

MẪU TRÌNH BÀY

Người làm:

Zalo: Hào Hào

- số dt zalo: 0933629788

Email:

CD13: HÌNH HỌC

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau.

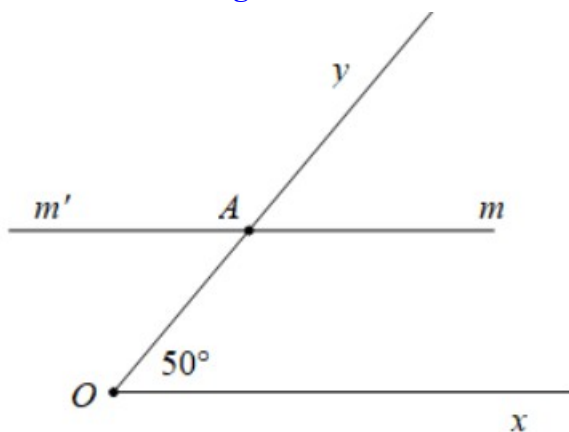
A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh, trường Đào Duy Từ năm 2018 - 2019) Đ174

Cho góc $\angle xOy = 50^\circ$, điểm A nằm trên Oy . Qua A vẽ tia Am . Để Am song song với Ox thì số đo của góc $\angle Am$ là:

- A. 50° B. 130° C. 50° và 130° D. 80°

Lời giải



Để Am song song với Ox thì tia Am có hai vị trí là tia Am và tia Am' như trên hình vẽ.

Trường hợp 1: Vì $Am \parallel Ox$ nên $\angle Am = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

Trường hợp 2: Vì $Am' \parallel Ox$ nên $\angle Am' = \angle Ox = 50^\circ$

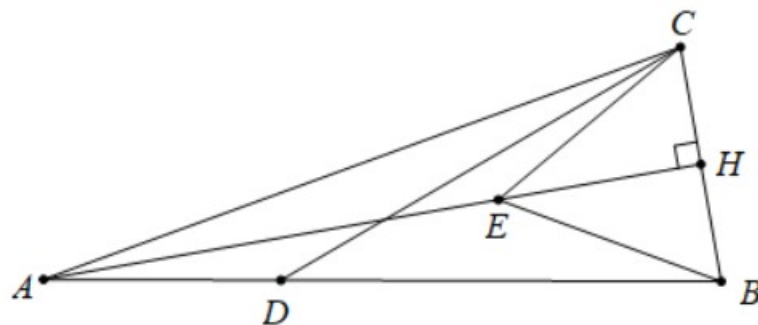
Vậy chọn C

Câu 2. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh, trường Đào Duy Từ năm 2018 - 2019) Đ174

Cho tam giác ABC cân tại A , $\angle A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Số đo của góc BDC là:

- A. 50° B. 70° C. 30° D. 80°

Lời giải



Kẻ đường cao AH của tam giác ABC . Lấy điểm E thuộc AH sao cho $\angle ECB = 60^\circ$

Khi đó tam giác ECB là tam giác đều.

$$\Rightarrow \angle EHC = 30^\circ$$

Mặt khác, $\triangle ADC = \triangle CEA$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle ADC = \angle AEC$

$$\Rightarrow \angle BDC = \angle HEC = 30^\circ$$

B. Tự luận

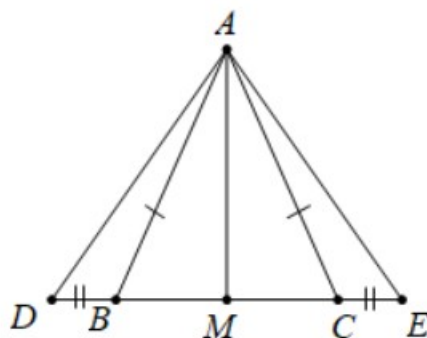
Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Mỹ, tỉnh, trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019) 168

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC , CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

a) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của $\angle DAE$.

Lời giải



$$\triangle ABC \text{ cân nên } \angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$$

a) cân nên

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\angle ABD = \angle ACE \text{ (cmt)}$$

$$DB = CE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE \text{ cân tại } A$$

b) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:

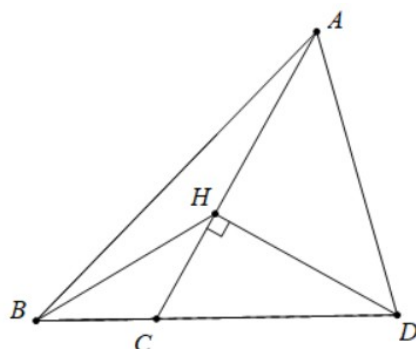
$$MD = ME \text{ (DB = CE, MB = MC);}$$

AM chung;
 $AD = AE$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle AMD = \triangle AME$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \angle MAD = \angle MAE$
 Vậy AM là tia phân giác của $\angle DAE$

Câu 2. (HSG 7 huyện Lục Nam năm 2018 - 2019) 177

Cho tam giác ABC có $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính $\angle ADB$

Lời giải



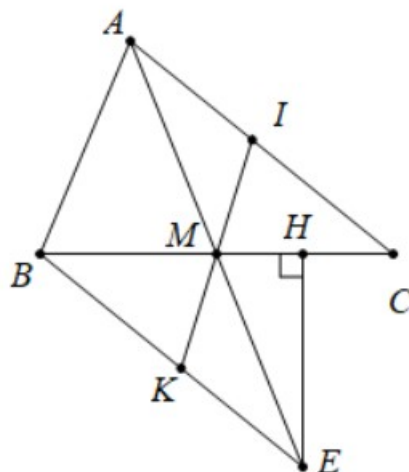
Kẻ $DH \perp AC$ vì $\angle ACD = 60^\circ \Rightarrow \angle CDH = 30^\circ$ nên $CH = \frac{CD}{2} \Rightarrow CH = BC$
 Tam giác BCH cân tại $C \Rightarrow \angle CBH = 30^\circ \Rightarrow \angle ABH = 15^\circ$
 Mà $\angle BAH = 15^\circ$ nên tam giác AHB cân tại H
 Do đó $\triangle AHD$ vuông cân tại H . Vậy $\angle ADB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023) Chưa biết 180

Cho tam giác ABC , M là trung điểm BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:
 $AC = EB$, $AC \parallel BE$

- a) I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$.
 b) Gọi I, M, K thẳng hàng
 rằng $EH \perp BC (H \in BC)$ $\angle HBE = 50^\circ$, $\angle MEB = 25^\circ$. $\angle HEM$ và $\angle BME$
 c) Từ E kẻ $EH \perp BC (H \in BC)$. Biết $\angle HBE = 50^\circ$, $\angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$.

Lời giải



- a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có: $AM = EM(gt)$; $\angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh); $BM = MC(gt)$
 $\triangle AMC = \triangle EMB(c.g.c) \Rightarrow AC = EB$

Do đó

- b) Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong
 Suy ra $AC \parallel BE$

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM(gt)$; $\angle MAI = \angle MEK(\triangle AMC = \triangle EMB)$

Nên $\angle AMI = \angle EMK$ mà $\angle AMI + \angle EME = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \angle EMK + \angle EME = 180^\circ \Rightarrow I, M, K$ thẳng hàng

$$\triangle BHE (\angle H = 90^\circ) \quad \angle HBE = 50^\circ$$

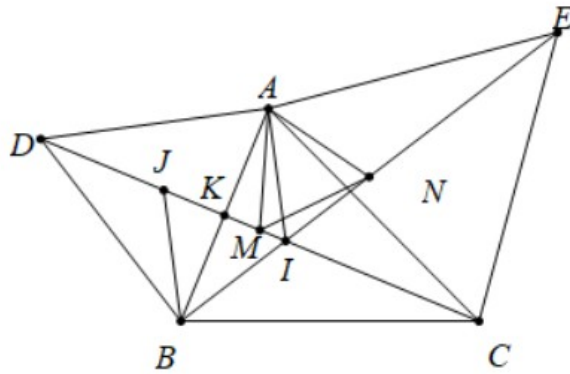
- c) Trong $\triangle BHE$ có
 $\Rightarrow \angle HBE = 90^\circ - \angle HEB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$
 $\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$
 $\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$
 Nên $\angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ (định lý góc ngoài của tam giác)

Câu 4. (HSG 7 huyện Sơn Trà năm học 2018-2019) 176

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài $\triangle ABC$ các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của CD và BE , K là giao của AB và CD .

- a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$
 b) Chứng minh rằng: $\angle DIB = 60^\circ$
 c) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.
 d) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE .

Lời giải

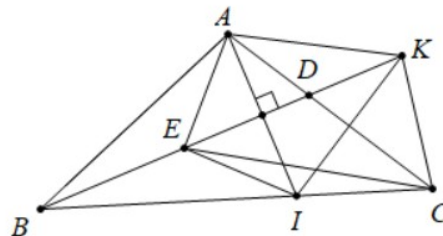


- $AD = AB; \angle BAC = \angle BAE$ và $AE = AC$ suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c.g.c)
- a) Ta có : và suy ra
- $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$ mà $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh)
- b) Từ (câu a) suy ra $\angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (đpcm)
- Khi đó xét $\triangle BIK$ và $\triangle DAK$ suy ra $\angle BIK = \angle DAK = 60^\circ$ (đpcm)
- $\triangle ADC = \triangle ABE \Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$
- c) Từ (câu a) suy ra $\triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$
- $\angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$. Do đó $\triangle AMN$ đều
- $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều $\Rightarrow BJ = BI$
- d) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB$ suy ra $\angle IBA = \angle JBD$, kết hợp $BA = BD$
- $\Rightarrow \triangle IBA = \triangle JBD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AIB = \angle JDB = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ \Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$
- Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE

Câu 5. (HSG 7 huyện Thường Tín năm học 2018 - 2019) 167

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle A = 100^\circ$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC tại D , qua A kẻ đường vuông góc với BD cắt BC ở I . Trên tia đối của tia DB lấy K sao cho $DK = DA$. Chứng minh rằng: tam giác AIK đều

Lời giải



- Xét $\triangle BAI$ có BD vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle BAI$ cân tại đỉnh B .
- $\Rightarrow BD$ là trung trực của $AI \Rightarrow KA = KI$ (1)
- Từ giả thiết $\triangle ABC$ cân đỉnh A , có $\angle A = 100^\circ$
- $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$
- $\triangle BAI$ cân đỉnh B mà $\angle ABI = 40^\circ$

$$\Rightarrow \angle BAI = \angle BIA = 70^\circ$$

Từ đó suy ra $\angle IAC = 30^\circ$ (2) và $\angle AIC = 110^\circ$

Xét $\triangle BAD$ có

$$\angle BAD = 100^\circ, \angle ABD = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ADB = 60^\circ$$

Lại có $\triangle DAK$ cân đỉnh D

$$\Rightarrow \angle DAK = \angle DKA$$

$$\Rightarrow \angle ADB = 2\angle DAK \text{ (tính chất góc ngoài)}$$

$$\Rightarrow \angle DAK = 30^\circ \text{ (3)}$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\angle IAK = 60^\circ$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $\triangle AIK$ đều.

Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau.

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh, trường Đào Duy Từ năm 2018 - 2019) Đ174

Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 6$, $\angle A = 30^\circ$. Phân giác góc C cắt AB tại D . Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

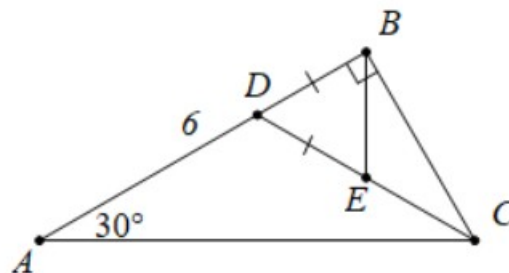
A. 2; 4

B. 3; 3

C. 4; 2

D. 1; 5

Lời giải



Vì CD là phân giác của góc C nên $\angle BCD = \frac{\angle ACB}{2} = 30^\circ$.

Suy ra $\angle BDC = 60^\circ$.

Trên đoạn thẳng DC lấy điểm E sao cho $DB = DE$. Khi đó tam giác DBE là tam giác đều.

Do đó $\angle ECB = 30^\circ$.

Suy ra $\triangle EBC$ cân tại E .

$$\Rightarrow EB = EC = ED$$

Mà tam giác ADC cân tại D .

$$\Rightarrow AD = DC$$

Ta có $AD = DC = 2DB$ và $AD + DB = AB$ nên : $AD = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$
 $\Rightarrow BD = AB - AD = 6 - 4 = 2$

Vậy chọn đáp án A.

B. Tự luận

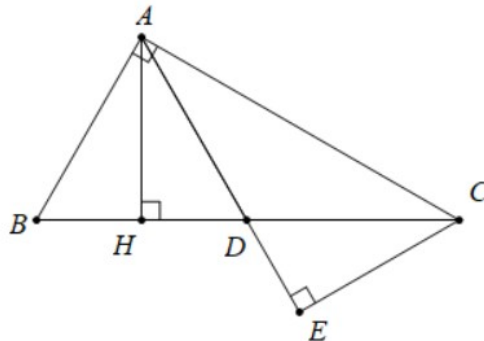
Câu 1. (HSG 7 huyện Chương Mỹ năm học 2018 - 2019) 166

Cho tam giác ABC vuông tại A , $\angle C = \frac{1}{2}\angle B$, kẻ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng AD .

a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng $AD = CD$; $DE = DH$.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle ABC$ vuông tại A , suy ra $\angle B + \angle C = 90^\circ$

Mà $\angle C = \frac{1}{2}\angle B$ nên $\angle C = 30^\circ$; $\angle B = 60^\circ$

Chứng minh $\triangle AHB = \triangle AHD$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AD$ nên $\triangle ABD$ cân tại A ,

Mà $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều.

b) Chứng minh $\triangle AHD = \triangle CED$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $DH = DE$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thường Tín năm học 2018 – 2019) 167

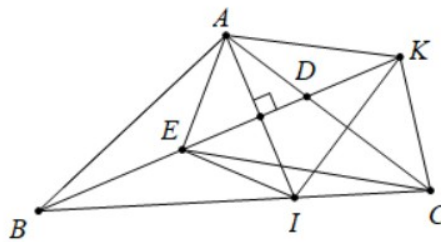
Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle A = 100^\circ$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC tại D , qua A kẻ đường vuông góc với BD cắt BC ở I .

a) Chứng minh rằng: BD là trung trực của AI

b) Trên tia đối của tia DB lấy K sao cho $DK = DA$. Chứng minh rằng: tam giác AIK đều

c) Chứng minh : $BK = BC$

Lời giải



a) Xét $\triangle BAI$ có BD vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle BAI$ cân tại đỉnh B
 $\Rightarrow BD$ là trung trực của AI

b) Từ chứng minh trên $\Rightarrow KA = KI(1)$

Từ giả thiết ΔABC cân đỉnh A ($\hat{A} = 100^\circ$)

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$$

$\triangle BAI$ cân đỉnh B mà $\angle ABI = 40^\circ$

$$\Rightarrow \angle BAI = \angle BIA = 70^\circ$$

Từ đó suy ra $\angle AC = 30^\circ$ (2) và $\angle AIC = 110^\circ$

Xét $\triangle BAD$ có

$\angle BAD = 100^\circ, \angle ABD = 20^\circ$

$$\Rightarrow \angle ADB = 60^\circ$$

Lại có ΔDAK cân đỉnh D

$$\Rightarrow D_{AK} = D_{KA}$$

$$\Rightarrow \angle ADB = 2\angle BAK \text{ (tính chất góc ngoài)}$$

$$\Rightarrow \angle DAK = 30^\circ \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\angle AK = 60^\circ$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra ΔAIK đều.

c) Ta có: $\Delta IAC = \Delta KAC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle AKC = \angle AIC = 110^\circ \text{ . mà } \angle AKI = 60^\circ \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \angle K C = 50^\circ \quad \text{Mà} \quad \angle D K I = \angle D K A = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BKC = 80^\circ$$

Xét $\triangle BKC$ có $\angle BKC = 80^\circ$; $\angle KBC = 20^\circ$

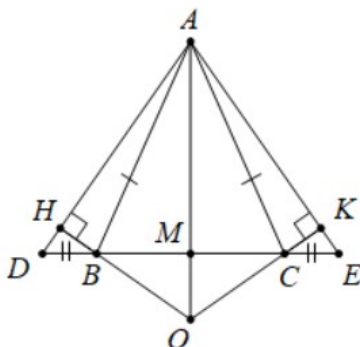
$$\Rightarrow \angle KCB = 80^\circ \Rightarrow \triangle BKC \text{ cân tại đỉnh } B \Rightarrow BK = BC.$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Mỹ, tỉnh, trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019) 168

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC , CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

- a) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.
- b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của $\angle DAE$.
- c) Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$.

