UBND HUYỆN NHO QUAN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
Năm học: 2014-2015
MÔN: TOÁN LỚP 8

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$a) a^3 - a^2 - 4a + 4$ $\qquad$ $b) 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3$

2. Cho biểu thức : $A = \left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{5-x}{1-x^2}\right) : \dfrac{1-2x}{x^2-1}$
   a) Rút gọn biểu thức A
   b) Tìm các giá trị nguyên của x để bểu thức A nhận giá trị nguyên
   c) Tìm x để $|A| + A = 0$

Câu 2. (3,0 điểm)

Giải các phương trình sau:

$a) |x-2|(x-1)(x+1)(x+2) = 4$ $\qquad$ $b) \dfrac{15x}{x^2+3x-4} = \dfrac{12}{x+4} + \dfrac{4}{x-1} + 1$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Cho a,b,c là các số hữu tỷ thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ac = 1$. Chứng minh rằng biểu thức $Q = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ là bình phương của một số hữu tỷ
2. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 4xy + 5y^2 - 16 = 0$
3. Cho các số nguyên a,b,c thỏa mãn $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 210$
   Tính giá trị của biểu thức $B = |a-b| + |b-c| + |c-a|$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC, M là một điểm thuộc cạnh BC (M khác B, M khác C). Qua M kẻ các đường thẳng song song với AC, AB chúng cắt AB, AC lần lượt tại D và E

a) Chứng minh tứ giác $ADME$ là hình bình hành. Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để hình bình hành $ADME$ là hình thoi
b) Chứng minh rằng $BD.EC = DM.AE$
c) Cho $S_{BDM} = 9cm^2, S_{CME} = 16cm^2$. Tính S_{ABC} (ký hiệu S là diện tích tam giác)
d) Chứng minh rằng $AM.BC < AC.BM + AB.CM$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho số thực x thỏa mãn điều kiện $0 \le x \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{2 - x^2} + \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) a) $a^3 - a^2 - 4a + 4 = a^2(a-1) - 4(a-1) = (a-1)(a+2)(a-2)$

$b) 2a^3 + 7a^2b + 7ab^2 + 2b^3 = 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 7ab(a+b)$

$= (a+b)(2a^2 + 2b^2 + 5ab)$

$= (a+b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab) = (a+b)\left[2a(a+2b) + b(b+2a)\right]$

$= (a+b)(2a+b)(a+2b)$

2) $a) A = \left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{5-x}{1-x^2}\right) : \dfrac{1-2x}{x^2-1}$

ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \dfrac{1}{2}$

$A = \left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{5-x}{1-x^2}\right) : \dfrac{1-2x}{x^2-1} = \left(\dfrac{x+1+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2}\right) . \dfrac{x^2-1}{1-2x}$

$= \dfrac{-2}{1-x^2} . \dfrac{x^2-1}{1-2x} = \dfrac{2}{1-2x}$

b) Để A nguyên thì $\dfrac{2}{1-2x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1-2x \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

$*) 1-2x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} (ktm)$

$*) 1-2x = -1 \Rightarrow x = 1 (ktm)$

$*) 1-2x = 1 \Leftrightarrow x = 0 (tm)$

$*) 1-2x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{2} (ktm)$

Vậy $x = 0$ thì A nhận giá trị nguyên

$c) |A| + A = 0 \Leftrightarrow |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0 \Leftrightarrow 1-2x < 0 \Leftrightarrow -2x < -1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$

Đối chiếu với ĐKXĐ ta có $x > \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm

Câu 2.

a) Nếu $x \geq 2$, phương trình đã cho trở thành

$$(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=4$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(ktm) \\ x=\sqrt{5}(tm) \\ x=-\sqrt{5}(ktm) \end{array}\right.$$

*) Nếu $x<2$, phương trình đã cho trở thành

$$(2-x)(x-1)(x+1)(x+2)=4 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)=-4$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4)=-4 \Leftrightarrow x^4-5x^2+8=0 \Leftrightarrow \left(x^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=0(VN)$$

Vậy $S=\left\{\sqrt{5}\right\}$

b) ĐKXĐ: $x \neq -4; x \neq 1$

$$\frac{15x}{x^2+3x-4}=\frac{12}{x+4}+\frac{4}{x-1}+1 \Leftrightarrow \frac{15x}{(x+4)(x-1)}=\frac{12}{x+4}+\frac{4}{x-1}+1$$

$$\Rightarrow 15x=12(x-1)+4(x+4)+x^2+3x-4$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad (tm) \\ x=-4(ktm) \end{array}\right.$$

Vậy $S=\left\{0\right\}$

Câu 3.

1) Vì $ab+ac+bc=1$ nên $a^2+1=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$

Tương tự: $b^2+1=(a+b)(b+c)$ $\quad c^2+1=(b+c)(c+a)$

Do đó: $Q=(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)=\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2 \Rightarrow dfcm$

2) $x^2-4xy+5y^2-16=0 \Leftrightarrow (x-2y)^2=16-y^2(1)$

Từ (1) suy ra $16-y^2\geq 0 \Leftrightarrow y^2\leq 16 \Rightarrow y^2\in\{0;4;9;16\}$

$*)\, y^2=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=\pm 4$

$*)\, y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2 \Rightarrow x\notin \mathbb{Z}(ktm)$

$*)\, y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3 \Rightarrow x\notin \mathbb{Z}(ktm)$

$*)\, y^2=16 \Rightarrow y=\pm 4 \Rightarrow x=\pm 8$

Vậy phương trình đã cho có các cặp nghiệm nguyên là

$(4;0);(-4;0);(8;4);(-8;-4)$

3) Đặt $a-b=x;b-c=y;c-a=z \Rightarrow x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y),$ Ta có:

