

CHƯƠNG I: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT

VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa :

Giả sử K là một khoảng , một đoạn hoặc một nửa khoảng .

Hàm số f xác định trên K được gọi là :

- Đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Nghịch biến trên K nếu với $\forall x_1, x_2 \in K$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu :

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I

- Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.
- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu :

Định lý :

Giả sử I là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn , f là hàm số liên tục trên I và có đạo hàm tại mọi điểm trong của I (tức là điểm thuộc I nhưng không phải đầu mút của I) . Khi đó :

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I .
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I .

Chú ý :

- Nếu hàm số f liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f đồng biến trên $[a;b]$.
- Nếu hàm số f liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f nghịch biến trên $[a;b]$.
- Ta có thể mở rộng định lý trên như sau

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I . Nếu $f'(x) \geq 0$ với $\forall x \in I$

(hoặc $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in I$) và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I .

Chú ý. Vận dụng định lý trên vào các hàm số thường gặp trong chương trình.

*Nếu hàm số f là hàm đa thức (không kể hàm số hằng) hoặc $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x)$ là đa thức bậc hai , $Q(x)$ là đa thức bậc nhất và $P(x)$ không chia hết cho $Q(x)$ thì hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên $K \Leftrightarrow \forall x \in K, f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

*Nếu hàm số f là hàm nhất biến , $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực và $ad - bc \neq 0$ thì hàm số f đồng biến (nghịch biến) trên $K \Leftrightarrow \forall x \in K, f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Vấn đề 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Cho K là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn. Hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên K . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm số hằng trên K thì $f'(x) = 0, \forall x \in K$.
- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trên K .
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ tại hữu hạn giá trị $x \in (a; b)$.
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ tại hữu hạn giá trị $x \in (a; b)$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên $(a; b)$ thì $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng $(a; b)$.

Câu 2. Cho hàm của hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$, xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau

- Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Với mọi $x_1 < x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Với mọi $x_1 > x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- $f(1) > f(2)$.
- $f\left(\frac{4}{3}\right) > f\left(\frac{5}{4}\right)$.
- $f(1) > f(-1)$.
- $f(3) > f(\pi)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có tính chất $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 3)$ và $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x \in [1; 2]$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

- Hàm số $f(x)$ là hàm hằng (tức là không đổi) trên khoảng $(1; 2)$.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

c. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

d. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) > 0, \forall x > 0$. Biết $f(1) = 2$, hỏi khẳng định nào sau đây có thể xảy ra?

a. $f(2) = 1$.

b. $f(-1) = 2$.

c. $f(2) + f(3) = 4$.

d. $f(2017) > f(2016)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến, có đạo hàm trên khoảng K và hai điểm $x_1, x_2 \in K; x_1 \geq x_2$. Khi đó xét dấu biểu thức $P = f'(x_1)(x_1 - x_2) + f'(x_2)(f(x_1) - f(x_2))$.

Vấn đề 2. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA MỘT HÀM SỐ CHO TRƯỚC

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

B1. Tìm tập xác định của hàm số f .

B2. Tính đạo hàm $f'(x)$ và tìm các điểm x_0 sao cho $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định.

B3. Lập bảng xét dấu $f'(x)$, dựa vào định lý 1, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$.

$$\forall x \in \mathbb{R}: y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y(1) = 1 \\ x = 3, y(3) = -3 \end{cases}$$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y		1		$+\infty$	
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
			-3		

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$,
nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.