Lời giải



- a) $\triangle ABC$ cân nên $\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$
 Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:
 $AB = AC$ (gt)
 $\angle ABD = \angle ACE$ (cmt)
 $DB = CE$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A
- b) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:
 $MD = ME$ ($DB = CE, MB = MC$);
 AM chung;
 $AD = AE$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle AMD = \triangle AME$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \angle MAD = \angle MAE$
 Vậy AM là tia phân giác của $\angle DAE$
- c) Vì $\triangle ADE$ cân tại A (cm câu a) nên $\angle ADE = \angle AED$
 Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có:
 $\angle BDH = \angle CEK$ (do $\angle ADE = \angle AED$)
 $DB = CE$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE$ (ch-gn)
 $\Rightarrow BH = CK$

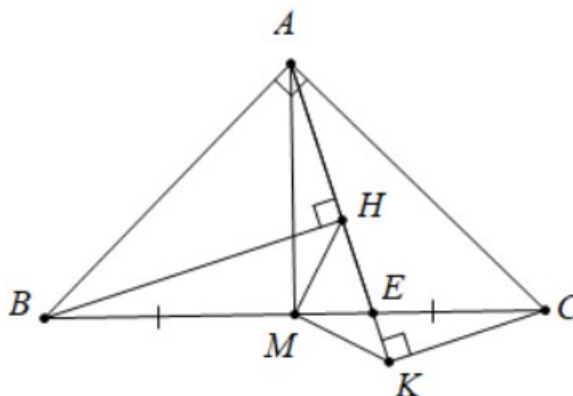
Câu 4. (HSG 7 trường Cù Chính Lan năm học 2018 - 2019) 170

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có trung tuyến AM . E là điểm thuộc cạnh BC . Kẻ BH, CH vuông góc với AE (H, K thuộc AE)

- a) Chứng minh $BH = AK$

- b) Cho biết $\triangle MHK$ là tam giác gì ? Vì sao ?

Lời giải

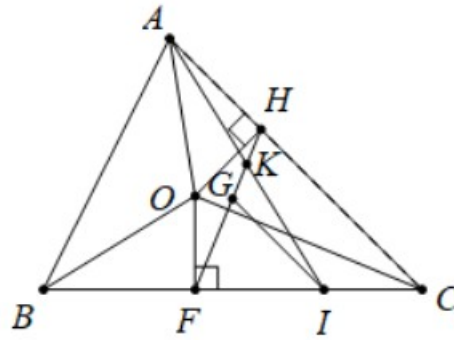


- a) Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAK$ có:
 $\angle AHB = \angle EKA = 90^\circ$; $AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A), $\angle ABH = \angle CAE$ (cùng phụ với $\angle BAH$)
 $\Rightarrow \triangle ABH = \triangle CAK$ (ch-gn) $\Rightarrow BH = AK$
 $MA = MB = MC$
- b) Ta có: (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)
 $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow AM$ vừa là trung tuyến vừa là đường cao
 $\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow \triangle AMB$ và $\triangle AMC$ vuông cân tại $M \Rightarrow \angle BAM = \angle ACM = 45^\circ$
 Ta có: $\triangle ABH = \triangle CAK$ (câu a)
 $\Rightarrow \angle BAH = \angle ACK$ (hai góc tương ứng)
 Mà:
 $\left. \begin{array}{l} \angle BAH = \angle BAM + \angle MAH \\ \angle ACK = \angle ACM + \angle MCK \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle BAH = 45^\circ + \angle MAH \\ \angle ACK = 45^\circ + \angle MCK \end{array} \right\} \Rightarrow \angle MAH = \angle MCK$
 Xét $\triangle AMH$ và $\triangle CMK$ có:
 $\angle AMH = \angle CMK$ (cùng phụ với $\angle HMC$)
 $MA = MC$ (cmt), $\angle MAH = \angle MCK$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle AMH = \triangle CMK$ (g.c.g)
 $\Rightarrow MH = MK \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại M .
 Ta có $\angle AMH + \angle HMC = 90^\circ$; $\angle AMH = \angle CMK$
 $\Rightarrow \angle CMK + \angle HMC = \angle HMK = 90^\circ$
 $\Rightarrow \triangle HMK$ vuông cân tại M .

Câu 5. (HSG 7 trường THCS NHƠN TRÍ năm học 2018 - 2019) 171

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI . Chứng minh tam giác FCH cân và $AK = KI$

Lời giải



Chứng minh $\triangle CHO = \triangle CFO$ (ch-gn)

Suy ra $CH = CF \Rightarrow \triangle FCH$ cân tại C .

Vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$), chứng minh $\triangle FIG$ cân tại I

$$AH = IG \quad \angle IGK = \angle AHK$$

Suy ra và

$$\triangle AHK = \triangle IGK$$

Chứng minh (g.c.g)

$$AK = KI$$

Suy ra

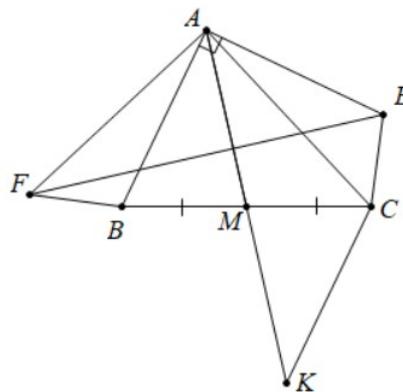
Câu 6. (HSG 7 huyện Rạch Giá năm học 2018 - 2019) 172

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $FB = EC$

b) $EF = 2AM$

Lời giải



$$\triangle ABF = \triangle AEC \Rightarrow FB = EC$$

a) Ta có

$$MA \quad K \quad AK = 2AM.$$

b) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho

Ta có: $\triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow CK \parallel AB$

$$\Rightarrow \angle ACK + \angle CAB = \angle EAF + \angle CAB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACK = \angle EAF$$

$\triangle EAF$ và $\triangle KCA$ có $AE = AB = CK$;

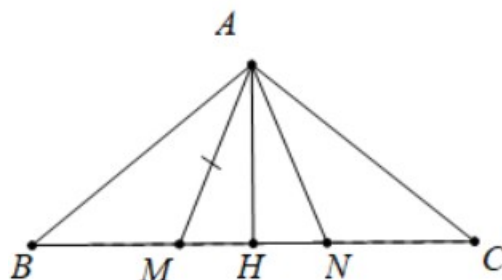
$AF = AC$ (gt)

$$\begin{aligned}\angle ACK &= \angle EAF \\ \Rightarrow \triangle EAF &= \triangle KCA \\ \Rightarrow EF &= AK = 2AM\end{aligned}$$

Câu 7. (HSG 7 trường Đáp Cầu năm học 2018 - 2019) 175

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC . Chứng minh $AM = AN$ và $AH \perp BC$.

Lời giải

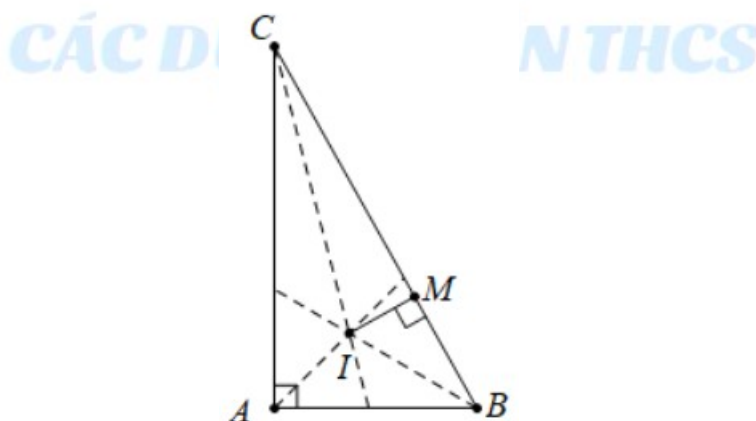


Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACN \Rightarrow AM = AN$ (c.g.c)
 Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$

Câu 8. (HSG 7 huyện Sơn Trà năm học 2018 - 2019) 176

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$. Điểm I nằm trong tam giác và cách đều 3 cạnh tam giác ABC . Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ I đến BC . Tính MB

Lời giải



Vì I nằm trong tam giác ABC và cách đều 3 cạnh tam giác nên I là giao điểm 3 đường phân giác trong của tam giác ABC

Tam giác ABC vuông tại A nên tính $BC = 5\text{ cm}$

Chứng minh được $\triangle CEI = \triangle CMI \Rightarrow CM = CE$

Chứng minh tương tự ta có: $AE = AD$; $BD = BM$

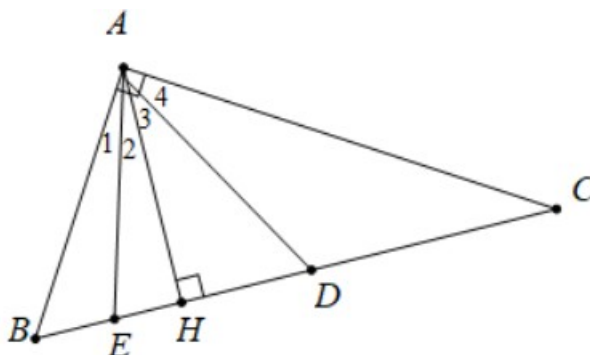
$$MB = \frac{BC + AB - AC}{2} = 2$$

Suy ra

Câu 9. (HSG 7 huyện Lục Nam năm 2018 - 2019) 177

Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$. Tia phân giác của $\angle HAC$ cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của $\angle HAB$ cắt cạnh BC ở điểm E . Chứng minh rằng $AB + AC = BC + DE$

