm.

Hãy ước tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) mà bác An nhận được sau 5 năm gửi ngân hàng.

Trả lời: 279800000 (đồng)

Lời giải

Số tiền (cả vốn lẫn lãi) mà bác An nhận được sau 1 năm là:

$$200000000 + 7\% \cdot 200000000 = 200000000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right) \text{ (đồng)}$$

Số tiền (cả vốn lẫn lãi) mà bác An nhận được sau 2 năm là:

$$\left[200000000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)\right] + 7\% \cdot \left[200000000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)\right] = 200000000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^2 \text{ (đồng)}$$

Từ đó suy ra số tiền (cả vốn lẫn lãi) mà bác An nhận được sau 5 năm là:

$$200000000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^5 \text{ (đồng)}$$

Vì $\left(1 + \frac{7}{100}\right)^5 \approx 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot \frac{7}{100} + 10 \cdot 1^3 \cdot \left(\frac{7}{100}\right)^2 = 1,399$ nên số tiền mà bác An nhận được sau 5 năm gửi ngân hàng khoảng: $200000000 \cdot 1,399 = 279800000$ (đồng)

Câu 2: Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển của đa thức $x(2x+1)^4 + (x+2)^5$.

Trả lời: $64x^3$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x(2x+1)^4 + (x+2)^5 \\ &= x(16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1) + (x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32) \\ &= 16x^5 + 32x^4 + 24x^3 + 8x^2 + x + x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32 \\ &= 17x^5 + 42x^4 + 64x^3 + 88x^2 + 81x + 32. \end{aligned}$$

Vậy số hạng chứa x^3 trong khai triển của đa thức $x(2x+1)^4 + (x+2)^5$ là $64x^3$.

Câu 3: Lớp $10A$ đề nghị các tổ chọn thành viên để tập kịch. Tổ I phải chọn ít nhất một thành viên để tham gia đội kịch của lớp. Hỏi tổ I có bao nhiêu cách chọn thành viên để tập kịch? Biết rằng tổ I có 5 người.

Trả lời: 31

Lời giải

Vì tổ I phải chọn ít nhất một thành viên để tham gia đội kịch nên số cách chọn thành viên của tổ I là: $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = (1+1)^5 - C_5^0 = 2^5 - 1 = 31$.

Câu 4: Cho n là các số tự nhiên. Tính: $T = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$.

Trả lời: $\frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$

Lời giải

Vì $C_n^0 = 1 = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^1$ và áp dụng công thức $\frac{1}{k+2}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+2}C_{n+2}^{k+2}$ ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{n+1}C_{n+1}^1 + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^2 + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^3 + \dots + \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

Câu 5: Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Hỏi tập A có bao nhiêu tập hợp con?

Trả lời: 2^6

Lời giải

Số tập con không có phần tử nào của A là C_6^0 .

Số tập con có 1 phần tử, 2 phần tử, 3 phần tử, 4 phần tử, 5 phần tử, 6 phần tử của A lần lượt là $C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6$.

Vậy tổng số tập con của A là $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = T$.

Theo khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$(1+x)^6 = C_6^0 + C_6^1 x + C_6^2 x^2 + C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 + C_6^5 x^5 + C_6^6 x^6.$$

Thay $x=1$, ta được: $(1+1)^6 = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$ hay $T = 2^6$.

Vậy số tập con của tập A là 2^6 .

Câu 6: Cho tập hợp $X = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5\}$. Hỏi tập X có tất cả bao nhiêu tập con?

Trả lời: 2^5

Lời giải

Số tập con không có phần tử nào của X là $1 = C_5^0$ (đó là tập rỗng).

Số tập con của X có 1 phần tử, 2 phần tử, 3 phần tử, 4 phần tử, 5 phần tử lần lượt là $C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5$.

Vậy tổng số tập hợp con của X là $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

Khai triển biểu thức $(1+x)^5$ theo nhị thức Newton, ta được:

$$(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5 (*)$$

Thay $x=1$ vào $(*)$: $(1+1)^5 = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$.

Vậy số tập con của X là 2^5 .

Câu 7: Tính tổng các hệ số trong khai triển $(1-2x)^5$.

Trả lời: -1

Lời giải

Đặt $(1-2x)^5 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_5 x^5$.

Cho $x=1$ ta có tổng các hệ số $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5 = (1-2)^5 = -1$.

Câu 8: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_n^1 + C_n^2 = 15$. Tìm số hạng không chứa

x trong khai triển: $\left(x + \frac{2}{x^4}\right)^n$.

Trả lời: 10

Lời giải

Điều kiện: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$C_n^1 + C_n^2 = 15 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -6 \end{cases} \Rightarrow n = 5. \text{ Khi đó}$$

$$\left(x + \frac{2}{x^4}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot 2^k x^{5-k} \cdot \left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot 2^k x^{5-5k}, \text{ Số hạng không chứa } x \text{ tương ứng } 5-5k=0 \Leftrightarrow k=1.$$

Suy ra số hạng không chứa x là: $C_5^1 \cdot 2^1 = 10$.