Câu 2. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

a) $y = 2 - x$.

b) $y = x^2 + 4x + 9$

Câu 3. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

a) $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

b) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

c) $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

e) $y = -x^3 + 3x^2 - 9x$.

f) $y = x^3 + x$.

g) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$.

h) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Câu 4. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$$

a)

$$y = x^4 - 8x^2 - 4$$

b)

$$y = -x^4 + 2x^2 + 2$$

c)

$$y = x^4 - 3$$

d)

$$y = 2x^4 + 4x^2 - 3$$

e)

$$y = -2x^4 - 4x^2 - 3$$

f)

Câu 5. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

a) $y = \frac{x-2}{x+3}$.

b) $y = \frac{2x-1}{1-x}$.

c) $y = \frac{x-2}{x+3}$.

d) $f(x) = \frac{3x+1}{-x+1}$.

e) $y = \frac{-2}{-x+1}$.

Câu 6. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

a) $y = x^4 - 4x^3 + 3$.

b) $y = x^4 + 4x - 6$.

c) $y = (x^2 - x)^2$.

d) $y = 2(x+2)^4 + 3$.

e) $y = 3x^4 + 4x^3 - 30x^2 + 36x + 1$

f) $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$.

Câu 7. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

a)

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

b)

Câu 8. ... Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x}$$

a)

$$y = \sqrt{2 - x - x^2}$$

b)

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

c)

$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$$

d)

$$y = 4x - \sqrt{x^2 - x + 1}$$

e)

$$y = x - 2\sqrt{x}$$

f)

$$y = \sqrt{2x - x^2} - x$$

g)

$$y = \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

h)

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

k)

Câu 9. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số $y = f(x)$ biết:

a) $f'(x) = x(x-2)^3$

b) $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$

c) $f'(x) = (x+1)^2(1-x)(x+3)$

Câu 10. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến (hoặc xét chiều biến thiên) của hàm số:

a) $y = -x + \sin x$

b) $y = \sin x + \cos x - \sqrt{3}x$

c) $y = x^3 + x - \sin x$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ nghịch biến khi x thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 2)$

B. $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

C. $(0; +\infty)$

D. $(0; 2)$

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 4$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

Câu 3. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$

B. $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

C. $(-\infty; 2)$

D. $(0; +\infty)$

Câu 4. Các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 4$ là

A. $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$

B. $(-2; 0)$ và $(0; 2)$

C. $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$

D. $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$

Câu 5. Hàm số $y = x^4 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

B. $(-\infty; 0)$

C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

D. $(0; +\infty)$

Câu 6. Hàm số $y = -x^4 + 8x^2 + 6$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 2)$

B. $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$

C. $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$

D. $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$

Câu 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$

Câu 8. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ nghịch biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

B. $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$

C. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$

D. $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên $(-1; 1)$

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{3-x}{2x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 12. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

A. $y = -x^3 - 2x^2 + 3$

B. $y = \frac{x+1}{x-2}$

C. $y = \frac{2x+1}{x+2}$

D. $y = 2x^3 + 3x^2 + 10x - 1$

Câu 13. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 9x + 4$.

B. $y = -x^4 + x^2 + 1$.

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

D. $y = 1 + \sin x$.

Câu 14. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.

B. $y = x^2$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = x^3 - 1$.

Câu 15. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = x^3 + x^2 + 5x - 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2$.

D. $y = -5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$.

Câu 16. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. $y = x^4 - x^2 + 3$.

B. $y = -x^3 + x - 1$.

C. $y = \frac{x-2}{2x-3}$.

D. $y = \frac{3-x}{x+1}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$. Chọn khẳng định đúng dưới đây.

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 18. Hàm số $y = \frac{x^4}{2} - \frac{10x^3}{3} + 2x^2 + 16x - 15$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2; 4)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(4; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Câu 19. Hàm số $y = (x^2 - x)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(0; 1)$.

Câu 20. Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

A. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

D. $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Câu 21. Hàm số $y = \sqrt{8+2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(1; 4)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(-2; 1)$.

