

Chủ đề 1 - Hàm số - Mức độ vận dụng cao phần 1 - Có lời giải

Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2m(m+1)x + 2m^3 + m^2 + 1}{x - m}$ có đồ thị (C_m) (m là tham số thực). Gọi A là điểm thỏa mãn vừa là điểm cực đại của (C_m) ứng với một giá trị m vừa là điểm cực tiểu của (C_m) ứng với giá trị khác của m . Giá trị của a để khoảng cách từ A đến đường thẳng $(d): x - (a+1)y + a = 0$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $a = 3$

B. $a = -3$

C. $a = \frac{10}{3}$

*D. $a = -\frac{10}{3}$

Lời giải

$$y = \frac{x^2 - 2m(m+1)x + 2m^3 + m^2 + 1}{x - m} = \frac{(x - m)^2 - 2m^2(x - m) + 1}{x - m} \quad (\text{Điều kiện } x \neq m)$$

$$y = f(x) = x - m + \frac{1}{x - m} - 2m^2$$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x - m)^2} = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 1 \\ x - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \Rightarrow y(m + 1) = 1 + 1 - 2m^2 = 2 - 2m^2 \\ x = m - 1 \Rightarrow y(m - 1) = -1 - 1 - 2m^2 = -2 - 2m^2 \end{cases}$$

Khi đó $A(x_0, y_0)$ thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} x_0 = m_1 + 1 = m_2 - 1 \\ y_0 = 2 - 2m_1^2 = -2 - 2m_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = -2 \\ m_1^2 - m_2^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = -2 \\ (m_1 - m_2)(m_1 + m_2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - m_2 = -2 \\ m_1 + m_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -\frac{3}{2} \\ m_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

Với $(d): x - (a+1)y + a = 0$ thì $d(A; (d)) = \frac{\left| -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}(a+1) + a \right|}{\sqrt{a^2 + 2a + 2}} = \frac{\left| \frac{7}{2}a + 2 \right|}{\sqrt{a^2 + 2a + 2}}$

$$g(a) = \frac{(7a+4)^2}{a^2 + 2a + 2} \Rightarrow g'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{7} \\ a = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Xét hàm

Bảng biến thiên

x	$-\infty$						$+\infty$
			$-\frac{10}{3}$		$-\frac{4}{7}$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			58				49

	49			0		
--	----	--	--	---	--	--

$$g(x)_{\max} \text{ tại } a = -\frac{10}{3} \text{ nên } d(A, (d))_{\max} \text{ tại } a = -\frac{10}{3}$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$+$			
y	$+\infty$		-2		3		-1		$+\infty$

Phương trình $2f\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right) + 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

*A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Ta có: $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Đặt $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = t$, $t \in [-1; 1]$.

$$f(t) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 \in (-\infty; -1) \text{ (loại)} \\ t = t_2 \in (-1; 0) \end{cases}$$

Phương trình tương đương:

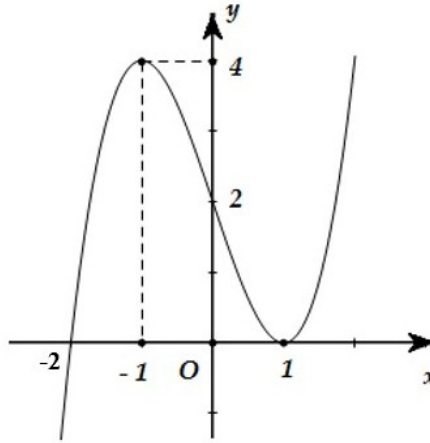
Với $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$, ta có bảng biến thiên của t như sau:

x	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
t						
	-1	0	1	0	-1	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $t = t_2$ có 3 nghiệm $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ. Số đường tiệm cận

đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{f^2(x) - f(x)}$ là



*A. 4.

B. 3

C. 2.

D. 5

Lời giải

Xét hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{f^2(x) - f(x)} = \frac{(x-1)(x+2)}{f(x)[f(x)-1]}$.

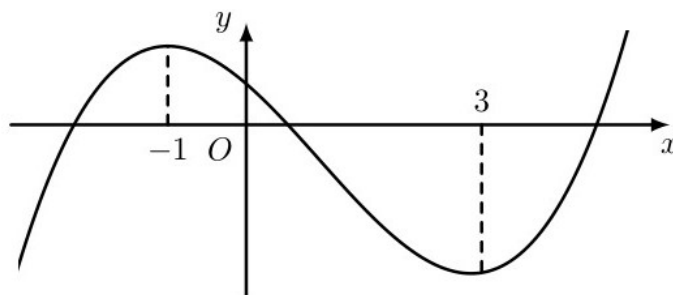
Xét phương trình $f(x)[f(x)-1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{cases}$.

Với $f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(\text{kep}) \\ x=-2(\text{don}) \end{cases} \Rightarrow x=1$ là TCD, $x=-2$ không là TCD.

Với $f(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=x_1 \in (0;1) \\ x=x_2 \in (-2;-1) \end{cases} \Rightarrow x=0, x=x_1, x=x_2$ đều là các đường TCD.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường TCD.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f((x-1)^2+m)$ có 3 điểm cực trị.
Tổng các phần tử của S là

*A. 2.

B. 4.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Xét hàm số

$$y = f((x-1)^2 + m)$$

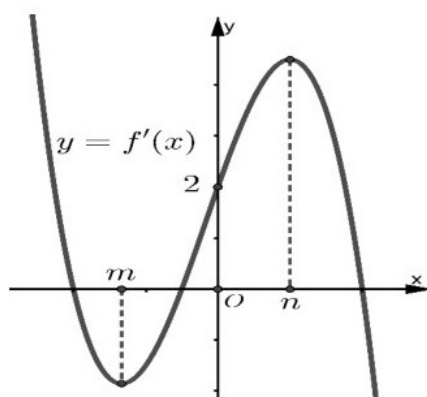
$$\bullet y' = 2(x-1)f'((x-1)^2 + m)$$

$$\bullet y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 + m = -1 \\ (x-1)^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2 = -1-m \\ (x-1)^2 = 3-m \end{cases}$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị thì $-1-m \leq 0 < 3-m \Leftrightarrow -1 \leq m < 3 \Rightarrow m \in [-1; 0; 1; 2]$

Vậy tổng các phần tử của S là 2.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, (a \neq 0)$ có đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng $e > n$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ bằng

*A. 7.