Câu 9: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ thỏa mãn $a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1$. Tìm giá trị của số nguyên dương n .

Trả lời: $n = 5$

Lời giải

Ta có: $(1+2x)^n = \sum_{k=0}^n 2^k C_n^k x^k; (k \in \mathbb{N})$. Suy ra: $a_k = 2^k C_n^k$. Thay $a_0 = 2^0 C_n^0 = 1$, $a_1 = 2C_n^1, a_2 = 4C_n^2$ vào giả thiết ta có: $1 + 16C_n^1 = 8C_n^2 + 1 \Leftrightarrow 2C_n^1 = C_n^2$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-2)!2!} \Leftrightarrow 2n = \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n^2 - 5n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 5 \end{cases}.$$

Do n là số nguyên dương nên $n = 5$.

Câu 10: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển thành đa thức của $(1+x+x^2+x^3)^5$.

Trả lời: 101

Lời giải

Ta có: $(1+x+x^2+x^3)^5 = [(1+x) + x^2(1+x)]^5 = [(1+x)(1+x^2)]^5 = (1+x)^5 \cdot (1+x^2)^5$.

Xét khai triển $(1+x)^5 \cdot (1+x^2)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^k \cdot \sum_{l=0}^5 C_5^l x^{2l} = \sum_{k=0}^5 \left(C_5^k \cdot \sum_{l=0}^5 C_5^l x^{k+2l} \right)$,

Số hạng chứa x^{10} tương ứng với k, l thỏa mãn $k + 2l = 10 \Leftrightarrow k = 10 - 2l$.

Kết hợp với điều kiện, ta có hệ:

$$\begin{cases} k = 10 - 2l \\ 0 \leq k \leq 5, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (k, l) \in \{(0; 5), (2; 4), (4; 3)\} \\ 0 \leq l \leq 5, l \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Vậy hệ số của x^{10} bằng tổng các $C_5^k \cdot C_5^l$ thỏa mãn

$$C_5^0 \cdot C_5^5 + C_5^2 \cdot C_5^4 + C_5^4 \cdot C_5^3 = 101.$$

Câu 11: Tìm số hạng có hệ số nguyên trong khai triển thành đa thức của $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n} = 1024$

Trả lời: $15x^4$

Lời giải

Ta có $(x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 x^{2n+1} + C_{2n+1}^1 x^{2n} + \dots + C_{2n+1}^{2n} x + C_{2n+1}^{2n+1}$ (1).

Thay $x=1$ vào (1) ta được $2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$ (2).

Thay $x=-1$ vào (1) ta được $0 = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + \dots - C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$ (3).

Lấy (2) - (3) vế theo vế ta được $2^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n})$.

Theo đề $2^{2n+1} = 2 \cdot 1024 \Leftrightarrow n = 5$.

Số hạng tổng quát của khai triển $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2\right)^n$ là:

$$T_{k+1} = C_5^k \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5-k} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^2\right)^k = C_5^k \cdot (-1)^k \cdot 3^{5-2k} \cdot 2^{2k-5} x^{2k}.$$

Ta có bảng sau

k	0	1	2	3	4	5
$C_5^k \cdot (-1)^k \cdot 3^{5-2k} \cdot 2^{2k-5}$	$\frac{243}{32}$	$-\frac{135}{8}$	15	$-\frac{20}{3}$	$\frac{40}{27}$	$-\frac{32}{243}$

Vậy số hạng có hệ số nguyên là $15x^4$.

Câu 12: Tìm số hạng chứa x^2 trong khai triển của biểu thức $P(x) = (3 + x - x^2)^n$ với n

là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^2 + \frac{A_n^3}{n} = 12$.

Trả lời: $-54x^2$

Lời giải

Xét $C_n^2 + \frac{A_n^3}{n} = 12$ (1) (Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{n \cdot (n-3)!} = 12 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + (n-1)(n-2) = 12$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 7n - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = -\frac{5}{3} \end{cases}. \text{ Do } n \in \mathbb{N} \text{ nên } n = 4.$$

Với $n = 4$ thì

$$P(x) = (3 + x - x^2)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k 3^{4-k} [x(1-x)]^k = \sum_{k=0}^4 C_4^k 3^{4-k} x^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i x^i \right), \Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^4 \sum_{i=0}^k C_4^k C_k^i 3^{4-k} (-1)^i x^{i+k}$$

Theo đề bài số hạng chứa x^2 thỏa mãn với

$$i + k = 2 (i, k \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k \leq 4) \Rightarrow \begin{cases} i = 0, \\ k = 2 \\ i = 1, \\ k = 1 \end{cases},$$

Vậy số hạng chứa x^2 là $\left[C_4^2 C_2^0 3^2 (-1)^0 + C_4^1 C_1^1 3^3 (-1)^1 \right] x^2 = -54x^2$.