Câu 22. Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 23. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(0; 1)$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x) = x(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 2)$

B. $(0; +\infty)$

C. $(-\infty; 0)$

D. $(2; +\infty)$

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(1-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(1; +\infty)$ B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$ C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$ D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Câu 27. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Vấn đề 3. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO BBT, ĐỒ THỊ $f'(x)$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Cách 1: Từ đồ thị, ta lập bảng xét dấu $f'(x)$, dựa vào định lí 1, nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Cách 2: Nhìn đồ thị đi lên trong khoảng x nào thì hàm số đồng biến trong khoảng ấy. Nhìn đồ thị đi xuống trong khoảng x nào thì hàm số nghịch biến trong khoảng ấy.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	1	0	1	$+\infty$		

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$.
 B. $(-1; +\infty)$.
 C. $(0; 1)$.
 D. $(-1; 0)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; 1)$ B. $(0; +\infty)$ C. $(-\infty; -2)$ D. $(-2; 0)$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$ B. $(1; +\infty)$ C. $(0; 1)$ D. $(-1; 3)$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.
Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		-4		$+\infty$	0	$+\infty$

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		3	$+\infty$	1	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 2)$ B. $(0; 2)$ C. $(3; +\infty)$ D. $(-\infty; 1)$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

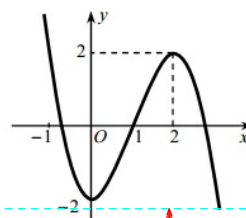
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$	4	$+\infty$	

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

- A. $(-1;1)$. B. $(0;1)$. C. $(4;+\infty)$. D. $(-\infty;2)$.

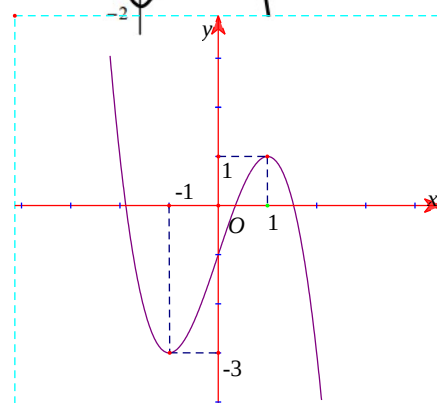
Câu 8: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;2)$. B. $(-\infty;0)$.
C. $(0;2)$. D. $(2;+\infty)$.



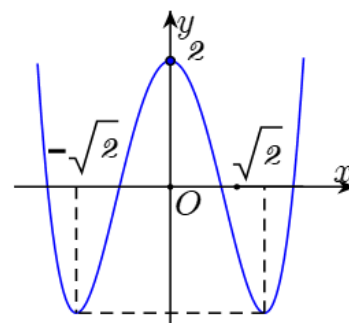
Câu 9: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1;+\infty)$. B. $(-1;+\infty)$.
C. $(-\infty;1)$. D. $(-1;1)$.



Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

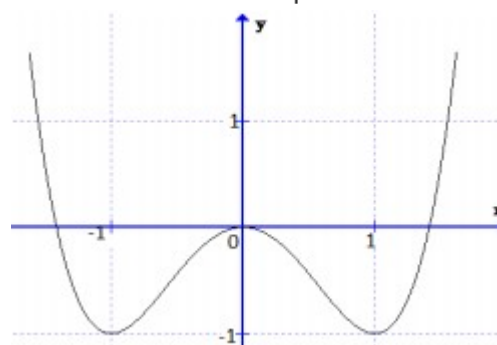
- A. $(-\infty;0)$. B. $(\sqrt{2};+\infty)$.
C. $(0;\sqrt{2})$. D. $(-2;2)$.



Câu 11: Cho đồ thị hàm số như hình vẽ.

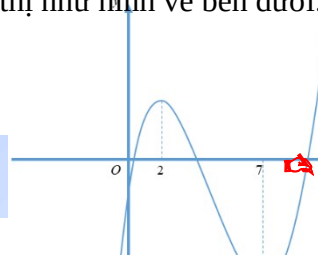
Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.