B. 10.

C. 14.

D. 6.

Lời giải

Ta có $y' = (f(x) - 2x)' \cdot f''(f(x) - 2x) = (f'(x) - 2) \cdot f''(f(x) - 2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) - 2 = 0 \\ f''(f(x) - 2x) = 0 \end{cases}$$

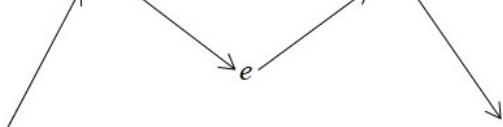
+ $f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2$ có 3 nghiệm.

$$+ f''(f(x) - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) - 2x = m \quad (1) \\ f(x) - 2x = n \quad (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (1): $f(x) - 2x = m (m < 0)$, đặt $g(x) = f(x) - 2x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < m \\ x = 0 \\ x = x_2 > n \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

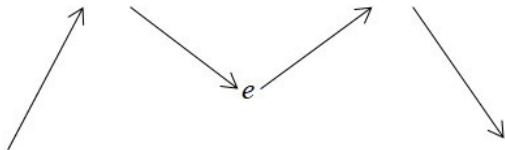
x	$-\infty$	$x_1 < m$		0	$x_2 > n$		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm.

Xét phương trình $(2): f(x) - 2x = n (n < e)$, đặt $h(x) = f(x) - 2x \Rightarrow h'(x) = f'(x) - 2$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < m \\ x = 0 \\ x = x_2 > n \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$x_1 < m$	0	$x_2 > n$	$+\infty$		
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$							

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm.

Vậy hàm số $y = f'(f(x) - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2m}{x+2}$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S bằng

A. 1.

B. 0.

*C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$f'(x) = \frac{2-2m}{(x+2)^2}, \forall x \neq -2$$

Ta có

Nếu $m=1 \Rightarrow f(x)=1, \forall x \neq -2$, khi đó $\max_{[1;3]} |f(x)| = \min_{[1;3]} |f(x)| = 1$

$$= \left| \frac{1+2m}{3} \right| + \left| \frac{3+2m}{5} \right|$$

Nếu $m \neq 1$ ta có $f(x)$ là hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;3]$, $f(1) = \frac{1+2m}{3}, f(3) = \frac{3+2m}{5}$.

+) Nếu $f(1).f(3) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq -\frac{1}{2}$ thì $\min_{[1;3]} |f(x)| = 0, \max_{[1;3]} |f(x)| = f(1)$ hoặc $\max_{[1;3]} |f(x)| = f(3)$. Do

$$\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{1+2m}{3} \right| = 2 \\ \left| \frac{3+2m}{5} \right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{2}, m = -\frac{7}{2} \\ m = \frac{7}{2}, m = -\frac{13}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện xét thì không có giá trị m .

+) Nếu $f(1).f(3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$ thì $\min_{[1;3]} |f(x)| + \max_{[1;3]} |f(x)| = |f(1)| + |f(3)| = \left| \frac{1+2m}{3} \right| + \left| \frac{3+2m}{5} \right|$. Do đó

$$\max_{[1;3]} |f(x)| + \min_{[1;3]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1+2m}{3} \right| + \left| \frac{3+2m}{5} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ \frac{1+2m}{3} + \frac{3+2m}{5} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{11}{4} \\ m = 1 \text{ (loại do } m \neq 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ \frac{1+2m}{3} + \frac{3+2m}{5} = 2 \end{cases}$$

$$m = 1, m = -\frac{11}{4}$$

Vậy S có hai phần tử

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$
y	0	1	0

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ có tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng bằng 3. Chọn kết quả đúng.

A. $0 < m \leq 1$.

B. $0 \leq m \leq 1$.

*C. $0 < m < 1$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f^2(x) - m} = \frac{1}{-m}$ vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Do đó:

Nếu $m = 0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ không có tiệm cận ngang.

Mặt khác phương trình $f^2(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ có một tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{-m}$.

+ $m < 0$: Phương trình $f^2(x) - m = 0$ vô nghiệm vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$$+ m > 0: f^2(x) - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \sqrt{m} \\ f(x) = -\sqrt{m} \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = -\sqrt{m}$ vô nghiệm với $\forall m > 0$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $f(x) = \sqrt{m}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Vậy $0 < m < 1$ thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f^2(x) - m}$ có 3 tiệm cận.

Câu 8. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$ thuộc khoảng nào sau đây?

- *A. $(-2; 2)$ B. $(-\infty; -1)$ C. $(1; 3)$ D. $(0; +\infty)$

Lời giải

Ta có $x^2 - xy + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 3}{x}$ thay vào $2x + 3y - 14 \leq 0$ ta có bất phương trình $2x + 3\frac{x^2 + 3}{x} - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{9}{5}$. Thay $y = \frac{x^2 + 3}{x}$ vào $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$ ta có

$$P = 3x^2 \frac{x^2 + 3}{x} - x \left(\frac{x^2 + 3}{x} \right)^2 - 2x^3 + 2x = 3x(x^2 + 3) - \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{x} - 2x^3 + 2x = \frac{5x^2 - 9}{x}$$

$$P' = \frac{5x^2 + 9}{x^2} > 0, \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]. \text{ Suy ra } P = \frac{5x^2 - 9}{x} \text{ đồng biến trên } \left[1; \frac{9}{5}\right].$$

$$\text{Vậy } \left[\begin{matrix} \text{Max } P = P\left(\frac{9}{5}\right) = 4; \\ \text{Min } P = P(1) = -4 \end{matrix} \right]_{\left[1; \frac{9}{5}\right]}. \text{ Suy ra } \left[\begin{matrix} \text{Max } P + \text{Min } P = 0 \end{matrix} \right]_{\left[1; \frac{9}{5}\right]}.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			5		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 2 5 $-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = [f(2x^2 + x)]^2$ là

- A. 3. B. 4. *C. 2. D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } g'(x) = \left([f(2x^2 + x)]^2 \right)' = 2f(2x^2 + x)(4x + 1)f'(2x^2 + x)$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x^2+x)=0 \\ 4x+1=0 \\ f'(2x^2+x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x=a \quad (a>1) \\ x=-\frac{1}{4} \\ 2x^2+x=1 \\ 2x^2+x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{4} \quad (a>1) \\ x=-\frac{1}{4} \\ x=\frac{1}{2} \\ x=-1 \end{cases}$$

Vì $a > 1$ nên có thứ tự các nghiệm của $g'(x)=0$ là:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+8a}}{4} < x_2 = -1 < x_3 = -\frac{1}{4} < x_4 = \frac{1}{2} < x_5 = \frac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}$$

Vậy $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn như trên suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua các nghiệm đơn.