Câu 13: Tính tổng sau $S = C_{10}^0 + C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10}$.

Trả lời: 1024

Lời giải

$$(a+b)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k a^{10-k} b^k$$

Xét khai triển

$$\text{Ta chọn } a=b=1, \text{ thu được } (1+1)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 + \dots + C_{10}^{10}.$$

$$\text{Vậy } S = 2^{10} = 1024.$$

Câu 14: Tính tổng sau $S = C_6^1 + C_6^2 + \dots + C_6^5$.

Trả lời: $S = 62$

Lời giải

$$(a+b)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k a^{6-k} b^k$$

Xét khai triển

$$\text{Ta chọn } a=b=1, \text{ thu được } (1+1)^6 = C_6^0 + C_6^1 + \dots + C_6^6.$$

$$\text{Do đó } S = 2^6 - C_6^0 - C_6^6 = 62. \text{ Vậy } S = 62.$$

Câu 15: Tính tổng sau $S = C_6^0 + 2 \cdot C_6^1 + 2^2 \cdot C_6^2 + \dots + 2^6 C_6^6$.

Trả lời: $S = 729$

Lời giải

Xét khai triển $(a+b)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k a^{6-k} b^k$.

Ta chọn $a=1; b=2$, thu được $(1+2)^6 = C_6^0 + 2 \cdot C_6^1 + 2^2 \cdot C_6^2 + \dots + 2^6 C_6^6$. Vậy $S = 3^6 = 729$.

Câu 16: Tính tổng sau $S = C_{12}^0 - C_{12}^1 + C_{12}^2 - \dots - C_{12}^{11} + C_{12}^{12}$.

Trả lời: $S = 0$

Lời giải

Xét khai triển $(a+b)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k a^{12-k} b^k$.

Ta chọn $a=1; b=-1$, thu được $(1-1)^{12} = C_{12}^0 - C_{12}^1 + C_{12}^2 - \dots - C_{12}^{11} + C_{12}^{12}$.

Vậy $S = 0^{12} = 0$.

Câu 17: Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $n^2 - 6n - 7 = 0$.

Tính tổng $S = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.

Trả lời: $S = 128$

Lời giải

Ta có $n^2 - 6n - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ n = -1 \end{cases}$. Do $n \in \mathbb{N}$ nên $n = 7$.

Khi đó: $S = C_7^0 + C_7^1 + \dots + C_7^7$.

Xét khai triển $(a+b)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k a^{7-k} b^k$. Ta chọn $a=b=1$, thu được: $(1+1)^7 = C_7^0 + C_7^1 + \dots + C_7^7$

Vậy $S = 2^7 = 128$.

Câu 18: Cho đa thức $P(x) = (1-x)^8$. Tính tổng các hệ số của đa thức $P(x)$.

Trả lời: 0

Lời giải

Ta có $P(x) = (1-x)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k (-1)^k x^k$.

Thay $x=1$ ta được $(1-1)^8 = C_8^0 - C_8^1 + C_8^2 - \dots - C_8^7 + C_8^8$.

Vậy tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ bằng 0.

Câu 19: Tính tổng sau $S = C_{20}^1 + 2C_{20}^2 + 2^2 \cdot C_{20}^3 + \dots + 2^{19} C_{20}^{20}$.

Trả lời: $S = \frac{3^{20} - 1}{2}$

Lời giải

Ta có $2S = 2 \cdot C_{20}^1 + 2^2 C_{20}^2 + 2^3 \cdot C_{20}^3 + \dots + 2^{20} \cdot C_{20}^{20}$.

Xét khai triển $(a+b)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k a^{20-k} b^k$.

Ta chọn $a=1; b=2$, thu được $(1+2)^{20} = C_{20}^0 + 2 \cdot C_{20}^1 + \dots + 2^{20} \cdot C_{20}^{20}$.

Do đó $2S = (1+2)^{20} - C_{20}^0 = 3^{20} - 1$. Vậy $S = \frac{3^{20} - 1}{2}$.

Câu 20: Tính tổng sau $S = C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + \dots + C_{20}^{20}$.

Trả lời: $S = 2^{19}$

Lời giải

Xét khai triển $(a+b)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k a^{20-k} b^k$.

Chọn $a=b=1$, ta thu được $(1+1)^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + C_{20}^3 + \dots + C_{20}^{20}$.

Chọn $a=1; b=-1$, ta thu được $(1-1)^{20} = C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - C_{20}^3 + \dots + C_{20}^{20}$.

Cộng theo vế hai phương trình ta được $2^{20} = 2 \cdot (C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + \dots + C_{20}^{20})$
 $\Leftrightarrow 2S = 2^{20} \Leftrightarrow S = 2^{19}$.

Câu 21: Cho n là số tự nhiên. Hãy tính tổng sau: $S = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n$.