Câu 12: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$



- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; 6)$

Vấn đề 4. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM HỮU TỈ BẬC NHẤT ĐƠN ĐIỀU

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Phương pháp:

Hàm số: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Có TXĐ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

- o Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc > 0$
- o Để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định thì $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc < 0$

- o Để hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì

$$\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (a; b) \\ -\frac{d}{c} \in (a; b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq a \\ -\frac{d}{c} \geq b \end{cases}$$
- o Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì

$$\begin{cases} y' < 0, \forall x \in (a; b) \\ -\frac{d}{c} \in (a; b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \leq a \\ -\frac{d}{c} \geq b \end{cases}$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{1+m}{(x+1)^2}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định của nó khi $y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \frac{1+m}{(x+1)^2} > 0; \forall x \in D$
 $\Leftrightarrow 1+m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Câu 2. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

Câu 3. Tìm m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

Câu 4. Tìm m để hàm số $y = \frac{x+m}{x+2}$ đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

Câu 5. Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

Câu 6. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

LỜI GIẢI

Điều kiện: $x \neq -4m$.

Để hàm số xác định trên $(2; +\infty)$ thì $-4m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$

$$y' = \frac{4m-3}{(x+4m)^2}$$

Ta có:

Để hàm số nghịch biến thì

$$y' < 0 \quad \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \frac{4m-3}{(x+4m)^2} < 0 \quad \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 4m-3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$$

Vậy $-\frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{4}$ nên có 1 số nguyên $m=0$ thỏa mãn.

Câu 7. a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+16}{x+m}$ đồng biến trên $(0; 10)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x-m^2}{x-3m+2}$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 8. a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên $(0; 2)$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{-2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .
- A. 4 B. Vô số C. 3 D. 5
- Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2x + m}{x - 1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.
- A. $m \geq 2$. B. $m > -2$. C. $m < -2$. D. $m \leq -2$.
- Câu 3.** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x - m}{x + 1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là:
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; 1]$. C. $(-\infty; -1]$. D. $(-1; +\infty)$.
- Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .
- A. 5 B. 4 C. Vô số D. 3
- Câu 5.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2}{x + 5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?
- A. 2 B. Vô số C. 1 D. 3
- Câu 6.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 1}{x + 3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?
- A. 3 B. Vô số C. 0 D. 6

- Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.
- A. 2 B. 6 C. Vô số D. 1
- Câu 8.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?
- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.
- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
- A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$ B. $m \leq 0$
C. $1 \leq m < 2$ D. $m \geq 2$
- Câu 10.** Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
- A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$ B. $m > 2$ C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$ D. $-1 < m < 1$.

Vấn đề 5. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM BẬC BA ĐƠN ĐIỆU

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tìm m để hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$

Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ là tam thức bậc 2 có biệt thức $\Delta' = b^2 - 3ac$.

- Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ (thêm $a = b = 0, c > 0$ nếu a chứa tham số m)
- Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ (thêm $a = b = 0, c < 0$ nếu a chứa tham số m)

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có, $y' = x^2 - 4mx + 4$.

$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (-4m)^2 - 4.1.4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$

YCBT

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m+1)x + 5$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. a) Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{mx^2}{2} + 2x + 2016$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 4. a) Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (3m + 2)x - 2018$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

c) Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m + 1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ luôn đồng biến trên tập xác định.

Câu 5. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - mx + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 6. a) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m-2)x - 3m$ nghịch biến

$(-\infty; +\infty)$
trên khoảng .

c) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m-2)x - 3m$ nghịch biến
trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

d) Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng
 $(-\infty; +\infty)$?

e) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên
 $\mathbb{R}$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m-2)x + 9m - 5$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 8. a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ chỉ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

b) Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ chỉ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Tính tổng tất cả phần tử của S .

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- A. 2 B. 1 C. 0 D. 3
- Câu 2.** Tìm m để hàm số $y = -x^3 + mx$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- A. $m \notin 0$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. $m^3 \neq 0$.
- Câu 3.** Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?
- A. 0. B. 6. C. 5. D. 7.
- Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- A. $-1 \leq m \leq 1$. B. $-1 < m < 1$. C. $0 \leq m \leq 1$. D. $0 < m < 1$.
- Câu 5.** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $(-3;3)$.