Với $0 \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ ($0 \in (x_3; x_4)$). Xét $g'(0) = 2 \cdot f(0) \cdot f'(0) > 0$. Suy ra $g'(x) > 0$ trên khoảng $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ hay khoảng $(x_3; x_4)$. Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Ta có hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x) = [f(2x^2+x)]^2$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số $g(x) = [f(2x^2+x)]^2$ có 2 điểm cực đại là $x = x_2 = -1$ và $x = x_4 = \frac{1}{2}$.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (m^2 - m - 6)x^3 + (m - 3)x^2 - 2x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 6.

*B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có $y' = 3(m^2 - m - 6)x^2 + 2(m - 3)x - 2$.

$$m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$$

TH1: Xét

Với $m = 3$ thì $y' = -2 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m = 3$ nhận.

Với $m = -2$ thì $y' = -10x - 2$ suy ra hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $m = -2$ loại.

TH2: Xét $m^2 - m - 6 \neq 0$.

Điều kiện để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $y' \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3(m^2 - m - 6) < 0 \\ \Delta' = (m - 3)^2 - 3(m^2 - m - 6)(-2) \leq 0 \end{cases}$$

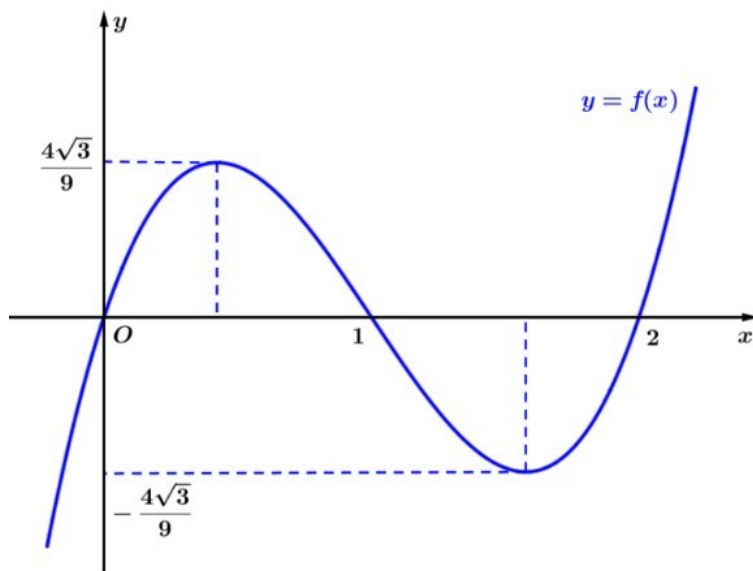
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 3 \\ 7m^2 - 12m - 27 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 3 \\ -\frac{9}{7} \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{7} \leq m < 3$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $m \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của

phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - |x^2-1|\right|\right) = \frac{1}{2021}$ là



A. 24.

B. 14.

C. 12.

*D. 10.

Lời giải

$$y = g(x) = f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - |x^2-1|\right|\right) \quad \text{với} \quad g(x) = \frac{1}{2021}$$

Ta đặt: $t = \sqrt{4-x^2}$, $\forall x \in [-2; 2]$ thì suy ra $y = g(t) = f\left(|t - |t^2-3||\right)$, $\forall t \in [0; 2]$

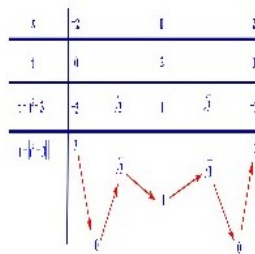
$$h(t) = |t - |t^2-3|| = \begin{cases} t^2 + t - 3, & t \in [0; \sqrt{3}] \\ -t^2 + t + 3, & t \in [\sqrt{3}; 2] \end{cases}$$

Suy ra:

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:

t	0	$\sqrt{3}$	2
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	-3	$\sqrt{3}$	1

Đặt $u = |t - |t^2-3||$ thì ta cũng có BBT của u như sau:



Nhìn vào đồ thị $y = f(x)$ trên ta có được:

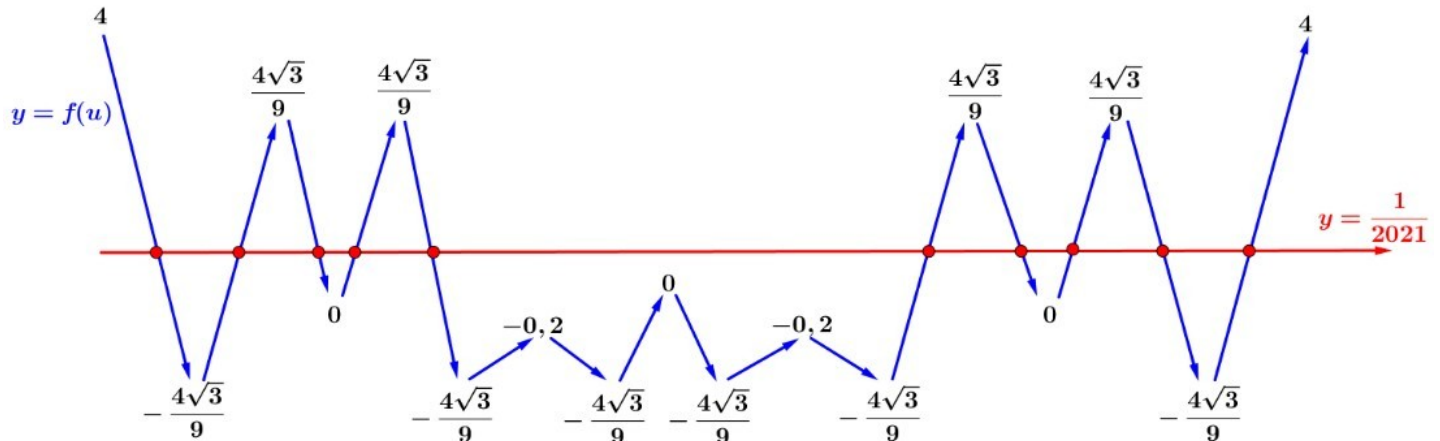
$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx, a \neq 0 \\ f(1) = f(2) = 0, f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3} > 0$$

Như vậy ta suy ra $f(x) = \frac{2}{3}x(x-1)(x-2)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\frac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x = x_0$ nên suy ra $f(x_0) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow x_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

$$f(3) = 4, f(\sqrt{3}) = -0,2, f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

Như vậy:

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y = f(u)$ với $u = |t - |t^2 - 3||$ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x) = \frac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Câu 12. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x^4}[f(x) - 1]^4$ là

A. 6.

B. 7.

*C. 5.

D. 4.

Lời giải

Giả sử $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Từ
$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(\pm 1) = 0 \\ f(\pm 1) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$$
. Suy ra $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Khi đó $y = \frac{1}{x^4} [2x^4 - 4x^2]^4 = 2^4 x^4 (x^2 - 2)^4$. Có $y' = 2^4 \cdot 4x^3 \cdot (x^2 - 2)^3 \cdot (2x - 2)$.