Trả lời: 4^n

Lời giải

$$S = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n \Rightarrow 2S \\ = \left[C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n \right] + \left[C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n \right].$$

Ta có $C_n^k = C_n^{n-k}$ (tính chất tổ hợp).

$$\Rightarrow 2S = \left[C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n \right] + \left[C_{2n+1}^{2n+1} + C_{2n+1}^{2n} + \dots + C_{2n+1}^{n+1} \right],$$

$$\Rightarrow 2S = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1},$$

Xét khai triển $(x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 x^0 + C_{2n+1}^1 x^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$,

Khi $x=1 \Rightarrow 2S=2^{2n+1} \Rightarrow S=2^{2n}=4^n$.

Câu 22: Cho n là số tự nhiên. Thu gọn biểu thức:

$$S=3C_n^0+7C_n^1+11C_n^2+\dots+(4n+3)C_n^n.$$

Trả lời: $(2n+3) \cdot 2^n$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \quad S &= (0.4+3)C_n^0 + (1.4+3)C_n^1 + (2.4+3)C_n^2 + \dots + (n.4+3)C_n^n \\ \Rightarrow S &= 4(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + n \cdot C_n^n) + 3(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n) \end{aligned}$$

$$\text{Xét khai triển } (x+1)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + \dots + C_n^n x^n.$$

$$\text{Khi } x=1 \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } k \cdot C_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$$

$$\text{Do đó: } C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + n \cdot C_n^n = n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1})$$

$$\text{Tương tự xét khai triển } (x+1)^{n-1} = C_{n-1}^0 x^0 + C_{n-1}^1 x^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1}.$$

$$\text{Khi } x=1 \Rightarrow C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\text{Vậy } S = 4n \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^n = (2n+3) \cdot 2^n.$$

Câu 23: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $f(x) = (1-2x)^{10}$.

Trả lời: -15360

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x) &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k 1^{10-k} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (-2)^k x^k. \text{ Số hạng chứa } x^7 \text{ ứng với giá trị} \\ k &= 7. \text{ Vậy hệ số của } x^7 \text{ là: } C_{10}^7 (-2)^7 = -15360. \end{aligned}$$

Câu 24: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $h(x) = x(2+3x)^9$.

Trả lời: 489888

Lời giải

$$\text{Ta có } h(x) = (2+3x)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k 2^{9-k} (3x)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k 2^{9-k} 3^k \cdot x^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k 2^{9-k} 3^k x^{k+1}.$$

$$\text{Số hạng chứa } x^7 \text{ ứng với giá trị } k \text{ thỏa } k+1=7 \Leftrightarrow k=6.$$

$$\text{Vậy hệ số chứa } x^7 \text{ là: } C_9^6 2^3 3^6 = 489888.$$

Câu 25: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau:

$$g(x) = (1+x)^7 + (1-x)^8 + (1+x)^9.$$

Trả lời: 29

Lời giải

Hệ số của x^7 trong khai triển $(1+x)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k x^k$ là: $C_7^7 = 1$,

Hệ số của x^7 trong khai triển $(1-x)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k (-1)^k x^k$ là: $C_8^7 (-1)^7 = -8$,

Hệ số của x^7 trong khai triển $(1+x)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k x^k$ là: $C_9^7 = 36$,

Vậy hệ số chứa x^7 trong khai triển $g(x)$ thành đa thức là: 29.

Câu 26: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $f(x) = \left(x - \frac{2}{x}\right)^{12}, (x \neq 0)$

Trả lời: 59136

Lời giải

Ta có: $f(x) = \left(x - \frac{2}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{12-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (-2)^k x^{12-2k}.$

Số hạng không chứa x ứng với giá trị k thỏa mãn: $12 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 6.$

$\Rightarrow$ Số hạng không chứa x là: $C_{12}^6 \cdot 2^6 = 59136.$

Câu 27: Xác định hệ số của x^4 trong khai triển sau: $f(x) = (3x^2 + 2x + 1)^{10}.$

Trả lời: 8085

Lời giải

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + 2x + 3x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x + 3x^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{i=0}^k C_k^i (2x)^{k-i} (3x^2)^i = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \sum_{i=0}^k C_k^i 2^{k-i} \cdot 3^i x^{k+i}, 0 \leq i \leq k \leq 10. \end{aligned}$$

Do đó $k+i=4$ với các trường hợp $i=0, k=4$ hoặc $i=1, k=3$ hoặc $i=k=2.$

Vậy hệ số chứa x^4 : $2^4 C_{10}^4 \cdot C_4^0 + 2^2 3^1 C_{10}^3 \cdot C_3^1 + 3^2 C_{10}^2 \cdot C_2^2 = 8085.$

Câu 28: Tìm số hạng của khai triển $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ là một số nguyên.