B. $[-3;3]$.

C. $\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

D. $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$.

Câu 6. Giá trị nguyên lớn nhất của tham số m để $f(x) = 2mx^3 - 6x^2 + (2m - 4)x + 3 + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. -3 .

B. 2 .

C. 1 .

D. -1 .

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 9x + 2018$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \in [-3;3]$.

B. $m \in (-3;3)$.

C. $m \in \mathbb{R} \setminus (-3;3)$.

D. $m \in \mathbb{R} \setminus [-3;3]$.

Câu 8. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 - (2m+1)x + 5$ nghịch biến trên tập xác định.

A. $-\frac{5}{4} \leq m \leq 1$.

B. $-\frac{2}{7} \leq m < 1$.

C. $-\frac{7}{2} \leq m < 1$.

D. $-\frac{2}{7} \leq m \leq 1$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - x^2 + mx + m$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

A. $m \leq \frac{1}{3}$.

B. $m > \frac{1}{3}$.

C. $m \geq \frac{1}{3}$.

D. $m < \frac{1}{3}$.

Vấn đề 6. TÌM THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN (HOẶC NGHỊCH BIẾN) TRÊN KHOẢNG $(a;b)$.

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Tìm m để hàm số $y = f(x, m)$ đơn điệu trên khoảng (a, b)

- Để hàm số đồng biến trên khoảng (a, b) thì $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$.
- Để hàm số nghịch biến trên khoảng (a, b) thì $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$

Phương pháp:

- Cô lập m .
- Nếu không cô lập được m , thì thường tìm được nghiệm đẹp của đạo hàm

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến

trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

A. $(-\infty; 0]$

B. $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$

C. $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$

D. $[0; +\infty)$

Lời giải

Ta có $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ thì $y' = -3x^2 - 6x + 4m - 9 \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty; -1)$
 $\Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 9 \quad \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 4m \leq \min_{(-\infty; -1]} f(x), \quad f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

Ta có $f'(x) = 6x + 12; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$+\infty$	-3	$+\infty$

Suy ra $\min_{(-\infty; 0]} f(x) = -3 \Rightarrow 4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}$. **Chọn C**

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m ($m \in [-2018; 2018]$) để hàm số $y = x^2(m - x) - m$ đồng biến trên $(1; 2)$?

Câu 3. a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

b) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m - 6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là?

c) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + (6m + 5)x - 1$ đồng biến trên $(0; 4)$ là?

$(2; +\infty)$

biến trên ?

d) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số

$$y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$$

 $(2; +\infty)$ đồng biến trên khoảng S . Số phần tử của S bằng ?

- Câu 4.** a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 - 4mx$ đồng biến trên đoạn $[1; 4]$.
- b) Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?
- c) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x + 1$ đồng biến trên các khoảng thỏa mãn $1 \leq |x| \leq 2$.

Câu 6. a) Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T là?

b) Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ (1) (1) (1; 2) (m là tham số). Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng .

$$f(x) = mx^4 + 2x^2 - 1$$

Câu 7. a) Cho hàm số $f(x) = mx^4 + 2x^2 - 1$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2018; 2018)$ sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$?

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

Câu 8. a) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

b) Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left[-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số tối giản và $q > 0$. Hỏi tổng $p+q$ là?

