

ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN BÌNH ĐỊNH 2023-2024

Bài 1: (5,0 điểm).

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 + 5y \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases}$$
2. Giải phương trình:
$$\sqrt{3}(x^2 - 3x + 1) = -\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

Bài 2: (5,0 điểm).

- 1) Cho các số thực x, y thỏa mãn $x - 2y + 4 < 0$

$$P = y^2 - 4x + \frac{4(y^2 - 4x)}{(x - 2y + 4)^2}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

- 2) Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết: $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$

$$H = \frac{P(12) + P(-8)}{2023}$$

Tính giá trị biểu thức

Bài 3: (5,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm P bất kì nằm trong tam giác (P khác O). Đường thẳng AP cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D , dựng các đường kính DE, AF của đường tròn (O) . Gọi G, I lần lượt là các giao điểm thứ hai của đường thẳng EP, FP với đường tròn (O) , K là giao điểm của AI và DG . Gọi H là hình chiếu vuông góc của K trên OP , đường thẳng OP cắt EF tại M .

1. Chứng minh HO là phân giác của góc $\angle HHD$.

2. Chứng minh $KD \perp DM$.

Bài 4 (3,0 điểm).

Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong AD, BE, CF cắt nhau tại I . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ID}{IA}} + \sqrt{\frac{IE}{IB}} + \sqrt{\frac{IF}{IC}} > 2$$

Bài 5: (2,0 điểm)

Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn 100° .

ĐÁP ÁN

Bài 1: (5,0 điểm).

$$\begin{cases} x^3 - 5x = y^3 + 5y \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 5) = 0 \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 = 5 \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{TH}_1 \begin{cases} x = y \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^4 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1; x = y = -1 \\ x^2 = -2. \end{cases}$$

Với $x^2 = -2$ (loại)

$$TH_2 \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 5 \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 5(x^4 + y^2) - 2(x^2 + xy + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^4 - 2x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^4 + x^4 - 2x^2 - 2xy + 3y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + 2 - y^2 - 2x^2 - 2xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow (4x^4 - 3x^2 + 2) + (y^2 - 2xy + x^2) + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2 - \frac{3}{4}\right)^2 + (y - x)^2 + y^2 = 0 \text{ (VN)}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(x, y) = (1; 1), (-1; -1)$.

$$2) \sqrt{3}(x^2 - 3x + 1) = -\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\text{Vì } x^4 + x^2 + 1 > 0 \text{ với } \forall x \Rightarrow -\sqrt{x^4 + x^2 + 1} < 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \text{ĐK } x^2 - 3x + 1 < 0$$

Ta có:

$$\sqrt{3}(x^2 - 3x + 1) = -\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^4 + 9x^2 + 1 - 6x^3 + 2x^2 - 6x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 + 33x^2 - 18x^3 - 18x + 3 - x^4 - x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + 32x^2 - 18x^3 - 18x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 9x + 1 = 0$$

Vì $x \neq 0$ không là nghiệm nên chia cả 2 vế cho x^2 ta được:

$$x^2 - 9x + 16 - \frac{9}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0$$

$$\text{Đặt } y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

phương trình trở thành

$$y^2 - 2 - 9y + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 9y + 14 = 0$$

$$\Delta = 81 - 56 = 25 > 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 7, y_2 = 2.$$

$$\text{Với } y = 7 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 7 \Rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4 = 45 \Rightarrow x_1 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \text{ loại vì } x^2 - 3x + 1 < 0$$

$$x_2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ loại vì } x^2 - 3x + 1 < 0$$

$$\text{Với } y=2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 (t/m)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

Bài 2: (5,0 điểm)

1) Ta có :

$$P = y^2 - 4x + \frac{4(y^2 - 4x)}{(x - 2y + 4)^2}$$

$$P = (y - 4)^2 + 4(2y - x - 4) + \frac{4[(y - 4)^2 + 4(2y - x - 4)]}{(2y - x - 4)^2}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = y - 4 \\ b = 2y - x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = a^2 + 4b + \frac{4(a^2 + 4b)}{b^2}$$

$$P = a^2 \left(1 + \frac{4}{b^2} \right) + 4 \left(b + \frac{4}{b} \right)$$

$$\text{Vì } a \geq 0 \quad 1 + \frac{4}{b^2} > 0, b + \frac{4}{b} > 0 \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{4}{b}} = 4$$

$$\Rightarrow P \geq 0 + 4 \cdot 4 = 16 \text{ Dấu " = " có khi } \begin{cases} a = y - 4 = 0 \\ b = 2y - x - 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy GTNN của $P = 16$ khi $x = 2, y = 4$.