Trả lời: 4536

Lời giải

$$(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k (\sqrt{3})^k (\sqrt[3]{2})^{9-k}$$

. Số hạng là số nguyên ứng với các giá trị của

$$k \text{ thỏa: } \begin{cases} k=2m \\ 9-k=3n \Leftrightarrow k=0, k=6 \\ k=0, \dots, 9 \end{cases}$$

. Các số hạng là số nguyên: $C_9^0 (\sqrt[3]{2})^9 = 8$ và $C_9^6 (\sqrt{3})^6 (\sqrt[3]{2})^3 = C_9^6 \cdot 27 \cdot 2 = 4536$.

Câu 29: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$, biết $C_n^1 + C_n^2 = 55$.

Trả lời: 13440

Lời giải

Điều kiện: $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$C_n^1 + C_n^2 = 55 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} = 55 \Leftrightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10(n) \\ n = -11(l) \end{cases}$$

Với $n=10$ ta có $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$ với số hạng tổng quát:

$$T_{k+1} = C_{10}^k x^{3(10-k)} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C_{10}^k 2^k x^{30-5k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa $30 - 5k = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Vậy số hạng không chứa x là $C_{10}^6 2^6 = 13440$.

Câu 30: Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \dots + 2^n \cdot C_n^n = 59049$.

Biết số hạng thứ 3 trong khai triển Newton của $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$ có giá trị bằng $\frac{81}{2}n$. Tìm giá trị của x .

Trả lời: $x = \pm 1$

Lời giải

$$C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \dots + 2^n \cdot C_n^n = 59049 \Rightarrow (1+2)^n = 59049 \Leftrightarrow 3^n = 3^{10} \Leftrightarrow n = 10$$

Ta được nhị thức $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^{10}$.

Số hạng thứ ba của khai triển là $T_3 = C_{10}^2 \cdot (x^2)^8 \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = 405x^{14}$.

Theo giả thiết ta có: $405x^{14} = \frac{81}{2}n \Leftrightarrow 405x^{14} = 405 \Leftrightarrow x^{14} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Câu 31: Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển nhị thức Newton $(1+2x)(3+x)^{11}$.

Trả lời: 9045

Lời giải

$$\begin{aligned}(1+2x)(3+x)^{11} &= (3+x)^{11} + 2x(3+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 3^{11-k} \cdot x^k + 2x \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 3^{11-k} \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 3^{11-k} \cdot x^k + \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k \cdot 2 \cdot 3^{11-k} \cdot x^{k+1}.\end{aligned}$$

Vậy hệ số của x^9 là: $C_{11}^9 \cdot 3^2 + C_{11}^8 \cdot 2 \cdot 3^3 = 9045$.

Câu 32: Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niuton của $\left(\frac{n}{2x} + \frac{x}{2}\right)^{2n}$, ($x \neq 0$), biết số nguyên dương n thỏa mãn $C_n^3 + A_n^2 = 50$.

Trả lời: - 10

Lời giải

Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Ta có: $A_n^2 - C_n^3 = 10 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{3!(n-3)!} = 10$

$$\Leftrightarrow n(n-1) - \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) = 10 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{4}{3}n - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 \\ n = 6 \\ n = 5 \end{cases}.$$

So điều kiện nhận $n = 6$ hay $n = 5$.

Khi $n = 6$, ta có $\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k x^{2(6-k)} \left(\frac{-2}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^6 C_6^k (-2)^k x^{12-5k},$

Để có x^5 thì $12 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{7}{5}$ (loại).

Khi $n = 5$, ta có $\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k x^{2(5-k)} \left(\frac{-2}{x^3}\right)^k = \sum_{k=0}^5 C_5^k (-2)^k x^{10-5k},$

Để có x^5 thì $10 - 5k = 5 \Leftrightarrow k = 1,$

Vậy $a_5 = C_5^1 (-2) = -10$.

Câu 33: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6 + (x-3)^8$.

Trả lời: - 1272

Lời giải

Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6$ là $C_6^4 2^4 (-1)^2 = 240$,

Hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $(x-3)^8$ là $C_8^5 (-3)^3 = -1512$,

Suy ra hệ số của x^5 trong khai triển biểu thức $x(2x-1)^6 + (x-3)^8$ là $240 - 1512 = -1272$.

Câu 34: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn:

$$C_n^0 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^n C_n^n = 15625. \text{ Tìm } n.$$

Trả lời: $n=6$

Lời giải

Xét khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$.

Chọn $x=4$; ta có: $5^n = C_n^0 + 4C_n^1 + 4^2 C_n^2 + \dots + 4^n C_n^n$.

Suy ra: $15625 = 5^n \Leftrightarrow 5^6 = 5^n \Leftrightarrow n=6$.

Câu 35: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \dots + C_{2n}^{2n} = 512$.

Trả lời: $n=5$.