Lời giải



$$\angle AEC = \angle ABC + \angle 1 = \angle 3 + \angle 4 + \angle 1 = \angle 3 + \angle 4 + \angle 2$$

Vì $\angle B$ và $\angle AHC$ cùng phụ $\angle BAH$ suy ra $\triangle AEC$ cân tại C , do đó $AC = CE$

Tương tự $AB = BD \Rightarrow AB + AC = BC + DE$

Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

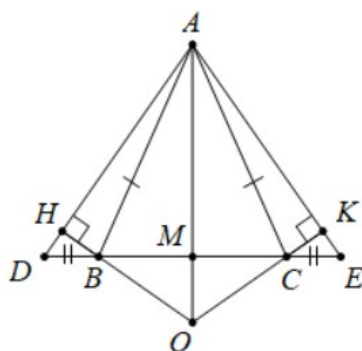
B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Mỹ, tỉnh, trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019) 168

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC , CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

- d) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.
- e) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của $\angle DAE$.
- f) Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$.
- g) Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm.

Lời giải



- d) $\triangle ABC$ cân nên $\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$
- Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:
- $AB = AC$ (gt)

$$\begin{aligned} \angle ABD &= \angle ACE \text{ (cmt)} \\ DB &= CE \text{ (gt)} \\ \Rightarrow \triangle ABD &= \triangle ACE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE \text{ cân tại } A \end{aligned}$$

e) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:

$$\begin{aligned} MD &= ME \text{ (} DB = CE, MB = MC \text{);} \\ AM &\text{ chung;} \\ AD &= AE \text{ (cmt)} \\ \Rightarrow \triangle AMD &= \triangle AME \text{ (c.c.c)} \\ \Rightarrow \angle MAD &= \angle MAE \end{aligned}$$

Vậy AM là tia phân giác của $\angle DAE$

f) Vì $\triangle ADE$ cân tại A (cm câu a) nên $\angle ADE = \angle AED$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có:

$$\begin{aligned} \angle BDH &= \angle CEK \text{ (do } \angle ADE = \angle AED \text{)} \\ DB &= CE \text{ (gt)} \\ \Rightarrow \triangle BHD &= \triangle CKE \text{ (ch-gn)} \\ \Rightarrow BH &= CK \end{aligned}$$

g) Vì $\triangle BHD = \triangle CKE$ (cmt) nên $HD = KE$

Gọi giao điểm của BH và CK là O .

Xét $\triangle AHO$ và $\triangle AKO$ có:

$$\begin{aligned} OA &\text{ cạnh chung;} \\ AH &= AK \text{ (do } AD = AE, DH = KE \text{)} \\ \Rightarrow \triangle AHO &= \triangle AKO \text{ (ch-cgv)} \end{aligned}$$

Do đó $\angle OAH = \angle OAK$ nên AO là tia phân giác của $\angle HAK$

Hay AO là tia phân giác của $\angle DAE$, mặt khác theo câu b) AM là tia phân giác của $\angle DAE$

Do đó $AO \equiv AM$, suy ra ba đường thẳng AM, BH, CK cắt nhau tại O .

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Nhơn Trí năm học 2018 - 2019) 171

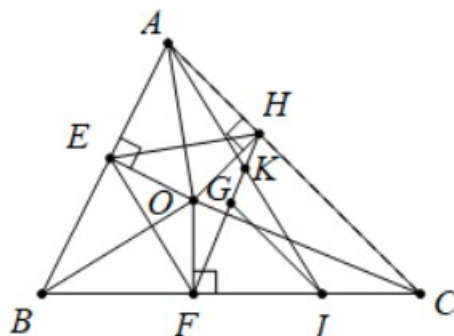
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI . Chứng minh tam giác FCH cân và $AK = AI$

a) Chứng minh tam giác FCH cân và $AK = KI$

b) Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle CHO = \triangle CFO$ (ch-gn)

Suy ra $CH = CF \Rightarrow \triangle FCH$ cân tại C .

Vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$), chứng minh $\triangle FIG$ cân tại I

$$AH = IG \quad \square \quad IGK = \square \quad AHK$$

Suy ra và

$$\triangle AHK = \triangle IGK$$

Chứng minh (g.c.g)

$$AK = KI$$

Suy ra

$$OE \perp AB \quad E \quad \triangle AEH, \triangle BEF \quad A, B$$

b) Vẽ tại . tương tự câu a ta có thứ tự cân tại

Suy ra : $BE = BF$ và $AE = AH$

$$BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI$$

$\Rightarrow \triangle ABI$ cân tại B

Mà BO là phân giác $\angle B$, và BK là đường trung tuyến của $\triangle ABI$ nên B, O, K là ba điểm thẳng hàng

Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023) chưa biết 180

Cho tam giác ABC, M là trung điểm BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

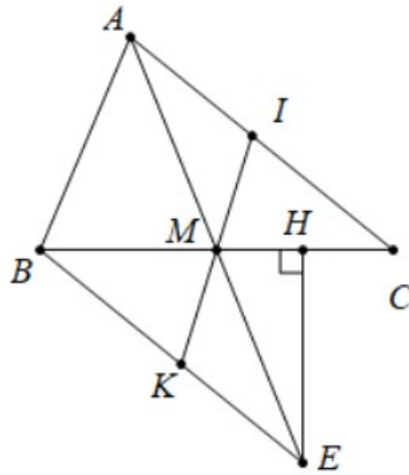
$$AC = EB, AC \parallel BE$$

d)

e) Gọi I là một điểm trên AC, K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh

rằng I, M, K thẳng hàng

Lời giải



d) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có: $AM = EM(gt)$; $\angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh); $BM = MC(gt)$
 $\triangle AMC = \triangle EMB(c.g.c) \Rightarrow AC = EB$

Do đó

e) Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong
 Suy ra $AC \parallel BE$

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM(gt)$; $\angle MAI = \angle MEK(\triangle AMC = \triangle EMB)$

Nên $\angle AMI = \angle EMK$ mà $\angle AMI + \angle EME = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \angle EMK + \angle EME = 180^\circ \Rightarrow I, M, K$ thẳng hàng

Dạng 4. Bất đẳng thức trong tam giác.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Chương Mỹ năm học 2018 – 2019) 166

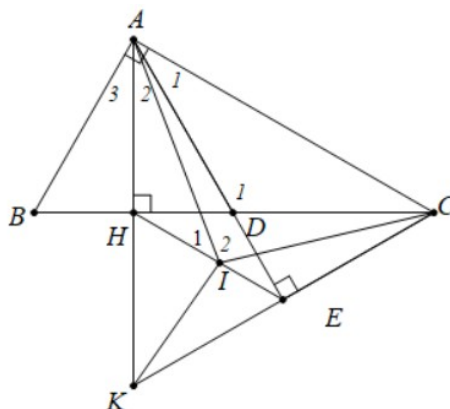
Cho tam giác ABC vuông tại A , $\angle C = \frac{1}{2} \angle B$, kẻ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng HD .

a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

b) Gọi K là giao điểm của AH và CE , lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn thẳng HE

($I \neq H, I \neq E$). Chứng minh rằng $\frac{3AC}{2} < IA + IK + IC$

Lời giải



a) Ta có: $\triangle ABC$ vuông tại A , suy ra $\angle B + \angle C = 90^\circ$

Mà $\angle C = \frac{1}{2}\angle B$ nên $\angle C = 30^\circ$; $\angle B = 60^\circ$

Chứng minh $\triangle AHB = \triangle AHD$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = AD$ nên $\triangle ABD$ cân tại A ,

Mà $\angle B = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều.

b) Chứng minh $\triangle AHD = \triangle CED$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $DH = DE$

Ta có: $\triangle ABD$ là tam giác đều (cmt);

suy ra $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = AD = BD$

Suy ra $\angle A_1 = \angle BAC - \angle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Ta có $\triangle AEC = \triangle AEC$ (g.c.g) $\Rightarrow AC = AK$

$\Rightarrow \triangle ACK$ cân tại A

Ta có: $\angle EAK = \angle A_1 + \angle A_2 = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle ACK$ là tam giác đều

Suy ra: $AC = CK = AK \Rightarrow 3AC = AC + CK + AK$ (3)

Áp dụng BĐT tam giác vào các tam giác AIC, CIK, KIA có:

$AC < IA + IC$;

$CK < IC + IK$;

