

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (4,0 điểm)

- 1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$
- 2) Cho đường thẳng $d: y = ax + b (a \neq 0)$. Tìm a, b biết d đi qua $M(1; 2)$ và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB cân, O là gốc tọa độ

Câu 2. (4,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $5x^2 + 6x + 4 = 3(x+1)\sqrt{3x^2 + 4}$
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ x^3 - 5x^2 + 3x - 8 + 2y = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình
$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{10} \right| = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{100}}$$
- 2) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p . Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p

Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O) , M khác C và D . Đường thẳng MA cắt DB, DC theo thứ tự tại H và K , đường thẳng MB cắt DC và AC theo thứ tự tại E và F . Hai đường thẳng CH, DF cắt nhau tại N

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $DHEM$ nội tiếp và HE là phân giác của $\angle MHC$
- 2) Gọi G là giao điểm của KF và HE . Chứng minh rằng tứ giác $GHOE$ là hình chữ nhật và G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle KNE$

- 3) Chứng minh rằng $\frac{HN}{HM} = \frac{DK}{DC}$

Câu 5. (2,0 điểm)

- 1) Cho đường tròn tâm (O) . Bước 1, lấy một đường kính của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi cung nhận được ghi số 2. Bước 3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn. Khi đó, đường tròn được chia thành 4 cung bằng nhau, tại điểm chính giữa của mỗi cung này ta ghi số có giá trị bằng tổng của hai số được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục quá trình như vậy, hỏi sau 2021 bước tổng các số được ghi trên đường tròn là bao nhiêu ?
- 2) Cho ba số a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a^2b + b^2c + c^2a) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \right) \leq \frac{3}{2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (4,0 điểm)

3) Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}} \quad \text{với } x > 0, x \neq 1$$

$$P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x} \cdot (x - 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) + 1 + 2x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1}$$

4) Cho đường thẳng $d: y = ax + b (a \neq 0)$. **Tìm** a, b **biết** d **đi qua** $M(1; 2)$ **và cắt các trục** Ox, Oy **lần lượt tại** A **và** B **sao cho tam giác** OAB **cân, O là gốc tọa độ**

Vì đường thẳng (d) đi qua $M(1; 2)$ nên $a + b = 2$. Đường thẳng (d) cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ và $B(0; b)$

$$\Delta OAB \text{ cân khi } OA = OB \Rightarrow \left| \frac{b}{a} \right| = |b| \Leftrightarrow |a| = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Từ đó ta tìm được $(a; b) \in \{(-1; 3), (1; 1)\}$

Câu 2. (4,0 điểm)

3) Giải phương trình $5x^2 + 6x + 4 = 3(x + 1)\sqrt{3x^2 + 4}$

Phương trình tương đương :

$$3x^2 + 4 - 3(x + 1)\sqrt{3x^2 + 4} + 2x^2 + 6x = 0$$

Đặt $t = \sqrt{3x^2 + 4}$ được phương trình $t^2 - 3(x + 1)t + 2x^2 + 6x = 0$

Ta có $\Delta = 9(x + 1)^2 - 4(2x^2 + 6x) = (x - 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x \\ t = x + 3 \end{cases}$

Với $t = 2x \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 4} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Với $t = x + 3 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 4} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 2x^2 - 6x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{2}$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{19}}{2}; 2; \frac{3 + \sqrt{19}}{2} \right\}$

4) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ x^3 - 5x^2 + 3x - 8 + 2y = 0 \end{cases}$$

ĐKXĐ: $y \leq \frac{5}{2}$. Từ phương trình $(4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0$
 $\Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = (\sqrt{5 - 2y})^3 + \sqrt{5 - 2y} \quad (1)$

Nếu $2x > \sqrt{5 - 2y} \Rightarrow (2x)^3 + 2x > (\sqrt{5 - 2y})^3 + \sqrt{5 - 2y}$

Nếu $2x < \sqrt{5 - 2y} \Rightarrow (2x)^3 + 2x < (\sqrt{5 - 2y})^3 + \sqrt{5 - 2y}$

Nếu $2x = \sqrt{5 - 2y} \Rightarrow (2x)^3 + 2x = (\sqrt{5 - 2y})^3 + \sqrt{5 - 2y}$