2) Ta có:

$$P(1) = 10 \Leftrightarrow a + b + c + d = 9 \quad (1)$$

$$P(2) = 20 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 4 \Leftrightarrow 16a = 8b + 4c + 2d = 8 \quad (2)$$

$$P(3) = 30 \Leftrightarrow 27a + 9b + 3c + d = -51 \quad (3).$$

Lấy (3) + (1) - (2) ta được $6a + b = -25$

$$P(12) = 20736 + 1728a + 133b + 12c + d$$

$$P(-8) = 4096 - 512a + 64b - 8c + d$$

$$P(12) + P(-8) = 1216a + 208b + 4c + 2d + 24832$$

$$= 1214a + 206b + 2c + 2(a + b + c + d) + 24832$$

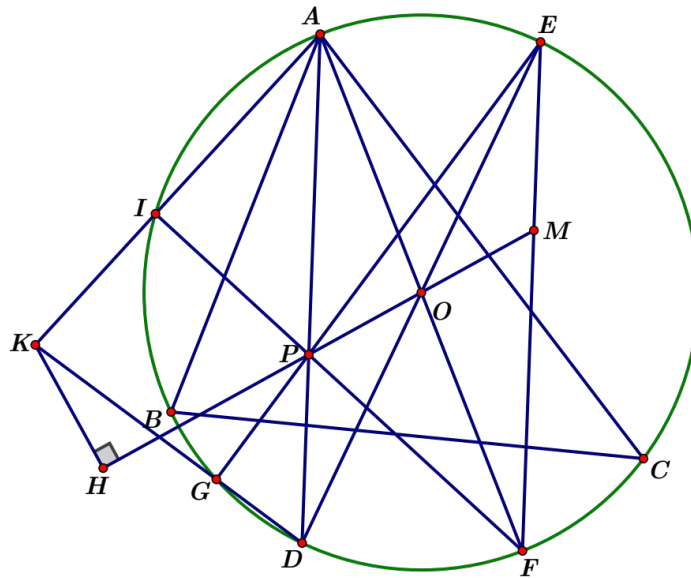
$$= 1188a + 198b + (26a + 8b + 2c) + 2 \cdot 9 + 24832$$

$$= 198(6a + b) - 60 + 24850$$

$$= 19840$$

$$H = \frac{P(12) + P(-8)}{2023} = \frac{19840}{2023}$$

Vậy
Câu 3.(5,0 điểm)



1) Ta có : $\angle AIF = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 $\Rightarrow \angle KIP = 180^\circ - \angle AIF = 90^\circ$

Tương tự ta có : $\Rightarrow \angle KGP = 90^\circ$ mà $KH \perp OP \Rightarrow \angle HHP = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ năm điểm . . cùng nằm trên đường tròn đường kính KP vì tứ giác HIPG nội tiếp
 $\Rightarrow \angle HIP = \angle IGP$

mà $\angle IGP = \angle IDE \left(= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{IE} \right)$
 $\Rightarrow \angle HIP = \angle IDE$ hay $\angle HIO = \angle IDO$

Suy ra tứ giác IHDO nội tiếp
 $\Rightarrow \angle OHD = \angle OID = \angle ODI = \angle HIO$

hay $\angle HIO$ là phân giác của $\angle HDI$.

2) Ta có $\angle KHD = 90^\circ - \angle PHD = 90^\circ - \angle PHI = 90^\circ - \angle HDE$
 Do $\angle HIO = \angle IDO$ hay $\angle PHI = \angle IDE$

Mà $\angle IDE$ vuông tại I nên $90^\circ - \angle IDE = \angle IED$
 $\Rightarrow \angle KHD = \angle IED = \angle IAD$

Hay $\angle KHD = \angle IAD$
 suy ra AHKD là tứ giác nội tiếp (*)

Mặt khác $\Rightarrow \angle HIP = \angle IDE = \angle IFE = \angle IFM$
 $\Rightarrow \angle IHP \sim \angle IFM (g - g)$

$$\frac{IP}{MP} = \frac{PH}{FP} \Rightarrow PF \cdot PI = PM \cdot PH \quad (1)$$

Ta chứng minh được $\Rightarrow \triangle AIP \sim \triangle FDP$ (g - g) $\Rightarrow PI \cdot PE = PA \cdot PD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $PM \cdot PH = PA \cdot PD$

hay tứ giác HIMD nội tiếp(**)