Lời giải

Xét $(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cdot 1^{2n-k} \cdot 1^k = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}$

Xét $(1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cdot 1^{2n-k} \cdot (-1)^k = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + C_{2n}^4 - \dots + C_{2n}^{2n}$

Lấy (1) + (2) $\Rightarrow 2^{2n} + 0^{2n} = 2(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + C_{2n}^6 + \dots + C_{2n}^{2n})$

$$\Leftrightarrow 2^{2n} = 2 \cdot 512 \Leftrightarrow 2^{2n} = 1024 \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{10} \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5.$$

Câu 36: Tính tổng $S = C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22}$.

Trả lời: $S = 2^{21} - \frac{C_{22}^{11}}{2}$.

Lời giải

$$2^{22} = (1+1)^{22} = C_{22}^0 + C_{22}^1 + C_{22}^2 + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22}.$$

Áp dụng tính chất: $C_n^k = C_n^{n-k}$, suy ra: $C_{22}^0 = C_{22}^{22}, C_{22}^1 = C_{22}^{21}, C_{22}^2 = C_{22}^{20}, \dots, C_{22}^{10} = C_{22}^{12}$.

Do đó:

$$\begin{aligned}
C_{22}^0 + C_{22}^1 + C_{22}^2 + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22} &= 2(C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22}) + C_{22}^{11} \\
\Rightarrow C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22} &= \frac{C_{22}^0 + C_{22}^1 + C_{22}^2 + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22}}{2} - \frac{C_{22}^{11}}{2} \\
\Rightarrow C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22} &= \frac{2^{22}}{2} - \frac{C_{22}^{11}}{2} \\
\Rightarrow C_{22}^{12} + C_{22}^{13} + \dots + C_{22}^{20} + C_{22}^{21} + C_{22}^{22} &= 2^{21} - \frac{C_{22}^{11}}{2} \quad S = 2^{21} - \frac{C_{22}^{11}}{2} .
\end{aligned}$$

Câu 37: Cho biểu thức $S = 3^{19} C_{20}^0 + 3^{18} C_{20}^1 + 3^{17} C_{20}^2 + \dots + \frac{1}{3} C_{20}^{20}$. Tính giá trị của $3S$.

Trả lời: 4^{20}

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
S &= 3^{19} C_{20}^0 + 3^{18} C_{20}^1 + 3^{17} C_{20}^2 + \dots + \frac{1}{3} C_{20}^{20} \Leftrightarrow 3S \\
&= 3^{20} C_{20}^0 + 3^{19} C_{20}^1 + 3^{18} C_{20}^2 + \dots + C_{20}^{20}, \\
\text{Xét khai triển: } (3+1)^{20} &= C_{20}^0 3^{20} 1^0 + C_{20}^1 3^{19} 1^1 + C_{20}^2 3^{18} 1^2 + \dots + C_{20}^{20} 3^0 1^{20}, \\
\Rightarrow (3+1)^{20} &= C_{20}^0 3^{20} + C_{20}^1 3^{19} + C_{20}^2 3^{18} + \dots + C_{20}^{20} \Leftrightarrow 3S = 4^{20}.
\end{aligned}$$

Câu 38: Một người có 500 triệu đồng gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Với giả thiết sau mỗi tháng người đó không rút tiền thì số tiền lãi được nhập vào số tiền ban đầu. Đây được gọi là hình thức lãi kép. Biết số tiền cả vốn lẫn lãi T sau n tháng được tính bởi công thức $T = T_0(1+r)^n$, trong đó T_0 là số tiền gửi lúc đầu và r là lãi suất của một tháng. Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của nhị thức Niu - tơn, tính gần đúng số tiền người đó nhận được (cả gốc lẫn lãi) sau 6 tháng.

Trả lời: 518000000 đồng.

Lời giải

Lãi suất của một tháng $r = \frac{7,2}{12} \% = 0,6\% /$ tháng.

Ta có: $T = T_0(1+r)^n$.

Suy ra: $T = 500.10^6 (1+0,006)^6 \approx 500.10^6 (C_6^0 + C_6^1 \cdot 0,006) \approx 518000000$ đồng.

Vậy: sau 6 tháng người đó nhận được hơn 518000000 đồng.

Câu 39: Số dân ở thời điểm hiện tại của một tỉnh là 1 triệu người. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của tỉnh đó là 5%. Sử dụng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của lũy thừa $(a+b)^n$, hỏi sau bao nhiêu năm thì số dân của tỉnh đó là 1,2 triệu người?

Trả lời: 4

Lời giải

Gọi A là số dân ban đầu, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm, A_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Khi đó: $A_n = A(1+r)^n$.

Theo giả thiết: $1,2 = \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$

$$\Leftrightarrow 1,2 = \left[C_n^0 + C_n^1 \cdot \left(\frac{5}{100}\right) + C_n^2 \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^{n-1} \right]$$

$$\Leftrightarrow 1,2 \approx C_n^0 + C_n^1 \cdot \frac{5}{100} \Leftrightarrow 1,2 \approx 1 + 0,05n \Leftrightarrow n \approx 4.$$

Vậy: Sau khoảng 4 năm thì số dân của tỉnh đó là 1,2 triệu người.