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Tìm m để hàm số $y = (1 - m)x + 8$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.
- Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \cos 2x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 A. $m \geq -2$. B. $m \geq 2$. C. $-2 \leq m \leq 2$. D. $m \leq -2$.
- Câu 3.** Tìm m để hàm số $y = x^2(m - x) - 2018$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
 A. $m \in [3; +\infty)$. B. $m \in [0; +\infty)$. C. $m \in [-3; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -1]$.
- Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = 2x^3 - 3(m + 2)x^2 + 12mx$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 A. $m \leq 3$. B. $m \leq 2$. C. $m \geq 3$. D. $2 < m < 3$.
- Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2 - 2x + m^2 - 5m + 6$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; 5)$.
 A. $m \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.
 C. $\forall x \in \mathbb{R}$. D. $[2; 3]$.
- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là
 A. $(-\infty; 0]$. B. $[-\frac{3}{4}; +\infty)$. C. $(-\infty; -\frac{3}{4}]$. D. $[0; +\infty)$.
- Câu 7.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
 A. 5 B. 3 C. 0 D. 4
- Câu 8.** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m sao cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + (m^2 + 2018m - 1)\frac{x^2}{2} - 2019m$ tăng trên $(-\infty; -2018)$. Tổng tất cả các phần tử của tập hợp S là
 A. -2039189. B. -2039190. C. -2019. D. -2018.
- Câu 9.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 3$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 A. $m \leq 12$. B. $m \geq 0$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq 12$.

- Câu 10.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.
- Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$ là
- A. $m < 2$. B. $1 < m < 2$. C. $m \leq 2$. D. $1 \leq m \leq 2$.
- Câu 12.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc khoảng $(-1000; 1000)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?
- A. 1998. B. 999. C. 998. D. 1001.

Vấn đề 7. ỨNG DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀO PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, BẤT ĐẲNG THỨC

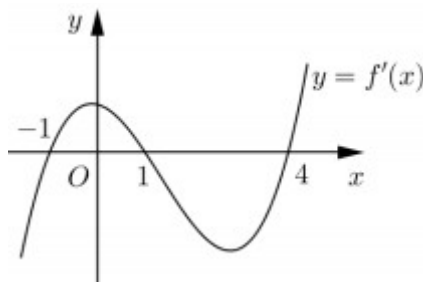
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ sao cho $f'(x) > 0, \forall x > 0$. Biết $e \approx 2,718$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $f(e) + f(\pi) < 2f(2)$. B. $f(1) + f(2) = 2f(3)$.
C. $f(e) - f(\pi) \geq 0$. D. $f(e) + f(\pi) < f(3) + f(4)$.
- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực của x để $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2)$
- A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$.
- Câu 3.** Tập nghiệm của bất phương trình $(x-1)(2\sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{x+6}) \leq x+6$ là $[a; b]$. Tính $a+b$.
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.
- Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \leq m^2 - m + 1$ nghiệm đúng $\forall x \in [-3, 6]$?
- A. $-1 \leq m \leq 0$. B. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$.
C. $m \geq -1$. D. $0 \leq m \leq 2$.
- Câu 5.** Biết phương trình $(2x+1)(2+\sqrt{4x^2+4x+4}) + 3x(2+\sqrt{9x^2+3}) = 0$ có nghiệm duy nhất là a . Khi đó:
- A. $1 < a < 2$. B. $0 < a < 1$. C. $-2 < a < -1$. D. $-1 < a < 0$.
- Câu 6.** Tìm tất cả các giá trị tham số m để bất phương trình $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 8]$.
- A. $m \geq 16$. B. $m \geq 15$. C. $m \geq 8$. D. $-2 \leq m \leq 16$.

Vấn đề 8. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT ĐỒ THỊ $f'(x)$ hoặc BBT

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



- A. $(1;3)$ B. $(2;+\infty)$ C. $(-2;1)$ D. $(-\infty;-2)$

Lời giải

Cách 1:

Ta thấy $f'(x) < 0$ với $\begin{cases} x \in (1;4) \\ x < -1 \end{cases}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $(1;4)$ và $(-\infty;-1)$ suy ra $g(x) = f(2-x)$ đồng biến trên $(-4;-1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó $f(2-x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$ và $(3;+\infty)$

Cách 2:

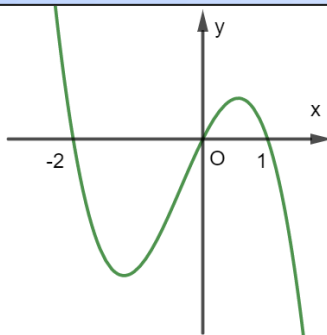
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

Ta có $(f(2-x))' = (2-x)' \cdot f'(2-x) = -f'(2-x)$.