Và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nghiệm bội lẻ); $x = \pm\sqrt{2}$ (nghiệm bội lẻ); $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Do đó, hàm số y có 5 cực trị.

Câu 13. Cho đồ thị $(C): y = \frac{x}{x-1}$. Đường thẳng d đi qua điểm $I(1;1)$, cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B . Khi diện tích tam giác MAB , với $M(0;3)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AB bằng

- A. $\sqrt{6}$. *B. $\sqrt{10}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua điểm $I(1;1)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x-1) + 1$.

Phương trình hoành độ điểm chung của đường thẳng d và đồ thị (C) là: $\frac{x}{x-1} = k(x-1) + 1$

Ta có: $\frac{x}{x-1} = k(x-1) + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ kx^2 - 2kx + k - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Điều này xảy ra khi $\begin{cases} \Delta' = k^2 - k(k-1) > 0 \\ k \cdot 1^2 - 2k \cdot 1 + k - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > 0$.

Với điều kiện đó, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Vi-et: $x_1 + x_2 = 2; x_1 x_2 = \frac{k-1}{k}$

Ta có: $A(x_1; kx_1 - k + 1)$, $B(x_2; kx_2 - k + 1)$ nên:

$$AB = \sqrt{(k^2 + 1)(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(k^2 + 1)[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2]} = \sqrt{(k^2 + 1)(2^2 - 4 \frac{k-1}{k})} = \sqrt{(k^2 + 1) \cdot \frac{4}{k}}$$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ M của tam giác MAB , ta có $MH = d(M, d) = \frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$.

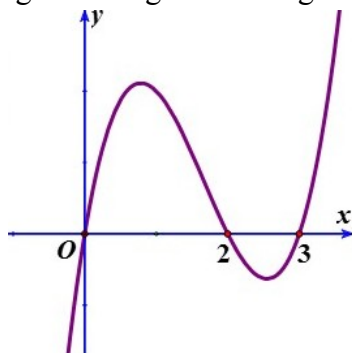
Diện tích tam giác MAB :

$$S = \frac{1}{2} MH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \sqrt{(k^2+1) \cdot \frac{4}{k}} = |k+2| \sqrt{\frac{1}{k}} = \sqrt{\frac{(k+2)^2}{k}} = \sqrt{k + \frac{4}{k} + 4} \geq \sqrt{8}$$

Diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi $k = \frac{4}{k}, k > 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Khi đó $AB = \sqrt{(2^2 + 1) \cdot \frac{4}{2}} = \sqrt{10}$.

Câu 14. Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc 4. Đồ thị của hàm số $y = f'(1-x)$ được cho như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-2; 1)$

B. $(-1; 0)$

C. $(1; 2)$

*D. $(0; 1)$

Lời giải

Đặt $t = 1 - x \Rightarrow f(t) = f(1 - x) \Rightarrow f'(t) = -f'(1 - x)$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow f'(1 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Ta có

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow f'(1 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 1 \\ -2 < t < -1 \end{cases}$$

BBT của $f(t)$

t	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$			
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$								

Mặt khác $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 3)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

Nên

$$f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \\ x^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Ta có

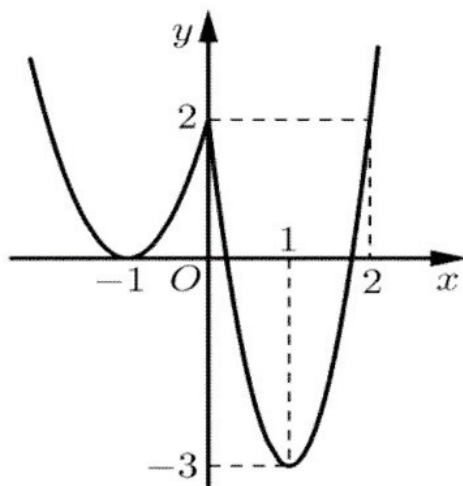
$$f'(x^2 - 3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 > 1 \\ -2 < x^2 - 3 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \\ -\sqrt{2} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x^2-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$ suy ra đáp là **D**.

Câu 15. Cho hai hàm số $u(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x))=m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



A. 1.

B. 4.

*C. 3.

D. 2.

Lời giải

$$t = u(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$$

Đặt

$$u'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3} - \frac{x(x+3)}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} = \frac{3-3x}{\sqrt{x^2+3}(x^2+3)}$$

$$u'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u'(x)$	+	0	-
$u(x)$	-1	2	1

Dựa vào BBT, ta có $u(x) \in (-1; 2]$.

Phương trình $f(u(x))=m$ trở thành $f(t)=m, t \in (-1; 2]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta có:

+ Khi $m=2$: phương trình $f(t)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình $f(u(x))=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

+ Khi $m=1$: phương trình $f(t)=1$ có 3 nghiệm $t_1 \in (-1; 0), t_2 \in (0; 1), t_3 \in (1; 2) \Rightarrow$ phương trình $f(u(x))=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

+ Khi $m \in [0; -1; -2]$: phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm $t_1 \in (0; 1), t_2 \in (1; 2) \Rightarrow$ phương trình $f(u(x)) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

+ Khi $m = -3$: phương trình $f(t) = m$ có 1 nghiệm $t = 1 \Rightarrow$ phương trình $f(u(x)) = m$ có 1 nghiệm.

Vậy $m \in [0; -1; -2]$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)e^x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong $[-2020; 2021]$ để hàm số $g(x) = f(\ln x) - mx^2 + 4mx - 2$ nghịch biến trong $(e; e^{2020})$.

A. 2018.

*B. 2020.