Do đó từ (1) ta có $2x = \sqrt{5 - 2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2y = 5 - 4x^2 \end{cases}$

Thay $2y = 5 - 4x^2$ vào phương trình $x^3 - 5x^2 + 3x - 8 + 2y = 0$ được :

$$2(x - 1)^3 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2} - 1} \Rightarrow y = \frac{5}{2} - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2} - 1} \right)^2$$

$$(x; y) = \left(\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2} - 1}; \frac{5}{2} - \left(\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2} - 1} \right)^2 \right)$$

Đối chiếu ĐKXĐ thì hệ phương trình có nghiệm

Câu 3. (4,0 điểm)

3) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{10} \right| = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{100}}$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{10} \right| = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{100}}$$

Ta có :

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{10} \right)^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{100} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 10 - \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow x = y - 20\sqrt{y} + 100$$

Vì x, y nguyên dương nên y phải là số chính phương.

Lập luận tương tự ta cũng có x là số chính phương. Đặt $x = a^2, y = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$

Ta có $a + b = 10 \Rightarrow (a; b) \in \{(1; 9); (2; 8); \dots; (9; 1)\}$
 $\Rightarrow (x; y) \in \{(1; 81); (4; 64); \dots; (81; 1)\}$

4) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p . Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p

Vì $(p - 5) \vdots 8 \Rightarrow p = 8k + 5 (k \in \mathbb{N})$. Ta có :

$$(ax^2)^{4k+2} - (by^2)^{4k+2} : (ax^2 - by^2) : p \Rightarrow (a^{4k+2} \cdot x^{8k+4} - b^{4k+2} \cdot y^{8k+4}) : p. \text{ Nhận thấy}$$

$$a^{4k+2} x^{8k+4} - b^{4k+2} y^{8k+4} = (a^{4k+2} + b^{4k+2}) x^{8k+4} - b^{4k+2} (x^{8k+4} + y^{8k+4})$$

$$\text{Do } (a^{4k+2} + b^{4k+2}) = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} : (a^2 + b^2) = p \text{ và } b < p \text{ nên } (x^{8k+4} + y^{8k+4}) : p (*)$$

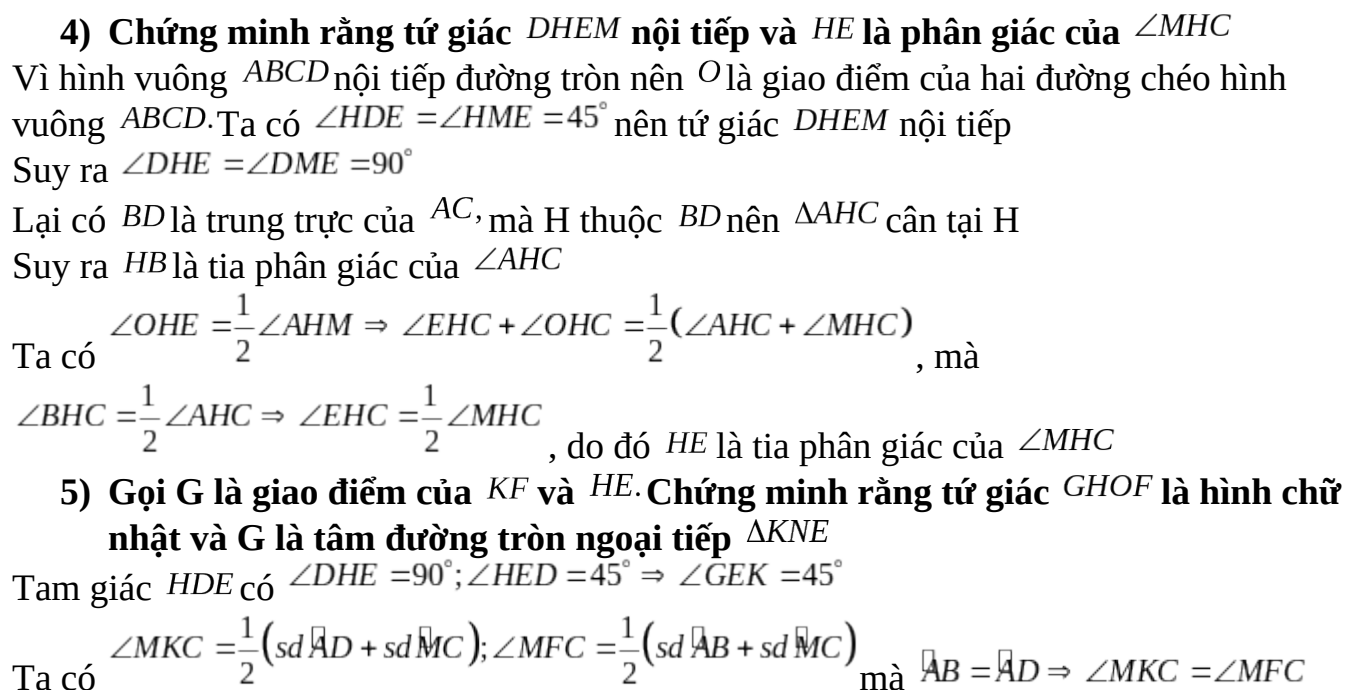
Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p . Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lý Fermat ta có