$AK < IA + IK$

Do đó $AC + CK + AK < 2(IA + IC + IK)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $3AC < 2(IA + IC + IK)$

$\Rightarrow \frac{3AC}{2} < IA + IC + IK$

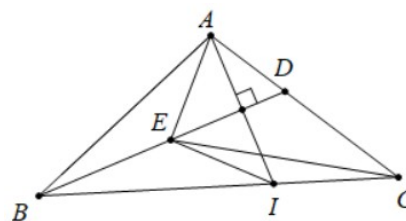
Câu 2. (HSG 7 huyện Thường Tín năm học 2018 - 2019) 167

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle A = 100^\circ$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC tại D , qua A kẻ đường vuông góc với BD cắt BC ở I .

a) Chứng minh rằng: BD là trung trực của AI

b) Lấy $E \in BD$. Chứng minh rằng: $BC + EA > AB + EC$

Lời giải



a) Xét $\triangle BAI$ có BD vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle BAI$ cân tại đỉnh B
 $\Rightarrow BD$ là trung trực của AI

b) Ta có: BD là trung trực của $AI \Rightarrow EA = EI$

$$BC - AB = BC - BI = IC \quad (1)$$

Từ đó $EC - EA = EC - EI < IC$ (BĐT trong tam giác) (2)

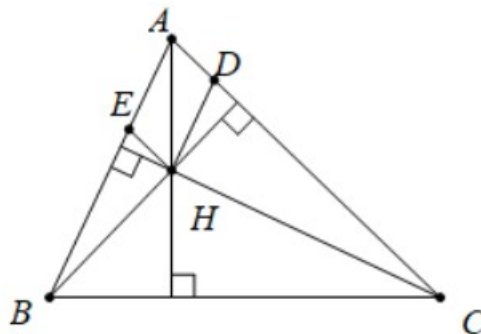
Từ (1) và (2) suy ra $EC - EA < BC - AB$ hay $BC + EA > AB + EC$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường THCS Đào Duy Từ năm học 2018 - 2019) 174

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh rằng:

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Lời giải



Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại $D \Rightarrow CH \perp HD$

Qua H kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB tại $E \Rightarrow BH \perp HE$

Ta có $\triangle AHD = \triangle HAE$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AD = HE, AE = HD.$$

Trong $\triangle AHD$ có $HA < HD + AD$ nên $HA < AE + AD$ (1)

Từ $BH \perp HE \Rightarrow \triangle HBE$ vuông cân nên $HB < BE$ (2)

Tương tự, ta có: $HC < DC$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $HA + HB + HC < AB + AC$ (4)

Tương tự: $HA + HB + HC < AB + BC$ (5) và $HA + HB + HC < AB + BC$ (6)

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Từ (4), (5) và (6) suy ra

Câu 4. (HSG 7 huyện Trực Ninh năm học 2018 – 2019) 178

Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle A$ tù. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Trên tia đối của CA lấy điểm I sao cho $CI = CA$.

Câu 1. Chứng minh

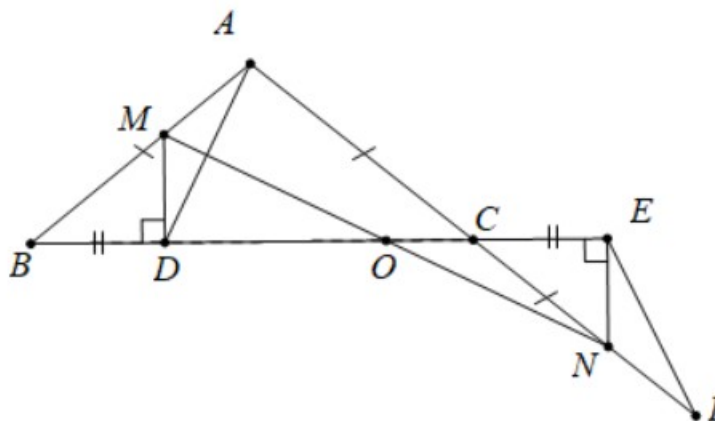
a) $\triangle ABD = \triangle ICE$

b) $AB + AC < AD + AE$

Câu 2. Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB, AI theo thứ tự tại M, N . Chứng minh $BM = CN$.

Câu 3. Chứng minh rằng chu vi tam giác ABC nhỏ hơn chu vi tam giác AMN

Lời giải



Câu 1.

$$\triangle ABD = \triangle ICE (c.g.c)$$

a) Chứng minh

$$AB + AC = AI, \quad \triangle ABD = \triangle ICE \Rightarrow AD = EI$$

b) Có vì (2 cạnh tương ứng)

Áp dụng bất đẳng thức trong $\triangle AEI$ có: $AE + EI > AI$ hay $AE + AD > AB + AC$

Câu 2. Chứng minh $\triangle BDM = \triangle CEN$ (g.c.g)

$$\Rightarrow BM = CN$$

Câu 3. Vì $BM = CN \Rightarrow AB + AC = AM + AN$ (1)

$$\text{Có } BM = CE \Rightarrow BC = DE$$

Gọi giao điểm của MN với BC là O ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MO > OD \\ NO > OE \end{array} \right\} \Rightarrow MO + NO > OD + OE \Rightarrow MN > DE \Rightarrow MN > BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra chu vi $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle AMN$

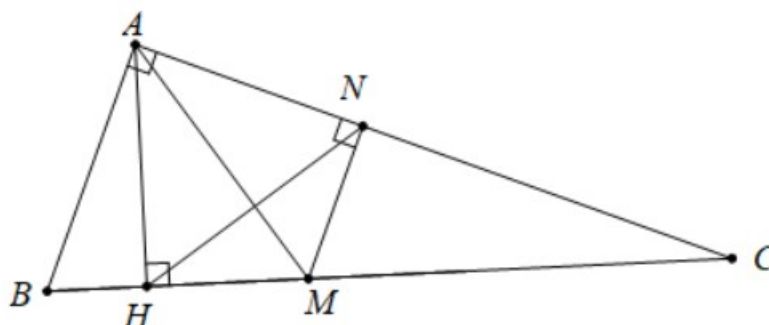
Câu 5. (HSG 7 huyện Cát Tiên năm học 2018 – 2019) 169

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = BA$. Từ M kẻ MN vuông góc với AC ($N \in AC$). Chứng minh rằng:

a) Tam giác ANH cân
 $BC + AH > AB + AC$

b)

Lời giải



a) $\triangle ABM$ cân tại B nên $\angle BAM = \angle BMA$

mà $\angle BAM + \angle MAN = 90^\circ$; $\angle BMA + \angle HAM = 90^\circ \Rightarrow \angle HAM = \angle MAN$
 $\Rightarrow \triangle HAM = \triangle NAM$ (ch-gn).
 $\Rightarrow AH = AN \Rightarrow \triangle ANH$ cân.
 $BC - AB = BC - AM = MC$ $AC - AH = AC - AN = NC$
 b) Ta có: ;
 Tam giác MNC vuông tại N nên $MC > NC$. Suy ra :
 $BC - AB > AC - AH$
 $\Rightarrow BC + AH > AB + AC$

Dạng 5. Chứng minh song song, vuông góc.

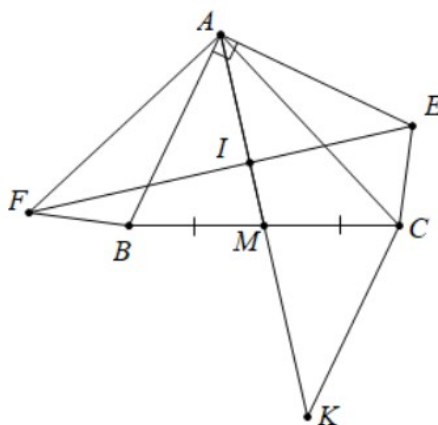
B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Rạch Giá năm học 2018 – 2019) 172

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

- $FB = EC$
- $EF = 2AM$
- $AM \perp EF$

Lời giải



$$\triangle ABF = \triangle AEC \Rightarrow FB = EC$$

a) Ta có

b) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho $AK = 2AM$.

