

Bài 1. (3 điểm)

- a) Phân tích đa thức $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ thành nhân tử
- b) Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$
- Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$
- c) Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Bài 2. (2 điểm)

- a) Tìm số tự nhiên n để $n + 18$ và $n - 41$ là hai số chính phương
- b) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a + b = 1$. Chứng minh $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Bài 3. (1 điểm)

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ABC nhọn. Vẽ ra phía ngoài hình bình hành các tam giác đều BCE và DCF . Tính số đo $\angle EAF$

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và H là trực tâm

- a) Chứng minh $BC' \cdot BA + CB' \cdot CA = BC^2$
- b) Chứng minh rằng: $\frac{HB \cdot HC}{AB \cdot AC} + \frac{HA \cdot HB}{BC \cdot AC} + \frac{HC \cdot HA}{BC \cdot AB} = 1$
- c) Gọi D là trung điểm của BC . Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với DH cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh H là trung điểm của MN .

Bài 5. (1 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng cùng có tính chất chia hình vuông này thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 505 đường thẳng trong 2018 đường thẳng trên đồng quy.

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b) \\
 & = a^2(b-c) - b^2[(a-b) + (b-c)] + c^2(a-b) \\
 & = (a^2 - b^2)(b-c) + (c^2 - b^2)(a-b) \\
 & = (a-b)(a+b)(b-c) - (b-c)(b+c)(a-b) \\
 & = (a-b)(b-c)[a+b-b-c] = (a-b)(b-c)(a-c)
 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \\
 \text{Tương tự:} \quad & \frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\
 &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2}{(a-c)(b-c)} \\
 &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \text{Vì } x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow (x+y)^3 = -z^3$$

$$\text{Hay } x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = -z^3 \Rightarrow 3xyz = x^3 + y^3 + z^3$$

$$3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = (x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Do đó: } = x^5 + y^5 + z^5 + x^3(y^2 + z^2) + y^3(z^2 + x^2) + z^3(x^2 + y^2)$$

$$\text{Mà } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = z^2 - 2xy \quad (\text{Vì } x+y = -z)$$

$$\text{Tương tự: } y^2 + z^2 = x^2 - 2yz; \quad z^2 + x^2 = y^2 - 2zx$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vì vậy: } \quad & 3xyz(x^2 + y^2 + z^2) = x^5 + y^5 + z^5 + x^3(x^2 - 2yz) + y^3(y^2 - 2zx) + z^3(z^2 - 2xy) \\
 & = 2(x^5 + y^5 + z^5) - 2xyz(x^2 + y^2 + z^2)
 \end{aligned}$$

Suy ra : $2(x^5 + y^5 + z^5) = 5xyz(x^2 + y^2 + z^2)$

Bài 2.

a) Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$$\Leftrightarrow n+18=p^2 \text{ và } n-41=q^2 (p, q \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$$

$$\text{Nhưng } 59 \text{ là số nguyên tố, nên: } \begin{cases} p-q=1 \\ p+q=59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=30 \\ q=29 \end{cases}$$

$$\text{Từ } n+18=p^2=30^2=900 \Rightarrow n=882$$

$$\text{Thay vào } n-41, \text{ ta được } 882-41=841=29^2=q^2$$

Vậy với $n=882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

b) Có: $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (*)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$

$$\text{Áp dụng } (*) \text{ có: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(a + \frac{1}{b}\right); \quad \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{4} \geq 5\left(b + \frac{1}{a}\right)$$

$$\text{Suy ra: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[\left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(b + \frac{1}{a}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5\left[(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (Vi \quad a+b=1)$$

$$\text{Với } a, b \text{ dương, chứng minh } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} = 4 \quad (Vi \quad a+b=1)$$