Để hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến thì $(f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$.

Chọn C

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



$$y = f(x)$$

Xét tính đơn điệu hàm số

.....

.....

.....

.....

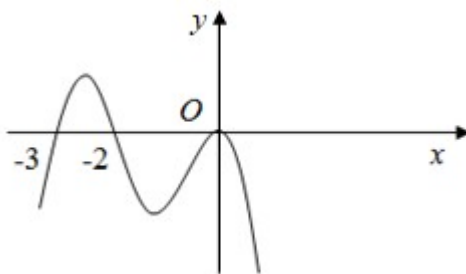
.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



$$y = f(x)$$

Xét tính đơn điệu hàm số

.....

.....

.....

.....

.....

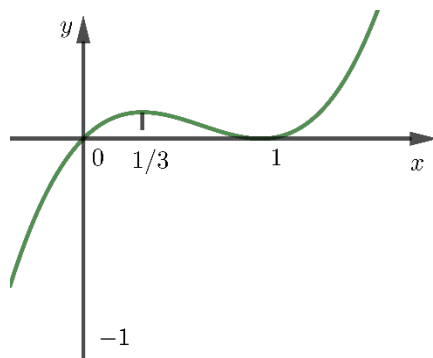
.....

.....

.....

.....

Câu 4. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ.



$$y = f(x)$$

Xét tính đơn điệu hàm số

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét tính đơn điệu hàm số $y = -2f(x)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		0	$+$

$$y = f(x^2)$$

Xét tính đơn điệu hàm số

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$. Xét tính đơn điệu hàm số $y = f(x^2)$.

.....

.....

.....

.....

.....

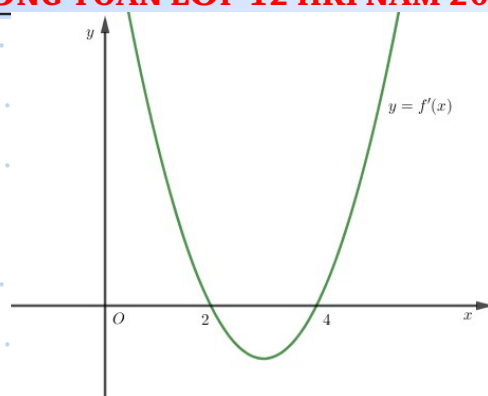
.....

.....

Câu 8. ... Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

$$y = f(1+x^2)$$

Xét tính đơn điệu hàm số



Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

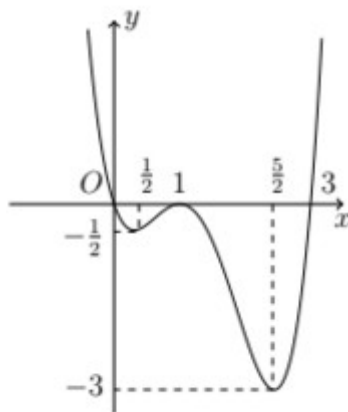
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

$$g(x) = f(2-x) - 2$$

Xét tính đơn điệu hàm số ?