Ta có: $\triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow CK \parallel AB$

$$\Rightarrow \angle ACK + \angle CAB = \angle EAF + \angle CAB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ACK = \angle EAF$$

$\triangle EAF$ và $\triangle KCA$ có $AE = AB = CK$;

$AF = AC$ (gt)

$$\angle ACK = \angle EAF$$

$$\Rightarrow \triangle EAF = \triangle KCA$$

$$\Rightarrow EF = AK = 2AM$$

$$\triangle EAF = \triangle KCA$$

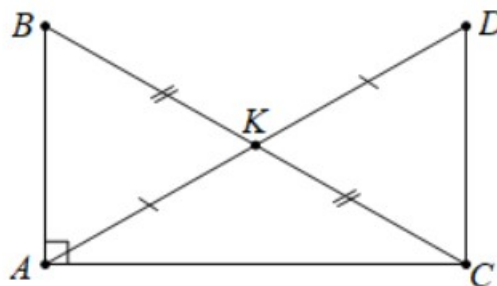
c) Từ

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{AFE} \\ &\Rightarrow \widehat{AFE} + \widehat{FAK} = \widehat{EAK} + \widehat{FAK} = 90^\circ \\ &\Rightarrow AK \perp EF \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Tây năm học 2018 – 2019) 173

Cho tam giác ABC vuông tại A ; K là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia KA lấy D , sao cho $KD = KA$. Chứng minh: $CD \parallel AB$

Lời giải



Xét 2 tam giác $\triangle ABK$ và $\triangle DCK$ có:

$$BK = CK$$

$$\widehat{BKA} = \widehat{CKD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$AK = DK \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABK = \triangle DCK \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{ABK}$$

$$\text{Mà } \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ = \widehat{BAC}$$

$$\Rightarrow AB \parallel CD \text{ (do } AB \perp AC, CD \perp AC)$$

Dạng 6. Hình khối trong thực tiễn (không có)

Dạng 7. Bài toán chứng minh tổng hợp

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện HOÀI NHƠN, tỉnh, trường ĐÀO DUY TỬ năm 2018-2019) Đ174

Cho tam giác DEF có $\widehat{E} = \widehat{F}$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I . Ta có:

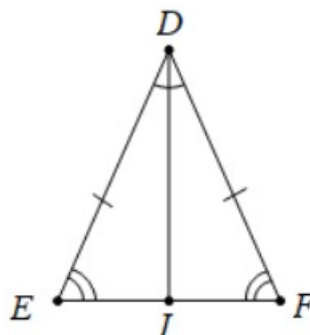
A. $\triangle DIE = \triangle DIF$

B. $DE = DF, \widehat{HDE} = \widehat{HDF}$

C. $IE = IF$

D. Cả A, B, C đều đúng

Lời giải



Ta chứng minh được $\triangle DIE = \triangle DIF$ (g.c.g) Từ đó suy ra $IE = IF$. Do đó chọn **D**

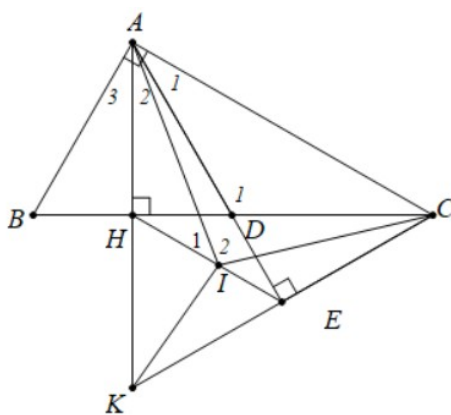
B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Chương Mỹ năm học 2018 - 2019) 166

Cho tam giác ABC vuông tại A , $\angle C = \frac{1}{2} \angle B$, kẻ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng HD .

- Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?
- Chứng minh rằng $AD = CD$; $DE = DH$; $HE \parallel AC$
- Gọi K là giao điểm của AH và CE , lấy điểm I bất kỳ thuộc đoạn thẳng HE ($I \neq H, I \neq E$). Chứng minh rằng $\frac{3AC}{2} < IA + IK + IC$

Lời giải



- Ta có: $\triangle ABC$ vuông tại A , suy ra $\angle B + \angle C = 90^\circ$
 $\angle C = \frac{1}{2} \angle B$ nên $\angle C = 30^\circ$; $\angle B = 60^\circ$
 Chứng minh $\triangle AHB = \triangle AHD$ (c.g.c)
 $\Rightarrow AB = AD$ nên $\triangle ABD$ cân tại A ,
 Mà $\angle B = 60^\circ$
 $\Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều.
- Chứng minh $\triangle AHD = \triangle CED$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 Suy ra $DH = DE$
 Ta có: $\triangle ABD$ là tam giác đều (cmt);
 suy ra $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = AD = BD$
 Suy ra $\angle A_1 = \angle BAC - \angle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
 $\triangle ADC$ có $\angle A_1 = \angle C = 30^\circ$ nên $\triangle ADC$ cân tại D , suy ra $AD = CD$ và
 $\angle D_1 = 180^\circ - 2\angle C = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$
 Suy ra $\angle D_2 = \angle D_1 = 120^\circ$
 $\Rightarrow \angle H_1 = \angle E_1 = \frac{180^\circ - \angle D_2}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$
 Do $\triangle HDE$ cân tại D
 Suy ra $\angle A_1 = \angle E_1 = 30^\circ \Rightarrow HE \parallel AC$

c) $\triangle AEC = \triangle AEK$ (g.c.g)

$\Rightarrow AC = AK$

$\Rightarrow \triangle ACK$ cân tại A

Ta có: $\angle EAK = \angle_1 + \angle_2 = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle ACK$ là tam giác đều

Suy ra: $AC = CK = AK \Rightarrow 3AC = AC + CK + AK$ (3)

Áp dụng BĐT tam giác vào các tam giác AIC, CIK, KIA có:

$AC < IA + IC;$

$CK < IC + IK;$

$AK < IA + IK$

Do đó $AC + CK + AK < 2(IA + IC + IK)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $3AC < 2(IA + IC + IK)$

$\Rightarrow \frac{3AC}{2} < IA + IC + IK$

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Tây năm học 2018 – 2019)

173

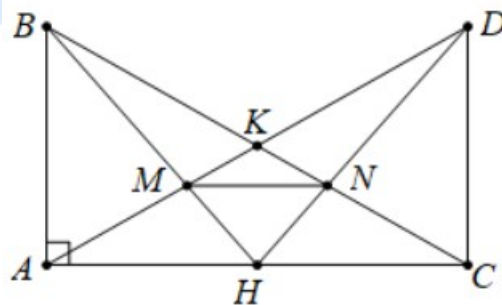
Cho tam giác ABC vuông tại A ; K là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia KA lấy D , sao cho $KD = KA$

a) Chứng minh: $CD \parallel AB$

b) Gọi H là trung điểm của AC ; BH cắt AD tại M , DH cắt BC tại N . Chứng minh rằng $\triangle ABH = \triangle CDH$

c) Chứng minh $\triangle HMN$ cân.

Lời giải



a) Xét 2 tam giác $\triangle ABK$ và $\triangle DCK$ có:

$BK = CK$

$\angle BKA = \angle CKD$ (đối đỉnh)

$AK = DK$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABK = \triangle DCK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle BCK = \angle ABK$

Mà $\angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ = \angle BAC$

$\Rightarrow AB \parallel CD$ (do $AB \perp AC, CD \perp AC$)

b) Xét 2 tam giác vuông $\triangle ABH$ và $\triangle CDH$ có:

$$BA = CD \text{ (do } \triangle ABK = \triangle DCK \text{)}$$

$$AH = CH \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle CDH \text{ (c.g.c)}$$

c) Xét 2 tam giác vuông: $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có:

$$AB = CD$$

$$\angle ACD = 90^\circ = \angle BAC$$

AC cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle CAD$$

Mà $AH = CH$ và $\angle MHA = \angle NHC$ (do $\triangle ABH = \triangle CDH$)

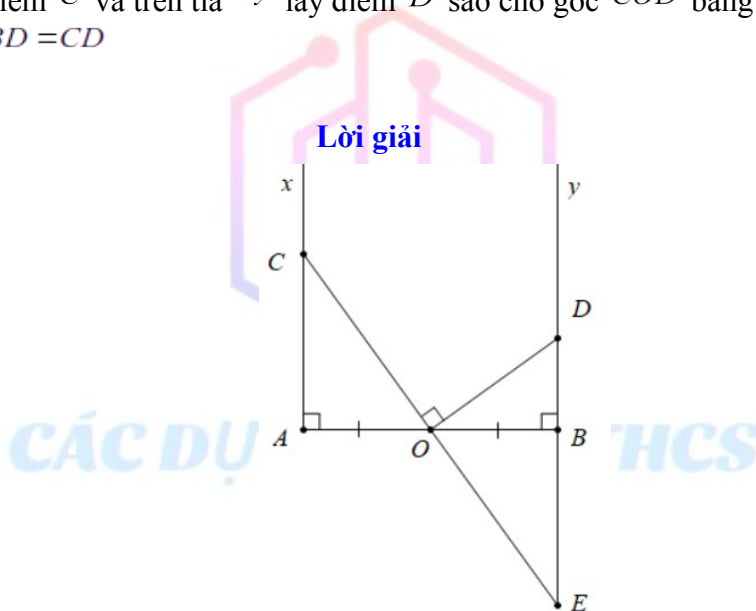
$$\Rightarrow \triangle AMH = \triangle CNH \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow MH = NH. \text{ Vậy } \triangle HMN \text{ cân tại } H$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh, trường THCS Đào Duy Từ năm học 2018 - 2019) 174

Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax , By lần lượt vuông góc với AB tại A và B . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia By lấy điểm D sao cho góc COD bằng 90° . Chứng minh rằng $AC + BD = CD$

Lời giải



a) Gọi E là giao điểm của CO và BD

Ta có: $OA = OB$ (gt)

$$\angle OAC = \angle OBE = 90^\circ$$

$$\angle AOC = \angle BOE \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOE \text{ (g.c.g)} \Rightarrow \begin{cases} AC = BE \\ CO = EO \end{cases}$$

Ta có: $OC = OE$ (cmt)

$$\angle OAC = \angle OBE = 90^\circ$$

OD là cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle DOC = \triangle DOE \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CD = ED$$

$$\text{Mà } ED = EB + BD = AC + BD \Rightarrow CD = AC + BD$$

Câu 4. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Đáp Cầu năm học 2018 - 2019)

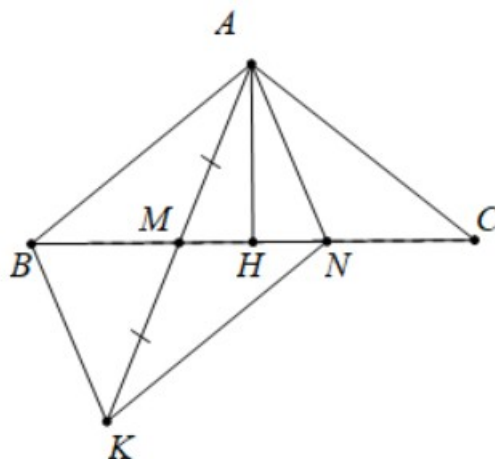
175

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC .

a) Chứng minh $AM = AN$ và $AH \perp BC$

b) Chứng minh: $\angle MAN > \angle BAM = \angle CAN$

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$
 Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$
 b) Trên tia AM lấy điểm K sao cho $AM = MK \Rightarrow \triangle AMN = \triangle KMB$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \angle MAN = \angle BKM$ và $AN = AM = BK$. Do $BA > AM \Rightarrow BA > AK$
 $\Rightarrow \angle BKA > \angle BAK$
 $\Rightarrow \angle MAN > \angle BAM = \angle CAN$

Câu 5. (HSG 7 huyện Trục Ninh năm học 2018 - 2019) 178

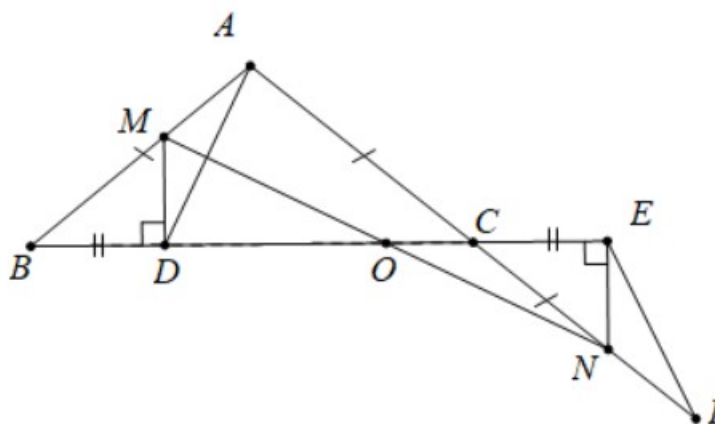
Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle A$ tù). Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Trên tia đối của CA lấy điểm I sao cho $CI = CA$.

Câu 1. Chứng minh

- a) $\triangle ABD = \triangle ICE$
 b) $AB + AC < AD + AE$

Câu 2. Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB , AI theo thứ tự tại M , N . Chứng minh rằng chu vi tam giác ABC nhỏ hơn chu vi tam giác AMN

Lời giải



Câu 1.

$$\triangle ABD = \triangle ICE$$

a) Chứng minh (c.g.c)

$$AB + AC = AI, \quad \triangle ABD = \triangle ICE \Rightarrow AD = EI$$

b) Có vì (2 cạnh tương ứng)

Áp dụng bất đẳng thức trong $\triangle AEI$ có: $AE + EI > AI$ hay $AE + AD > AB + AC$

Câu 2. Chứng minh $\triangle BDM = \triangle CEN$ (g.c.g)

$$\Rightarrow BM = CN$$

$$\text{Vì } BM = CN \Rightarrow AB + AC = AM + AN \quad (1)$$

$$\text{Có } BM = CE \Rightarrow BC = DE$$

Gọi giao điểm của MN với BC là O ta có:

$$\left. \begin{array}{l} MO > OD \\ NO > OE \end{array} \right\} \Rightarrow MO + NO > OD + OE \Rightarrow MN > DE \Rightarrow MN > BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra chu vi $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle AMN$

Câu 6. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường THCS Quang Trung năm học 2018 - 2019) 179

Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BA và CA lấy hai điểm D và E , sao cho $BD = CE$.

$$DE \parallel BC$$

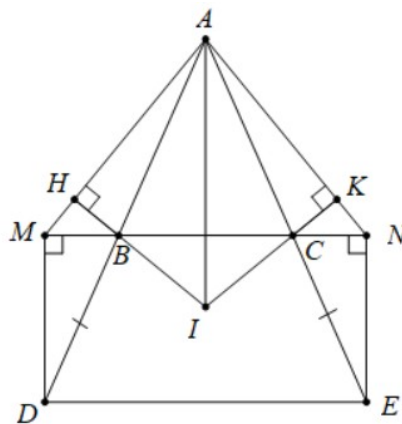
a) Chứng minh

b) Từ $\triangle DMB$ vuông góc với BC , từ $\triangle ENC$ vuông góc với BC . Chứng minh $DM = EN$.

c) Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân

d) Từ $\triangle BDM$ và $\triangle CEN$ kẻ các đường vuông góc với AM và AN chúng cắt nhau tại I . Chứng minh AI là tia phân giác chung của 2 góc BAC , MAN .

Lời giải



$$AB = AC(gt) \quad BD = CE(gt) \Rightarrow AD = AE$$

a) Ta có:

và

$\triangle ADE \quad AD = AE$

có nên là tam giác cân

Hai tam giác cân ABC và ADE có chung góc ở đỉnh A nên các góc ở đáy bằng nhau:

$\angle ABC = \angle ADE$ mà $\angle ABC$; $\angle ADE$ là hai góc đồng vị $\Rightarrow DE \parallel BC$.

b) $\triangle ABC$ cân tại A có : $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$

Mà $\angle MBD = \angle ABC$ (đối đỉnh); $\angle NCE = \angle ACB$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle MBD = \angle NCE$

Xét 2 tam giác vuông $\triangle DMB$ và $\triangle ENC$ có:

$$MBD = NCE \text{ (cmt);}$$

$$BD = CE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta DMB = \Delta ENC \text{ (ch-gn)}$$

$$\Rightarrow DM = EN$$

c) Xét ΔAMD và ΔANE có:

$$AD = AE$$

(cmt)

$$\square ADM = \square AEN \quad \Delta DMB = \Delta ENC$$

(do)

$$DM = EN(cmt)$$

$$\Rightarrow \Delta AMD = \Delta ANE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AM = AN \Rightarrow \Delta AMN \text{ cân tại } A$$

$$\Delta AMD = \Delta ANE(cmt) \Rightarrow H_{AB} = K_{AC}$$

d)

Xét 2 tam giác vuông: HAB và KAC có:

$$H_{AB} = K_{AC} \quad AB = AC(gt)$$

$$\Rightarrow \Delta H_{AB} = \Delta K_{AC} \text{ (ch-gn)}$$

$$\Rightarrow AH = AK$$

Mặt khác: Xét 2 tam giác vuông AIH và AIK có:

AI canh chung: $AH = AK(cmt)$

$$\Rightarrow \Delta AHI = \Delta AKI \text{ (ch-cgv)}$$

Do đó $\square_{IAH} = \square_{IAK}$

Lại có: $\square HAB = \square KAC$ nên $\square TAB = \square PAC$

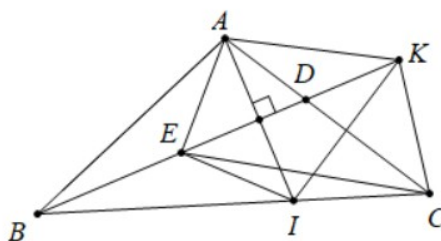
Vậy AI là tia phân giác chung của $\angle BAC, \angle MAN$

Câu 7. (HSG 7 huyện Thường Tín năm học 2018 – 2019) 167

Cho tam giác ABC có $AB = AC, \angle A = 100^\circ$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC tại D , qua A kẻ đường vuông góc với BD cắt BC ở I .