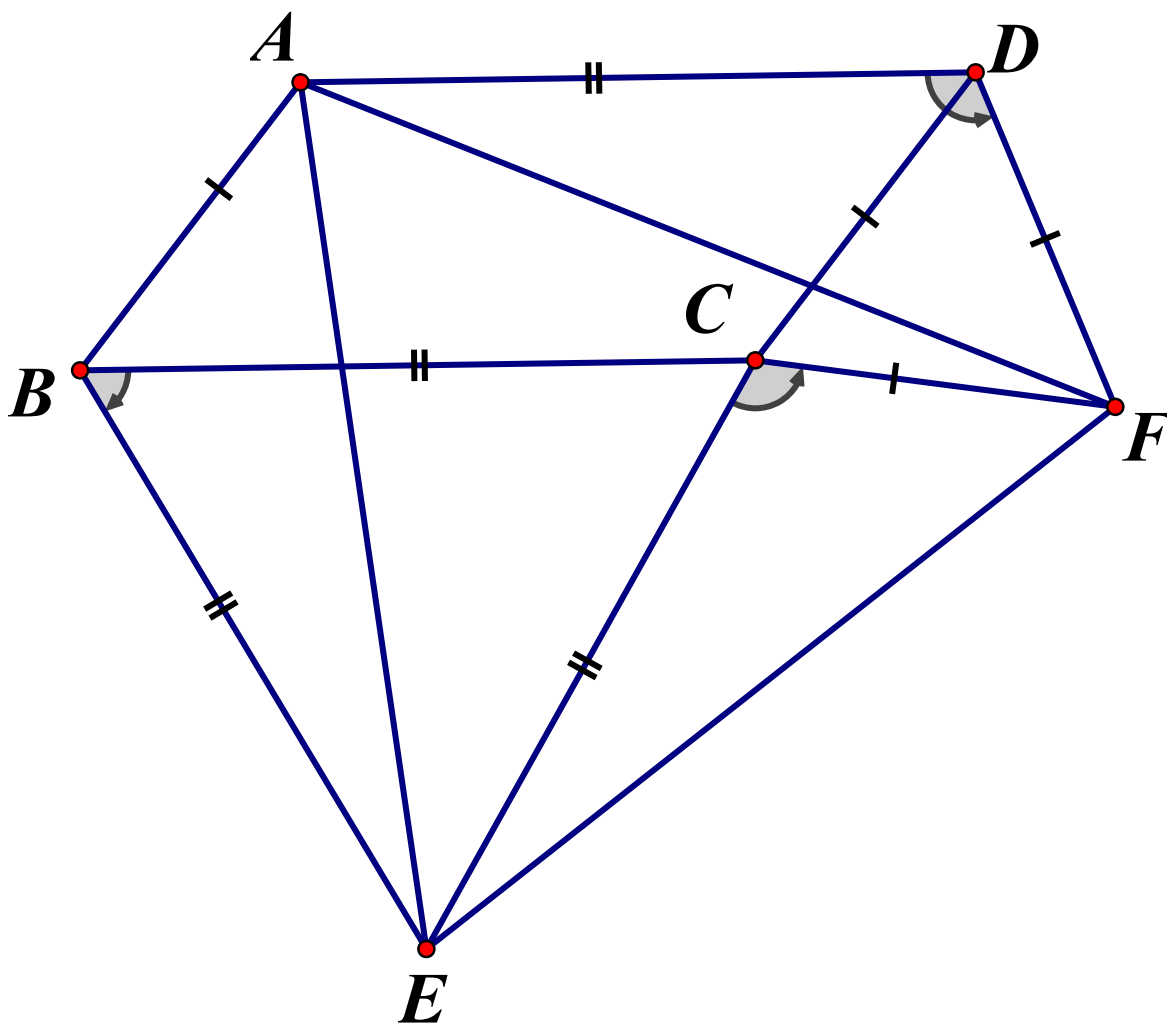
Dấu bằng xảy ra khi $a=b$

$$\text{Ta được: } \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{25}{2} \geq 5 + 5.4$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2} \quad \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

. Dấu đẳng thức xảy ra

Bài 3.



Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle FCE$

Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle FCE (c.g.c) \Rightarrow AE = EF$

Tương tự: $AE = EF$

$\Rightarrow AE = EF = AF \Rightarrow \triangle AEF$ đều $\Rightarrow \angle EAF = 60^\circ$

a) Chứng minh

Chứng minh

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC'.BA = BA'.BC$

Tương tự : $CB'.CA = CA'.BC$

$$\Rightarrow BC'.BA + CB'.CA = BA'.BC + CA'.BC = (BA' + A'C).BC = BC^2$$

b) Có

Tương tự:

$$\Rightarrow \frac{HB.HC}{AB.AC} + \frac{HA.HB}{AC.BC} + \frac{HC.HA}{BC.AB} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

c) Chứng minh

Chứng minh $\Delta AHN \sim \Delta BDH (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{BD} = \frac{HN}{HD} \quad (4)$

Mà $CD = BD \quad (gt) \quad (5)$

Từ $(3), (4), (5) \Rightarrow \frac{HM}{HD} = \frac{HN}{HD} \Rightarrow HM = HN \Rightarrow H$ là trung điểm của MN

Bài 5.

Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD . Lấy các điểm I, G trên EF và K, H trên PQ thỏa mãn:

$$\frac{IE}{IF} = \frac{HP}{HQ} = \frac{GF}{GE} = \frac{KQ}{KP} = \frac{2}{3}$$

Xét d là một trong các đường thẳng bất kỳ đã cho cắt hai đoạn thẳng AD, BC, EF lần lượt tại M, N, G' . Ta có:

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{CDNM}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{AB \cdot (BM + AN)}{2}}{\frac{CD \cdot (CM + DN)}{2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{EG'}{G'F} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow G \equiv G'$$

hay d qua G.

Từ lập luận trên suy ra mỗi đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của đề bài đều đi qua một trong 4 điểm G, H, I, K

Do có 2018 đường thẳng đi qua 1 trong 4 điểm G, H, I, K theo nguyên lý Dirichle

phải tồn tại ít nhất $\left\lceil \frac{2018}{4} \right\rceil + 1 = 505$ đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm trên.

Vậy có ít nhất 505 đường thẳng trong số 2018 đường thẳng đã cho đồng quy.