Câu 40: Ông A có 800 triệu đồng và ông B có 950 triệu đồng gửi hai ngân hàng khác nhau với lãi suất lần lượt là $7\%/năm$ và $5\%/năm$. Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của nhị thức Niu - tơn, ước lượng sau bao nhiêu năm thì số tiền của hai ông thu được là bằng nhau và mỗi người nhận được bao nhiêu tiền?

Trả lời: 1192000000 đồng.

Lời giải

Gọi P là số tiền ban đầu gửi vào ngân hàng, r là lãi suất, P_n lần lượt là số tiền nhận được sau n năm. Khi đó: $P_n = P(1+r)^n$. Theo giả thiết:

$$\begin{aligned} 800 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^n &= 950 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 \cdot \frac{7}{100} = \frac{19}{16} \left(C_n^0 + C_n^1 \cdot \frac{5}{100} \right) \Leftrightarrow 1 + \frac{7n}{100} = \frac{19}{16} + \frac{19n}{320} \Leftrightarrow \frac{17n}{1600} = \frac{3}{16} \\ \Rightarrow P_{17} &\approx 800000000 \left(C_{17}^0 + C_{17}^1 \cdot \frac{7}{100} \right) \approx 1192000000. \end{aligned}$$

Vậy sau hơn 17 năm mỗi người nhận được 1192000000 đồng.

Câu 41: Tìm hệ số của x^{11} trong khai triển $(3x - x^2)^{10}$.

Trả lời: - 196830

Lời giải

Số hạng tổng quát trong khai triển có dạng:

$$C_{10}^k (3x)^{10-k} (-x^2)^k = C_{10}^k \cdot 3^{10-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{10-k} \cdot x^{2k} = C_{10}^k \cdot 3^{10-k} \cdot (-1)^k \cdot x^{10+k}$$

Số hạng chứa x^{11} tương ứng với: $10+k=11 \Leftrightarrow k=1$

Vậy hệ số của x^{11} là: $C_{10}^1 \cdot 3^{10-1} \cdot (-1)^1 = -196830$.

Câu 42: Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(2x + \frac{1}{2x}\right)^9$.

Trả lời: $1152x^5$

Lời giải

Số hạng tổng quát trong khai triển có dạng:

$$C_9^k (2x)^{9-k} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^k = C_9^k \cdot 2^{9-k} \cdot x^{9-k} \cdot \frac{1}{2^k x^k} = C_9^k \cdot 2^{9-k} \cdot \frac{1}{2^k} x^{9-2k}$$

Số hạng chứa x^5 tương ứng với: $9 - 2k = 5 \Leftrightarrow k = 2$

Vậy số hạng chứa x^5 là: $C_9^2 \cdot 2^{9-2} \cdot \frac{1}{2^2} x^5 = 1152x^5$.

Câu 43: Tìm số hạng chứa x^{28} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{40}$.

Trả lời: $91390x^{28}$

Lời giải

Số hạng tổng quát trong khai triển có dạng:

$$C_{40}^k \cdot x^{40-k} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{40}^k \cdot x^{40-k} \cdot \frac{(-1)^k}{x^{2k}} = C_{40}^k \cdot (-1)^k \cdot x^{40-3k}$$

Số hạng chứa x^{28} tương ứng với: $40 - 3k = 28 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy số hạng chứa x^{28} là: $C_{40}^4 \cdot (-1)^4 \cdot x^{28} = 91390x^{28}$.

Câu 44: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển $P(x) = x(1-3x)^5 - x^2(1+2x)^{10}$.

Trả lời: -555

Lời giải

Hệ số của x^5 trong khai triển cũng là tổng hệ số của x^5 trong khai triển hai biểu thức thành phần.

* Số hạng tổng quát trong khai triển $(1-3x)^5$ có dạng:
 $C_5^k \cdot 1^{5-k} \cdot (-3x)^k = C_5^k \cdot (-3)^k \cdot x^k$

Số hạng chứa x^4 tương ứng với: $k = 4$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x(1-3x)^5$ là: $C_5^4 \cdot (-3)^4 = 405$.

* Số hạng tổng quát trong khai triển $(1+2x)^{10}$ có dạng:
 $C_{10}^h \cdot 1^{10-h} \cdot (2x)^h = C_{10}^h \cdot 2^h \cdot x^h$

Số hạng chứa x^3 tương ứng với: $h=3$.

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển $x^2(1+2x)^{10}$ là: $C_{10}^3 \cdot 2^3 = 960$.

Kết luận: Hệ số của x^5 trong khai triển đã cho là: $405 - 960 = -555$.

Câu 45: Tính tổng S tất cả các hệ số trong khai triển $(3x - 4)^{17}$.