$$x^{8k+4} = x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$y^{8k+4} = y^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} \equiv 2 \pmod{p} \text{ (mâu thuẫn với (*))}$$

Vậy cả hai số x, y đều chia hết cho p

Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Điểm M thuộc cung nhỏ CD của (O) , M khác C và D . Đường thẳng MA cắt DB, DC theo thứ tự tại H và K , đường thẳng MB cắt DC và AC theo thứ tự tại E và F . Hai đường thẳng CH, DF cắt nhau tại N



Suy ra tứ giác $MKFC$ nội tiếp. Lại có $\angle KMC = \angle AMC = 90^\circ \Rightarrow \angle KFC = 90^\circ$ hay $KF \perp AC$

Vì $\angle GHF = \angle HOF = \angle GFO = 90^\circ$ nên $GHOF$ là hình chữ nhật

Ta có : $\angle HGF = 90^\circ \Rightarrow \angle HGK = 90^\circ$ và $\angle KGE = 90^\circ$, suy ra $\triangle KGE$ vuông cân tại G , nên $GK = GE$ (1)

Vì $\angle AMB = \angle BMC$ nên MB là phân giác của $\angle AMC$. Tam giác MHC có HE là phân giác của $\angle MHC$ và ME là phân giác của $\angle HMC$ nên E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HMC . Do đó EC là phân giác của $\angle HCM$, suy ra $\angle NCD = \angle MCD$. Tương tự ta cũng có KF là phân giác của $\angle MFD$

Ta cũng có MA là phân giác của $\angle DMF$. Do đó dẫn đến K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DMF , suy ra DC là phân giác của $\angle NDM$

Từ đó suy ra $\angle NDC = \angle MDC$. Hai tam giác NCD và MCD có :

$\angle NDC = \angle MDC$; $\angle NCD = \angle MCD$ và DC chung nên $\triangle NCD = \triangle MCD \Rightarrow NC = MC$

Hai tam giác NKC và MKC có $NC = MC$, $\angle NCK = \angle MCK$, KC chung nên $\triangle NKC = \triangle MKC$

Suy ra $\angle KNC = \angle KMC = 90^\circ \Rightarrow \angle HNK = 90^\circ$ mà $\angle HGK = 90^\circ$ nên $HNGK$ là tứ giác nội tiếp

Lại có $\angle KHG = \angle GHN \Rightarrow \angle NGK = \angle GKN \Rightarrow GK = GN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $GK = GN = GE$, hay G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NKE

6) Chứng minh rằng $\frac{HN}{HM} = \frac{DK}{DC}$

Vì $\angle KMC = \angle KNC = 90^\circ$ nên tứ giác $MKNC$ nội tiếp, suy ra $\angle HMN = \angle NCH$

Hai tam giác HMN và HCK có $\angle MHC$ chung và $\angle HMN = \angle KCH$

$\Rightarrow \triangle HMN \sim \triangle HCK \Rightarrow \frac{HN}{HM} = \frac{HK}{HC}$ (3)