$x^3+y^3+z^3=210 \Leftrightarrow x^3+y^3-(x+y)^3=210 \Leftrightarrow -3xy(x+y)=210 \Leftrightarrow xyz=210$

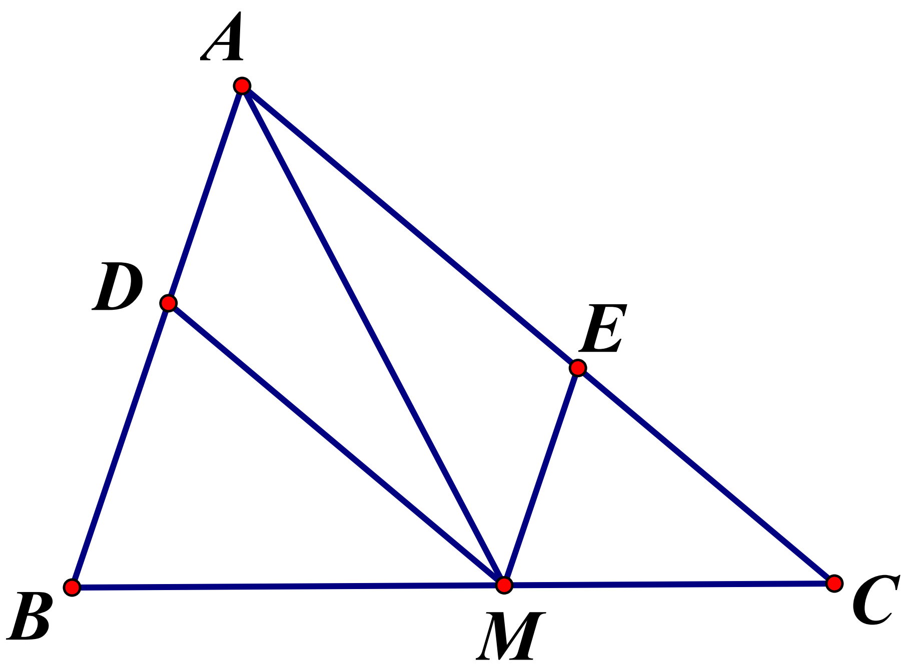
Ta có: $x^3+y^3+z^3=210 \Leftrightarrow x^3+y^3-(x+y)^3=210 \Leftrightarrow -3xy(x+y)=210$

Do x,y,z la số nguyên có tổng bằng 0 và $xyz=70=(-2).(-5).7$ nên

$\{x;y;z\}\in\{-2;-5;7\}$

$\Rightarrow A=|a-b|+|b-c|+|c-a|=14$

Câu 4.



a) Ta có $ME//AB, MD//AC(gt)$ nên tứ giác $ADME$ là hình bình hành

Để hình bình hành $ADME$ là hình thoi thì đường chéo AM là phân giác của $\widehat{DAE}$

$\Rightarrow M$ là chân đường phân giác của $\widehat{BAC}$

b) Xét ΔBDM và ΔMEC có $\widehat{DBM} = \widehat{EMC}, \widehat{DMB} = \widehat{ECM}$ (vì đồng vị)

$\Rightarrow \Delta BDM \sim \Delta MEC(g.g) \Rightarrow \dfrac{BD}{ME} = \dfrac{DM}{EC} \Rightarrow BD.EC = DM.ME$

c) Từ $\Delta BDM \sim \Delta MEC(cmt)$

$$\Rightarrow \frac{S_{BDM}}{S_{MEC}} = \left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MB+MC} = \frac{3}{4+3} \Rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{3}{7}$$

Mặt khác do $MD//AC \Rightarrow \Delta BDM \sim \Delta BAC \Rightarrow \dfrac{S_{BDM}}{S_{BAC}} = \left(\dfrac{MB}{BC}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{7}\right)^2$

$\Rightarrow S_{BAC} = \dfrac{49}{9}.9 = 49\left(cm^2\right)$

d) Theo chứng minh trên $ADME$ là hình bình hành $\Rightarrow DM = AE$

$ME//AB \Rightarrow \dfrac{ME}{AB} = \dfrac{CM}{CB} \Rightarrow ME.CB = AB.CM \qquad (1)$

$MD//AC \Rightarrow \dfrac{MD}{AC} = \dfrac{BM}{BC} \Rightarrow MD.BC = AC.BM \qquad (2)$

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$BC(ME + MD) = CM.AB + AC.BM$

$\Rightarrow BC.(ME + AE) = CM.AB + AC.BM$

Lại có $\Rightarrow AM < ME + AE \Rightarrow BC.AM < BC.(ME + AE) = CM.AB + AC.BM$

Câu 5.

Đặt $x^2 = a, 0 \le a \le 1.$ Biểu thức đã cho trở thành:

$$P = \frac{a}{2-a} + \frac{1-a}{1+a} = \frac{a}{2-a} + 1 + \frac{1-a}{1+a} + 1 - 2 = \frac{2}{2-a} + \frac{2}{1+a} - 2$$

$$= 2\left(\frac{3}{(2-a)(1+a)} - 1\right) = 2\left[\frac{3}{2+a(1-a)} - 1\right]$$

*) Vì $0 \le a \le 1.$ $\Rightarrow P \le 2\left(\dfrac{3}{2} - 1\right) = 1$

Đẳng thức xảy ra khi $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Vậy $MinP = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

$0 \le a \le 1$ nên a và $1 - a$ là hai số không âm

Áp dụng BĐT Cô si ta có: $a(1-a) \le \dfrac{(a+1-a)}{4} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow P \le 2\left(\dfrac{3}{2+\frac{1}{4}} - 1\right) = \dfrac{2}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 1 - a \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$ hay $x^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

Vậy $MaxP = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}}$