- Chứng minh rằng: BD là trung trực của AI
- Trên tia đối của tia DB lấy K sao cho $DK = DA$. Chứng minh rằng: tam giác AIK đều
- Chứng minh: $BK = BC$
- Lấy $E \in BD$. Chứng minh rằng: $BC + EA > AB + EC$

Lời giải



- Xét $\triangle BAI$ có BD vừa là phân giác vừa là đường cao nên $\triangle BAI$ cân tại đỉnh B
 $\Rightarrow BD$ là trung trực của AI

- Từ chứng minh trên $\Rightarrow KA = KI$ (1)

Từ giả thiết $\triangle ABC$ cân đỉnh A ($\angle A = 100^\circ$)

$$\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$$

$\triangle BAI$ cân đỉnh B mà $\angle ABI = 40^\circ$

$$\Rightarrow \angle BAI = \angle BIA = 70^\circ$$

Từ đó suy ra $\angle DAC = 30^\circ$ (2) và $\angle AIC = 110^\circ$

Xét $\triangle BAD$ có

$$\angle BAD = 100^\circ, \angle ABD = 20^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ADB = 60^\circ$$

Lại có $\triangle DAK$ cân đỉnh D

$$\Rightarrow \angle DAK = \angle DKA$$

$$\Rightarrow \angle ADB = 2\angle DAK \text{ (tính chất góc ngoài)}$$

$$\Rightarrow \angle DAK = 30^\circ \text{ (3)}$$

Từ (2) và (3) suy ra: $\angle DAK = 60^\circ$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $\triangle AIK$ đều.

- Ta có: $\triangle IAC = \triangle KAC$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle AKC = \angle AIC = 110^\circ \text{ . mà } \angle AKI = 60^\circ \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \angle KIC = 50^\circ \text{ . Mà } \angle IKI = \angle IKA = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BKC = 80^\circ$$

Xét $\triangle BKC$ có $\angle BKC = 80^\circ$; $\angle KBC = 20^\circ$

$$\Rightarrow \angle KCB = 80^\circ \Rightarrow \triangle BKC \text{ cân tại đỉnh } B \Rightarrow BK = BC.$$

d) Ta có: BK là trung trực của $AI \Rightarrow EA = EI$

$$BC - AB = BC - BI = IC \text{ (1)}$$

Từ đó $EC - EA = EC - EI < IC$ (BĐT trong tam giác) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EC - EA < BC - AB$ hay $BC + EA > AB + EC$.

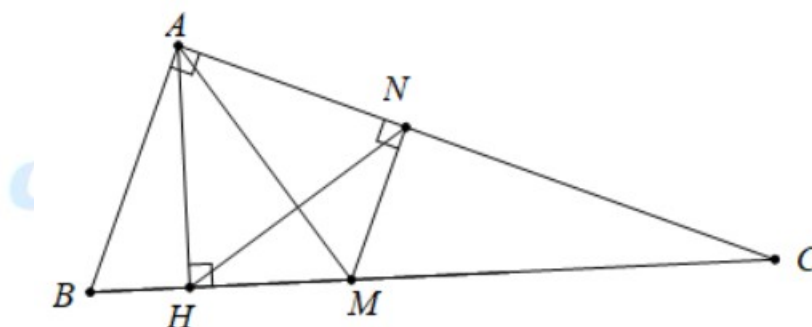
Câu 8. (HSG 7 huyện Cát Tiên năm học 2018 – 2019) 169

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = BA$. Từ M kẻ MN vuông góc với AC ($N \in AC$). Chứng minh rằng:

- c) Tam giác ANH cân
 $BC + AH > AB + AC$

d)

Lời giải



- c) $\triangle ABM$ cân tại B nên $\angle BAM = \angle BMA$
 mà $\angle BAM + \angle MAN = 90^\circ$; $\angle BMA + \angle HAM = 90^\circ \Rightarrow \angle HAM = \angle MAN$
 $\Rightarrow \triangle HAM = \triangle NAM$ (ch-gn).
 $\Rightarrow AH = AN \Rightarrow \triangle ANH$ cân.

- d) Ta có: $BC - AB = BC - AM = MC$; $AC - AH = AC - AN = NC$

Tam giác MNC vuông tại N nên $MC > NC$. Suy ra :

$$BC - AB > AC - AH$$

$$\Rightarrow BC + AH > AB + AC$$

Câu 9. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2022 - 2023) Chưa biết 180

Cho tam giác ABC , M là trung điểm BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng:

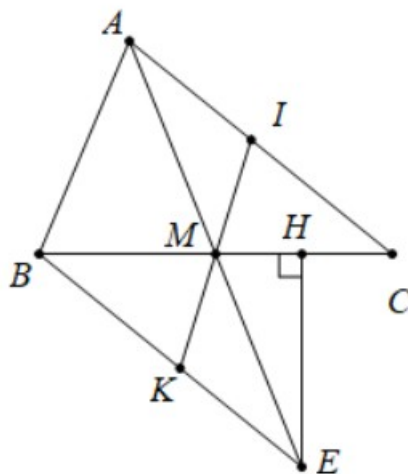
$$AC = EB, AC \parallel BE$$

a)

b) Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh rằng I, M, K thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC (H \in BC)$. Biết $\angle HBE = 50^\circ, \angle MEB = 25^\circ$. Tính $\angle HEM$ và $\angle BME$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có: $AM = EM (gt); \angle AMC = \angle EMB$ (đối đỉnh); $BM = MC (gt)$
 $\triangle AMC = \triangle EMB (c.g.c) \Rightarrow AC = EB$

Do đó

$$\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$$

b) Vì $\angle MAC = \angle MEB$, mà 2 góc này ở vị trí so le trong
 Suy ra $AC \parallel BE$

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM (gt); \angle MAI = \angle MEK (\angle MAC = \angle MEB)$

Nên $\angle AMI = \angle EMK$ mà $\angle AMI + \angle EME = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow \angle EMK + \angle EME = 180^\circ \Rightarrow I, M, K$ thẳng hàng

$$\triangle BHE (\angle H = 90^\circ) \quad \angle HBE = 50^\circ$$

c) Trong $\triangle BHE$ có

$$\Rightarrow \angle HBE = 90^\circ - \angle HEB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$

Nên $\angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ (định lý góc ngoài của tam giác)

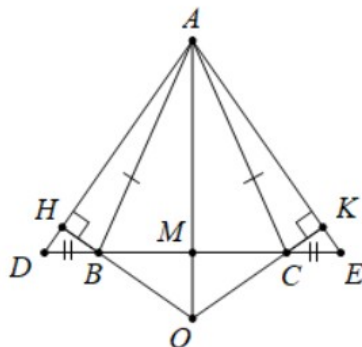
Câu 10. (HSG 7 huyện Yên Mỹ, tỉnh, trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019) 168

Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC , CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

a) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân.

- b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của $\angle BAE$.
- c) Từ B và C vẽ BH, CK theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$.
- d) Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm.

Lời giải



- a) $\triangle ABC$ cân nên $\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$
 Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:
 $AB = AC$ (gt)
 $\angle ABD = \angle ACE$ (cmt)
 $DB = CE$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A
- b) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:
 $MD = ME$ ($DB = CE, MB = MC$);
 AM chung;
 $AD = AE$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle AMD = \triangle AME$ (c.c.c)
 $\Rightarrow \angle MAD = \angle MAE$
 Vậy AM là tia phân giác của $\angle BAE$
- c) Vì $\triangle ADE$ cân tại A (cm câu a) nên $\angle ADE = \angle AED$
 Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có:
 $\angle BDH = \angle CEK$ (do $\angle ADE = \angle AED$)
 $DB = CE$ (gt)
 $\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE$ (ch-gn)
 $\Rightarrow BH = CK$
- d) Vì $\triangle BHD = \triangle CKE$ (cmt) nên $HD = KE$
 Gọi giao điểm của BH và CK là O .
 Xét $\triangle AHO$ và $\triangle AKO$ có:
 OA cạnh chung;

$$AH = AK \text{ (do } AD = AE, DH = KE \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO \text{ (ch-cgv)}$$

Do đó $\widehat{OAH} = \widehat{OAK}$ nên AO là tia phân giác của $\widehat{KAH}$

Hay AO là tia phân giác của $\widehat{DAE}$, mặt khác theo câu b) AM là tia phân giác của $\widehat{DAE}$

Do đó $AO \equiv AM$, suy ra ba đường thẳng AM, BH, CK cắt nhau tại O .



CÁC DỰ ÁN TOÁN THCS