Trả lời: $S = -1$

Lời giải

Ta có: $(3x - 4)^{17} = C_{17}^0 \cdot (3x)^{17} + C_{17}^1 \cdot (3x)^{16} \cdot (-4) + C_{17}^2 \cdot (3x)^{15} \cdot (-4)^2 + \dots + C_{17}^{17} \cdot (-4)^{17}$

Để tìm tổng tất cả hệ số của khai triển trên, ta thay $x=1$ vào khai triển trên, ta được:

$$S = C_{17}^0 \cdot (3 \cdot 1)^{17} + C_{17}^1 \cdot (3 \cdot 1)^{16} \cdot (-4) + C_{17}^2 \cdot (3 \cdot 1)^{15} \cdot (-4)^2 + \dots + C_{17}^{17} \cdot (-4)^{17} = (3 \cdot 1 - 4)^{17} = -1$$

Vậy tổng tất cả hệ số của khai triển trên là $S = -1$

Câu 46: Tính tổng $S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

Trả lời: 2^n

Lời giải

Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + \dots + C_n^n \cdot x^n$

Ta thay $x=1$ vào hai vế khai triển trên, ta được:

$$S = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

Câu 47: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ với $x \neq 0$, biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển bằng 1080.

Trả lời: -810

Lời giải

Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ với $x \neq 0$, biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển bằng 1080.

Số hạng tổng quát trong khai triển có dạng:

$$C_n^k (3x^2)^{n-k} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^k = C_n^k \cdot 3^{n-k} \cdot x^{2n-2k} \cdot \frac{(-2)^k}{x^k} = C_n^k \cdot 3^{n-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{2n-3k}$$

Số hạng thứ 3 tương ứng với: $k=2$.

Vì hệ số của x^3 là 1080 nên: $C_n^2 \cdot 3^{n-2} \cdot (-2)^2 = 1080$

$$\Leftrightarrow C_n^2 \cdot 3^{n-2} = 270 = 90 \cdot 3 = 30 \cdot 3^2 = 10 \cdot 3^3$$

Trường hợp 1: $\Leftrightarrow C_n^2 \cdot 3^{n-2} = 90 \cdot 3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow C_3^2 = 90$ (sai)

Trường hợp 2: $\Leftrightarrow C_n^2 \cdot 3^{n-2} = 30 \cdot 3^2 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow C_4^2 = 30$ (sai)

Trường hợp 3: $\Leftrightarrow C_n^2 \cdot 3^{n-2} = 10 \cdot 3^3 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow C_5^2 = 10$ (đúng)

Vậy $n = 5$.

Khi đó, số hạng tổng quát của khai triển đã cho là: $C_5^k \cdot 3^{5-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{10-3k}$

Số hạng không chứa x^7 tương ứng với: $10 - 3k = 7 \Leftrightarrow k = 1$

Vậy hệ số của x^7 trong khai triển là: $C_5^1 \cdot 3^{5-1} \cdot (-2)^1 = -810$.

Câu 48: Khai triển đa thức $P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1x + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm hệ số a_k ($0 \leq k \leq 12$) lớn nhất trong khai triển trên.

Trả lời: 64481508

Lời giải

Khai triển đa thức $P(x) = (1+3x)^{14} = a_0 + a_1x + \dots + a_{14}x^{14}$. Tìm hệ số a_k ($0 \leq k \leq 14$) lớn nhất trong khai triển trên.

Số hạng tổng quát trong khai triển $(1+3x)^{14}$ có dạng:

$$C_{14}^k \cdot 1^{14-k} \cdot (3x)^k = C_{14}^k \cdot 3^k \cdot x^k \quad (0 \leq k \leq 14)$$

Hệ số tổng quát là: $a_k = C_{14}^k \cdot 3^k$

So sánh a_k và a_{k+1} , ta có:

$$\begin{aligned} a_k - a_{k+1} &= 3^k \cdot C_{14}^k - 3^{k+1} \cdot C_{14}^{k+1} = 3^k \cdot \frac{14!}{k!(14-k)!} - 3^{k+1} \cdot \frac{14!}{(k+1)!(13-k)!} \\ &= \frac{3^k \cdot 14!}{(k+1)!(14-k)!} [k+1 - 3(14-k)] = \frac{3^k \cdot 14!}{(k+1)!(14-k)!} \cdot (4k-41) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra; } \begin{cases} a_k > a_{k+1} & \text{ khi } k > \frac{41}{4} \\ a_k < a_{k+1} & \text{ khi } k < \frac{41}{4} \end{cases}$$

$$\text{hay } \Rightarrow \begin{cases} a_k > a_{k+1} & \text{ khi } k \geq 11 \\ a_k < a_{k+1} & \text{ khi } k \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} > a_{12} > a_{13} > a_{14} \\ a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9 < a_{10} < a_{11} \end{cases}$$

Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển là: $a_{11} = C_{14}^{11} \cdot 3^{11} = 64481508$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vn teach.com>