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



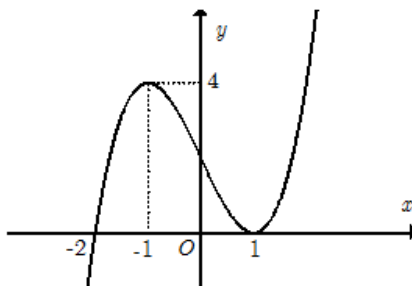
- A. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$. B. $(3; +\infty)$. C. $(0; 3)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hàm số $y = -2018 \cdot f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		-
y	0	$+\infty$	0

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

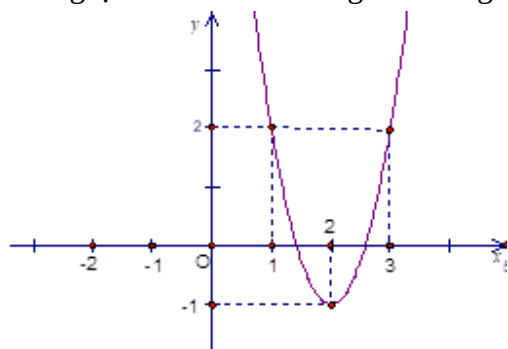
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây sai?

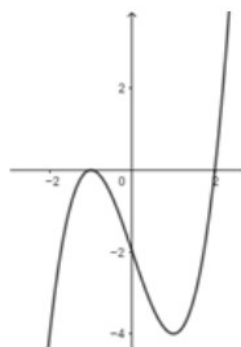
- A. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 B. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 C. Trên $(-1; 1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.
 D. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 2.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$, biết rằng hàm số $y = f'(x-2) + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



- A. $(-\infty; 2)$. B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

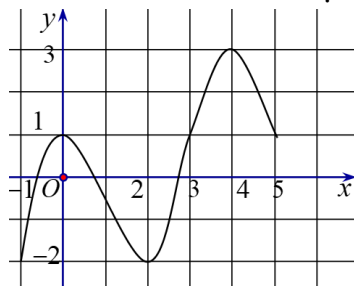
Câu 5. Cho hàm số f có đạo hàm trên M và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
 B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.
 D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình dưới.



Hàm số $y = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-1; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(-3; -2)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm thỏa $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2018$ với $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 3)$.

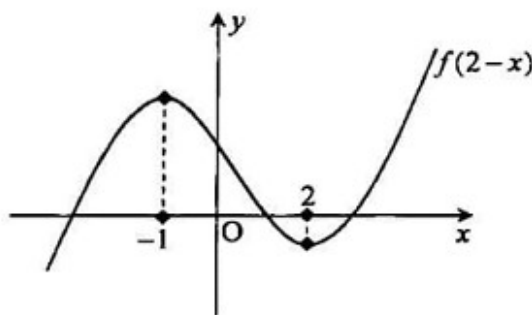
Câu 8. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-4; -3)$.

Câu 9. Cho đồ thị hàm số $y = f(2-x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-1; 2)$. B. $(0; 3)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(0; 1)$.

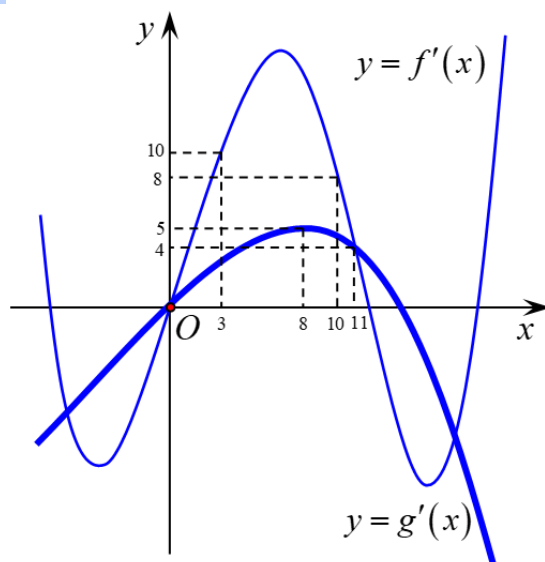
Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

Câu 11. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó **đường cong đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5; \frac{31}{5}\right)$.

B. $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$.

C. $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$.

D. $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.