C. 2021.

D. 2019.

Lời giải

Ta có $g'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln x) - 2mx + 4m = \frac{1}{x} (\ln x + 1) e^{\ln x} - 2mx + 4m = \ln x + 1 - 2mx + 4m$

Hàm số nghịch biến trong khoảng $(e; e^{2020})$ khi và chỉ khi $\ln x + 1 - mx + 4m \leq 0, \forall x \in (e; e^{2020})$

$$\Leftrightarrow 2m \geq \frac{\ln x + 1}{x - 2}, \forall x \in (e; e^{2020})$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x - 2}, x \in (e; e^{2020})$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x - 1}{(x-2)^2} = \frac{1 - x \ln x}{x(x-2)^2}, x \in (e; e^{2020})$$

Ta có

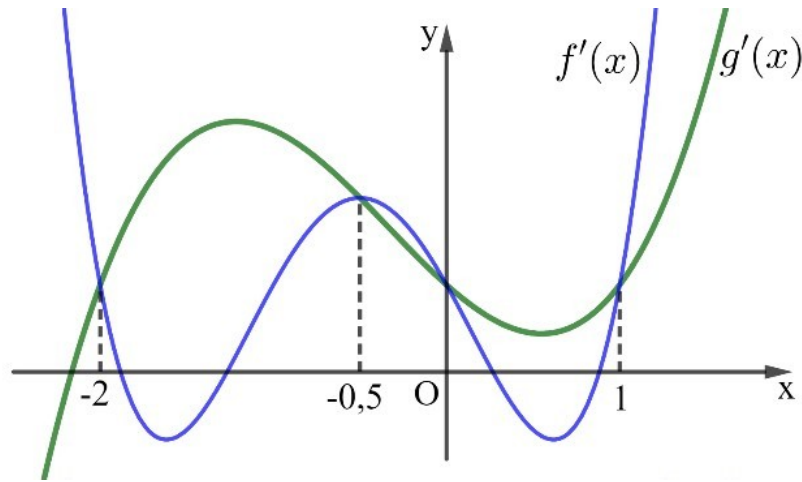
$$g'(x) < 0, \forall x \in (e; e^{2020})$$

BBT

x	e		e^{2020}
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$\frac{2}{e-2}$		

Quan sát bảng biến thiên ta có $2m \geq \frac{2}{e-2} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{e-2} \Rightarrow m \geq 2$. Vậy có 2020 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 17. Cho các hàm số $y = f(x)$; $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị các đạo hàm $f'(x)$; $g'(x)$ (đồ thị hàm số $y = g'(x)$ là đường đậm hơn) như hình vẽ.



Hàm số $h(x) = f(x-1) - g(x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

B. $(1; +\infty)$

C. $(2; +\infty)$

*D. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

Lời giải

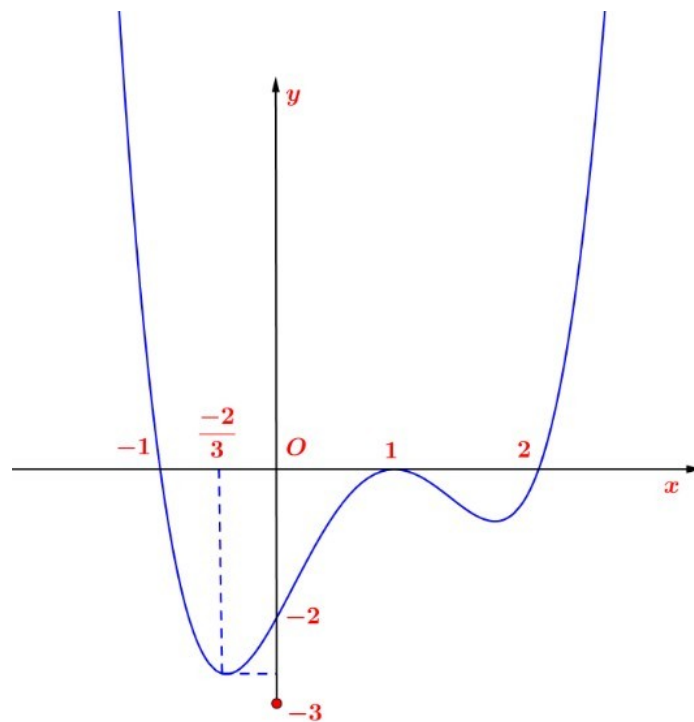
Ta có: $h'(x) = f'(x-1) - g'(x-1)$

Dựa vào hình vẽ ta có hàm số $h(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow h'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x-1) < g'(x-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x-1 < -\frac{1}{2} \\ 0 < x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{1}{2} \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

Do đó hàm số $h(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $(1; 2)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên R và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f(f'(x) - 1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

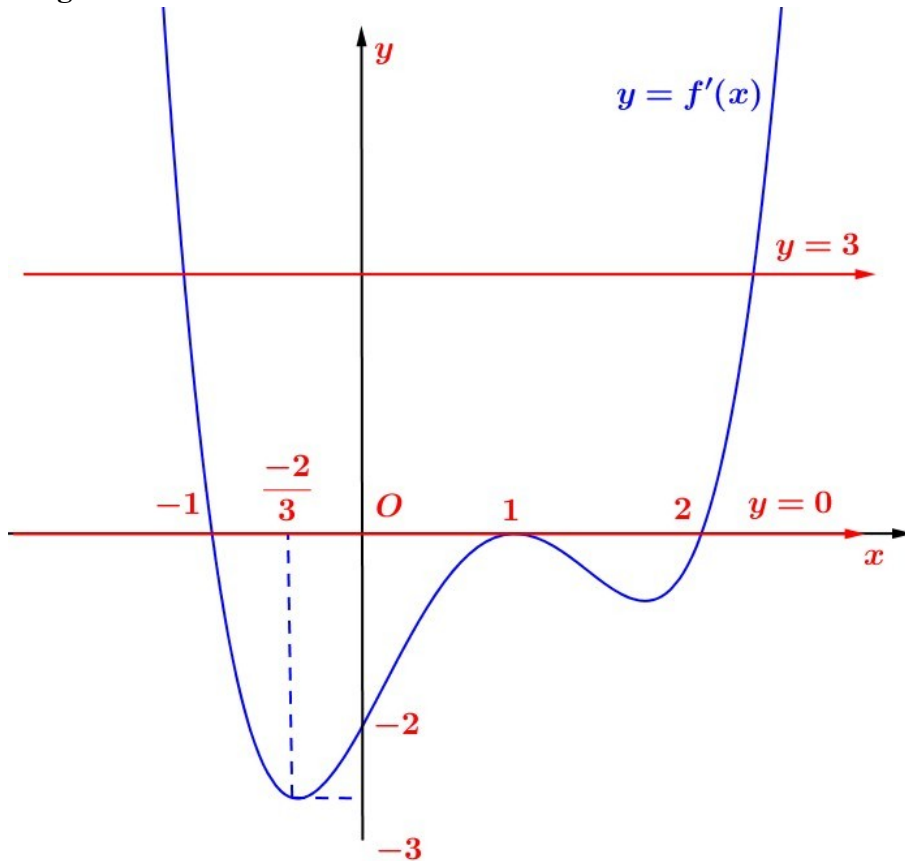
A. 8

B. 6

*C. 10

D. 9

Lời giải



• Ta có: $g(x) = f(f'(x) - 1) \Rightarrow g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x) - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f'(x) - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(x) - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

Phương trình

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{3} \\ x = x_0 \in (1; 2) \end{cases}$$

Ta có đồ thị $y = f'(x)$ có cực trị tại

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 0 \\ f''\left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \\ f''(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = 0 \text{ có 3 nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{3}; x = x_0 \end{cases} \text{ cùng với } x = 1 \text{ là nghiệm bội chẵn}$$

Tại phương trình $f'(x) = 0$ ta thấy có 2 nghiệm bội lẻ $x = -1, x = 2$ và nghiệm bội chẵn $x = 1$

Tại phương trình $f'(x) = 3$ ta thấy có 2 nghiệm mà đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị $y = f'(x)$ đó là hai điểm $x = x_1 \in (-\infty; -1)$ và $x = x_2 \in (2; +\infty)$

Vậy từ đó ta thấy phương trình $g'(x) = 0$ tổng cộng có tất cả 10 nghiệm.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có dấu đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Xét hàm số $g(x) = 12f(x^2) + 2x^6 - 15x^4 + 24x^2 + 2019$. Khẳng định đúng là

*A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-2; -1)$.

C. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$

D. Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu

Lời giải

• Đầu tiên từ BBT trên ta có được: $f'(x) = a(x+1)(x-1)(x-4)$

• Từ đó hàm số trên tương đương với:

$$g(x) = 12f(x^2) + 2x^6 - 15x^4 + 24x^2 + 2019$$

$$\Rightarrow g'(x) = 24xf'(x^2) + 12x^5 - 60x^3 + 48x$$

$$= 12x[(x^2+1)(x^2-1)(x^2-4) + (x^2-1)(x^2-4)]$$

$$= 12x(x^2-1)(x^2-4)(x^2+2)$$

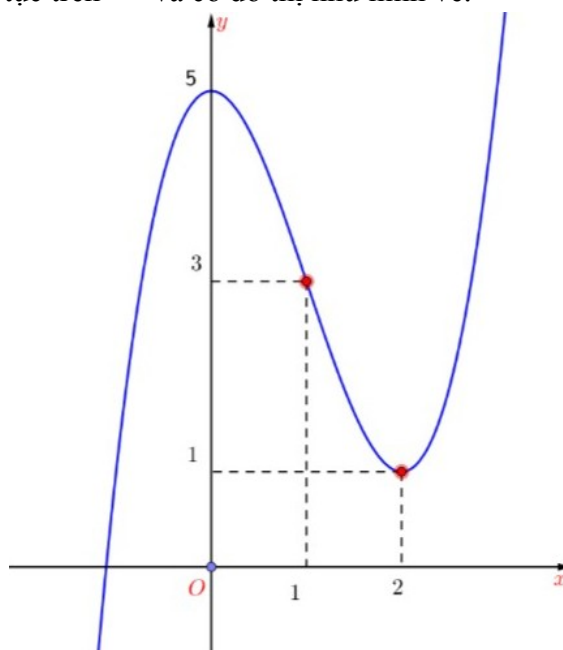
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Cho . Từ đó ta có bảng biến thiên hàm $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$												

Từ BBT ta kết luận A đúng.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| + 2\right) = f\left(\sqrt{(m+2)^2 + 4}\right)$ có nghiệm?

A. 3.

*B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

• Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1$ nên suy ra $2\cos x - \sin x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } t = \frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} \Rightarrow t(2\cos x - \sin x + 4) = 3\sin x - \cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -(4t+1)$$

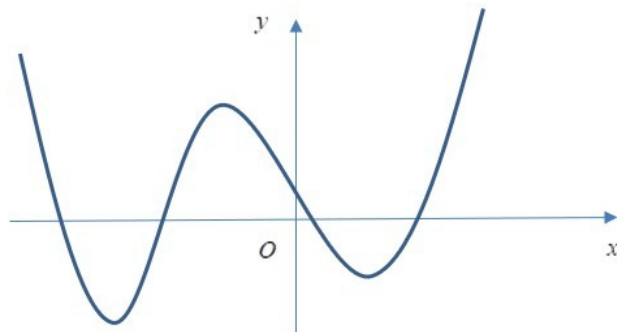
$$\text{Phương trình trên có nghiệm khi } (2t+1)^2 + (t+3)^2 \geq (4t+1)^2 \Leftrightarrow \frac{-9}{11} \leq t \leq 1 \Rightarrow 2 \leq |t| + 2 \leq 3$$

Nhìn vào hình trên ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[2;3]$ nên phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| + 2\right) = f\left(\sqrt{(m+2)^2 + 4}\right)$ hay phương trình $f(|t|+2) = f\left(\sqrt{(m+2)^2 + 4}\right)$ có nghiệm khi

và chỉ khi phương trình $|t|+2 = \sqrt{(m+2)^2 + 4}$ có nghiệm t thỏa mãn điều kiện $2 \leq |t|+2 \leq 3$
 $\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{(m+2)^2 + 4} \leq 3 \Rightarrow m^2 + 4m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} \leq m \leq 2 + \sqrt{5}$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có tất cả 5 giá trị m thỏa mãn.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hai hàm số $y = f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2$ và $y = 2021^x$. Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là



A. 1

*B. 0

C. 2

D. 4

Lời giải

Số giao điểm (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình

$$f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2 = 2021^x (*)$$

Từ đồ thị ta thấy $f(x)$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2; x_3; x_4$

nên phương trình $f(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$

$$\Rightarrow f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$$

Nếu thay vào $(*)$ ta thấy vế trái âm, vế phải dương nên phương trình $(*)$ vô nghiệm

Nếu $f(x) \neq 0$ nên ta có phương trình ta có phương trình (*) tương đương với

$$\frac{f''(x) \cdot f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = \frac{2021^x}{[f(x)]^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{2021^x}{[f(x)]^2}$$

Ta có:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$\Rightarrow f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \left[\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right]$$

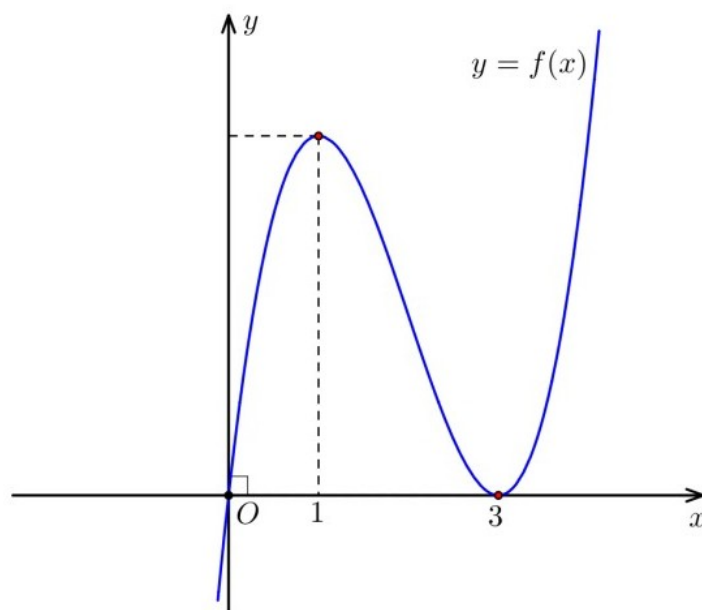
$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \left[\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right] \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4}$$

Khi đó: $\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right)'$

$$= - \left(\frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \frac{1}{(x - x_3)^2} + \frac{1}{(x - x_4)^2} \right) < 0$$

Mà $\frac{2021^x}{[f(x)]^2} > 0$ nên phương trình $\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{2020^x}{[f(x)]^2}$ vô nghiệm, do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 cực trị.