Từ (*) và (**) suy ra năm điểm A, H, K, D, M thuộc một đường tròn

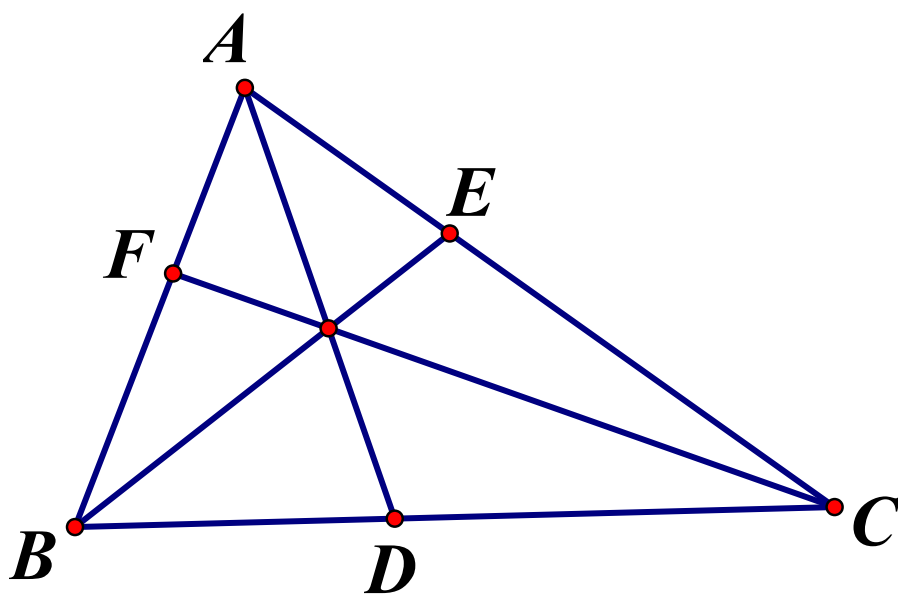
Suy ra tứ giác HKDM nội tiếp

$$\Rightarrow \angle HMK + \angle KDM = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KDM = 90^\circ$$

Hay $DM \perp KD$

Bài 4: (3,0 điểm).



Ta có $\frac{ID}{IA} = \frac{AB}{BD}; \quad \frac{AI}{ID} = \frac{AC}{CD}$

$$\Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{BD + CD}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC}$$

Đặt $AB = c, BC = a, AC = b$

$$\Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow \sqrt{\frac{ID}{IA}} = \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$$

$$\sqrt{a(b+c)} \leq \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{ID}{IA}} \geq \frac{a}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2a}{a+b+c}$$

Ta có :

Tương tự : $\sqrt{\frac{IE}{BI}} \geq \frac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{FI}{CI}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{ID}{IA}} + \sqrt{\frac{IE}{IB}} + \sqrt{\frac{IF}{IC}} \geq 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + c \\ b = a + c \\ c = a + b \end{cases}$ (vô lý)

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{ID}{IA}} + \sqrt{\frac{IE}{BI}} + \sqrt{\frac{IF}{CI}} > 2 \text{ (dpcm)}$$

Bài 5: (2,0 điểm)

Giả sử đa giác $A_1 A_2 A_3 \cdots A_{2n}$

Nối tiếp (O). Ta thấy các đỉnh tạo ra các cung $A_i A_{i+1}$ có số đo $\frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$

Có $2n$ đỉnh chứa góc $> 100^\circ$ tại đó

Gọi tam giác $A_m A_i A_p$ là tam giác thỏa mãn yêu cầu với $\angle A_m A_i A_p > 100^\circ$

Giả sử: $\angle A_m A_i A_p$ chắc x cung có số đo $\frac{180^\circ}{n}$ và $\angle A_m A_p A_i$ chắc y cung có số đo $\frac{180^\circ}{n}$ (x, y là các số tự nhiên khác 0)

$$\Rightarrow \angle A_i A_m A_p + \angle A_m A_p A_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{n} (x + y)$$

$$\Rightarrow \angle A_m A_i A_p = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{n} (x + y) > 100^\circ$$

$$\Rightarrow x + y \leq \frac{8n}{9} \text{ mà } x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x + y \leq \left\lfloor \frac{8n}{9} \right\rfloor = K.$$

Khi đó tồn tại $z \in \mathbb{N}$

Đề $x + y + z = k$ (1)

Khi đó cặp số (x, y) thỏa mãn (1) là số tam giác $A_m A_i A_p$ thỏa mãn

Ta có: $x = 1 \Rightarrow$ tồn tại $k - 1$ số y

$x = 2 \Rightarrow$ tồn tại $k - 2$ số y

$x = 3$ tồn tại $k - 3$ số y

.....

$x = k$ tồn tại có 1 số y

Khi đó tổng bộ (x, y) là $1 + 2 + 3 + \cdots + (k - 1) = (k - 1) \cdot k / 2$.

Vậy tổng số tam giác là $2n \cdot \frac{k(k - 1)}{2} = n \cdot k \cdot (k - 1)$ với $k = \left\lfloor \frac{8n}{9} \right\rfloor$.