Vì HE là phân giác của $\angle KHC$ nên $\frac{HK}{HC} = \frac{EK}{EC}$ (4)

Vì ME là phân giác của $\angle KMC$ nên $\frac{EK}{EC} = \frac{MK}{MC}$ (5)

Lại có $\triangle DBM \sim \triangle KCM \Rightarrow \frac{MK}{MC} = \frac{MD}{MB}$ (6)

Vì MH là phân giác của $\angle DMB$ nên $\frac{HD}{HB} = \frac{MD}{MB}$ (7)

Do $AB \parallel DK$ nên $\frac{HK}{HA} = \frac{HD}{HB} = \frac{DK}{DC}$ (8)

Từ (3), (4), (5), (6), (7), (8) $\Rightarrow \frac{HN}{HM} = \frac{DK}{DC}$

Câu 5. (2,0 điểm)

3) Cho đường tròn tâm (O). Bước 1, lấy một đường kính của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi

cung nhận được ghi số 2. Bước 3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn. Khi đó, đường tròn được chia thành 4 cung bằng nhau, tại điểm chính giữa của mỗi cung này ta ghi số có giá trị bằng tổng của hai số được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục quá trình như vậy, hỏi sau 2021 bước tổng các số được ghi trên đường tròn là bao nhiêu ?

Gọi S_n là tổng của tất cả các số ghi trên đường tròn sau n bước, $n \in \mathbb{N}^*$

Sau bước 1, trên đường tròn có 2^1 số là 1;1 nên $S_1 = 1+1 = 2 = 2 \cdot 3^0$

Sau bước 2, trên đường tròn có 2^2 số là 1,2,1,2 nên $S_2 = 1+2+1+2 = 6 = 2 \cdot 3^1$

Sau bước 3, trên đường tròn có 2^3 số là 1,3,2,3,1,3,2,3 nên $S_3 = 18 = 2 \cdot 3^2$

Dự đoán sau n bước tổng là $S_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. Ta sẽ chứng minh $S_n = 2 \cdot 3^{n-1} (*) (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Thật vậy, với $n=1$ thì $(*)$ đúng

Giả sử $(*)$ đúng với $n=k (k \in \mathbb{N}^*)$, nghĩa là sau k bước trên đường tròn đã cho có các số với tổng là $S_k = 2 \cdot 3^{k-1}$

Sang bước thứ $k+1$, ta xem 2^k điểm đã ghi số là 2^k điểm chia, nên đường tròn được chia thành 2^k cung bằng nhau

Do điểm chính giữa của mỗi cung này lại ghi tổng của hai số đã ghi ở hai đầu mỗi cung tương ứng. Do đó $S_{k+1} = S_k + 2S_k = 3S_k = 2 \cdot 3^k$

Vậy $S_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ do đó $S_{2021} = 2 \cdot 3^{2020}$

4) Cho ba số a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a^2b + b^2c + c^2a) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \right) \leq \frac{3}{2}$$

Ta có $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = (a^3+ab^2) + (b^3+bc^2) + (c^3+ca^2) + (a^2b+b^2c+c^2a)$

Áp dụng bất đẳng thức Cossi ta có :

$$(a^3+ab^2) + (b^3+bc^2) + (c^3+ca^2) \geq 2(a^2b+b^2c+c^2a)$$

Do đó $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^2b+b^2c+c^2a) \Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a \leq \frac{1}{3}(a+b+c)$. Suy ra

$$(a^2b+b^2c+c^2a) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \right) \leq \frac{1}{3}(a+b+c) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \right)$$

Ta có: $1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow a^2 + 1 = (a+b)(c+a)$

Áp dụng bất đẳng thức Cossi – Schwarz ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} &\leq \frac{a}{\sqrt{(a+b)(c+a)}} = \sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{c+a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{c+a} \right) \\ \frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} &= \sqrt{1 \cdot \frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+a^2}} \leq \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+a^2} \right] \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+1}} &= \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{a+b} + \frac{a}{c+a} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right) \quad (1)\end{aligned}$$

Tương tự:

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{b^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{c^2+1}} = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{b+c} + \frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \right) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(a+b+c) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{6} \left(3 + \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2+a^2} \right) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$