A. $m \geq \frac{1}{4}$.

B. $m \leq 1$.

C. $m < 1$.

*D. $m > \frac{1}{4}$.

Lời giải

Xét $g(x) = f^2(x) + f(x) + m \Rightarrow g'(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Ta có: $f'(x)=0 \Rightarrow$ có hai nghiệm là $x=0; x=3$ và $f(x)=-\frac{1}{2} \Rightarrow$ có một nghiệm là $x=a < 0$ nên hàm số $g(x)$ có ba cực trị. Do đó để đồ thị hàm số $h(x)=|f^2(x)+f(x)+m|$ có đúng 3 cực trị thì phương trình $f^2(x)+f(x)+m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Câu 23. Cho hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và $g(x)=x+\frac{4}{x^2}$. Trên đoạn $[1;4]$, hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có cùng giá trị nhỏ nhất và đạt tại cùng một điểm. Biết rằng điểm $A(1;4)$ thuộc đồ thị của hàm số $f(x)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;4]$.

- A. $\max_{[1;4]} f(x)=9$ B. $\max_{[1;4]} f(x)=23$ *C. $\max_{[1;4]} f(x)=11$ D. $\max_{[1;4]} f(x)=19$

Lời giải

Ta có: $f'(x)=3x^2+2ax+b; g'(x)=1-\frac{8}{x^3}$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{8}{x^3}=0 \Leftrightarrow x=2$

Ta có: $g(1)=5; g(2)=3; g(4)=\frac{17}{4} \Rightarrow \min_{[1;4]} g(x)=3$ tại $x=2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(2)=0 \\ -\frac{2a}{6}=2 \\ f(2)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12+4a+b=0 \\ a=-6 \\ 8+4a+2b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=12 \\ c=-5 \end{cases}$$

Khi đó, $f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow \max_{[1;4]} f(x)=f(4)=11$

Câu 24. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y=x^2+2x+2$ và điểm M di chuyển trên (P) . Gọi $(d_1), (d_2)$ là các đường thẳng đi qua M sao cho (d_1) song song với trục tung và $(d_1), (d_2)$ đối xứng nhau qua tiếp tuyến của (P) tại M . Biết rằng khi M di chuyển trên (P) thì (d_2) luôn đi qua một điểm cố định $I(a;b)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $3a+2b=0$ B. $a+b=0$ C. $ab=-1$ *D. $5a+4b=0$

Lời giải

Gọi $M(m; m^2+2m+2)$

Vì (d_1) đi qua M và song song với trục tung nên (d_1) có phương trình: $x=m$.

Gọi Δ là tiếp tuyến của (P) tại M , ta có phương trình của Δ : $y=(2m+2)(x-m)+m^2+2m+2$
 $\Leftrightarrow (2m+2)x-y-m^2+2=0$

Gọi $A=\Delta \cap Oy \Rightarrow A(0; 2-m^2)$

Gọi d đi qua A và vuông góc với Δ , ta có phương trình của d : $x+(2m+2)y-(2m+2)(2-m^2)=0$

$$B = d \cap d_1 \Rightarrow B \left(m; \frac{(2m+2)(2-m^2)-m}{2m+2} \right)$$

Gọi

Gọi C đối xứng B qua $\Delta \Rightarrow A$ là trung điểm đoạn BC .

$$C \left(-m; \frac{-2m^3 - 2m^2 + 5m + 4}{2m+2} \right)$$

Suy ra

Đường thẳng (d_2) đối xứng với (d_1) qua Δ nên (d_2) đi qua M và C .

$$\overrightarrow{CM} = \left(2m; \frac{4m^3 + 8m^2 + 3m}{2m+2} \right), \text{ chọn } u = (4m+4; 4m^2 + 8m + 3) \text{ là một vectơ chỉ phương của } d_2.$$

Suy ra vectơ pháp tuyến của d_2 là $n = (4m^2 + 8m + 3; -4m - 4)$

Suy ra phương trình (d_2) : $(4m^2 + 8m + 3)(x - m) + (-4m - 4)(y - m^2 - 2m - 2) = 0$

$$\text{Ta có: } (4m^2 + 8m + 3)(x - m) + (-4m - 4)(y - m^2 - 2m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)4m^2 + (8x - 4y + 13)m + 3x - 4y + 8 = 0$$

. Phương trình này nghiệm đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$ khi và chỉ

$$\begin{cases} x+1=0 \\ 8x-4y+13=0 \\ 3x-4y+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{5}{4} \end{cases}$$

khi

Suy ra đường thẳng d_2 luôn đi qua điểm cố định $I \left(-1; \frac{5}{4} \right) \Rightarrow a = -1; b = \frac{5}{4}$.

Suy ra $5a + 4b = 0$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	2	-3	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f(x^2 - 4x) = m + 5$ có ít nhất 5 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$ là

A. 12.

B. 14.

*C. 11.

D. 13.

Lời giải

• Ta có: $3f(x^2 - 4x) = m + 5 \Leftrightarrow f(x^2 - 4x) = \frac{m+5}{3}$

• Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x)$, ta có: $g'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (2x-4)f'(x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ f'(x^2-4x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2-\sqrt{2} \\ x=2+\sqrt{2} \\ x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

• Xét

• Trong đó, nghiệm $x=2$ là nghiệm bội ba.

• Ta có: $g(2-\sqrt{2})=g(2+\sqrt{2})=f(-2)=2$; $g(0)=-3$; $g(2)=f(-4)=-2$.

• Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	$2-\sqrt{2}$	2	$2+\sqrt{2}$	4	$+\infty$						
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$					
$g(x)$	$+\infty$		-3		2		-2		2		-3		$+\infty$

• Để phương trình $3f(x^2-4x)=m+5$ có ít nhất 5 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$ thì $-2 < \frac{m+5}{3} < 2 \Leftrightarrow -11 < m < 1$.

Câu 26.

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu

của đạo hàm như sau:

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $-10 < m < 10$ và hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 5.

B. 4.

*C. 6

D. 1.

Lời giải

Xét $y=g(x)=f(x^2+2x+m)$

Ta có: $y'=g'(x)=2(x+1)f'(x^2+2x+m)$

Vì $x+1 > 0 \forall x \in (0;1)$ nên để hàm số $y=f(x^2+2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f'(x^2+2x+m) > 0 \forall x \in (0;1)$, do hàm số x^2+2x+m luôn đồng biến trên $(0;1)$ nên

Đặt $t=x^2+2x+m$. Vì $x \in (0;1)$ nên $t \in (m;m+3)$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\begin{cases} m+3 \leq -2 \\ m \geq 0 \\ m+3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -5 \\ m = 0 \end{cases}$

Mà $-10 < m < 10$ nên $m = \{-9; -8; -7; -6; -5; 0\}$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 27. Có bao nhiêu giá trị thực của m để hàm số $y = mx^9 + (m^2 - 3m + 2)x^6 + (2m^3 - m^2 - m)x^4 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số.

*B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $y' = 9mx^8 + 6(m^2 - 3m + 2)x^5 + 4(2m^3 - m^2 - m)x^3$
 $= x^3(9mx^5 + 6(m^2 - 3m + 2)x^2 + 4(2m^3 - m^2 - m))$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác ta thấy $y' = 0$ có nghiệm bội lẻ $x = 0$, do đó để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $9mx^5 + 6(m^2 - 3m + 2)x^2 + 4(2m^3 - m^2 - m) = 0$ có nghiệm $x = 0$

$$\Rightarrow 2m^3 - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{2} \\ m = 0 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $m = 0 \Rightarrow y' = 12x^5$ (không thỏa mãn).

Với $m = 1 \Rightarrow y' = 9x^8 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn).

Với $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y' = -\frac{9}{2}x^8 + \frac{45}{2}x^5$ (không thỏa mãn).

Vậy có 1 giá trị của m .

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{5}m^2x^5 - \frac{8}{3}mx^3 - (m^2 - m - 20)x + 1$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 7.

*B. 9.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \frac{2}{5}m^2x^5 - \frac{8}{3}mx^3 - (m^2 - m - 20)x + 1$
 $\Rightarrow f'(x) = 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m^2x^4 - 8mx^2 - m^2 + m + 20 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta có: $2m^2t^2 - 8mt - m^2 + m + 20 \geq 0 (*)$, $\forall t \geq 0$ nên ta có các trường hợp sau:

+) TH1: $m = 0$: khi đó bpt $(*)$ trở thành $20 \geq 0$ (đúng $\forall t \geq 0$)

Nên $m = 0$ thỏa mãn.

+) TH2: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 64m^2 + 8m^4 - 8m^3 - 160m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m - 12 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3 \leq m \leq 4 \end{cases}$

+) TH3: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 64m^2 + 8m^4 - 8m^3 - 160m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < -3 \end{cases}$

Khi đó: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $2m^2t^2 - 8mt - m^2 + m + 20 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn

$$t_1 < t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$$

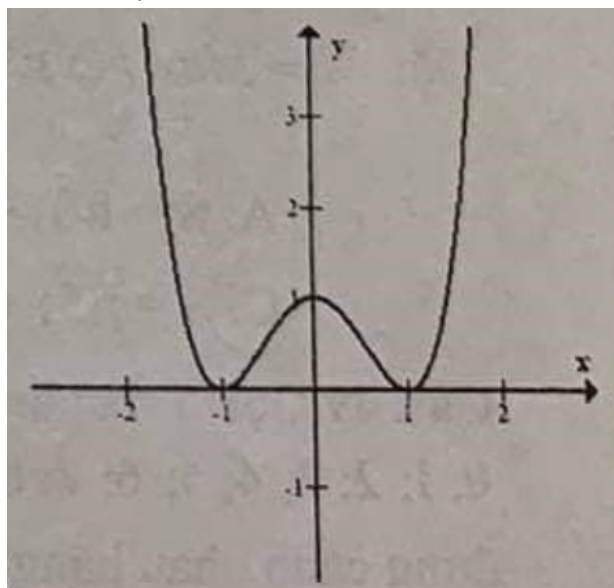
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{m} < 0 \\ \frac{-m^2 + m + 20}{2m^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -m^2 + m + 20 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -4 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 0$$

Kết hợp điều kiện ta có: $-4 \leq m < -3$

Vậy để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} -3 \leq m \leq 4 \\ -4 \leq m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thực của bất phương trình $\sqrt{2f^2(x^3 - 3x^2 + 4) + 8} \leq f(x^3 - 3x^2 + 4) + 2$ là

A. 6.

*B. 4.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải

Đặt $t = f(x^3 - 3x^2 + 4)$

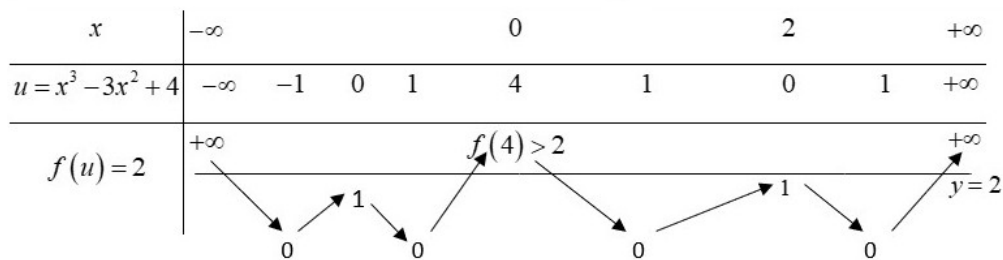
$$\text{BPT} \Leftrightarrow \sqrt{2t^2 + 8} \leq t + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + 2 \geq 0 \\ 2t^2 + 8 \leq t^2 + 4t + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -2 \\ t = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

Với $t = 2$ thì $f(x^3 - 3x^2 + 4) = 2$

Sử dụng phương pháp ghép trục ta có BBT:



Vậy bất phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 30. Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2021$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt?

- *A. 4037. B. 2019. C. 4001. D. 2021.

Lời giải

Ta có $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Do hàm số có 2 điểm cực trị là: $x_1 = 1$ và $x_2 = 2021$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = 2022 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3033a \\ c = 6063a \end{cases}$$

Nên:

Xét phương trình: $f(x) = f(m)$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = am^3 + bm^2 + cm + d$$

$$\Leftrightarrow a(x^3 - m^3) + b(x^2 - m^2) + c(x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x^3 - m^3) - 3033a(x^2 - m^2) + 6063(x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - m)(x^2 + mx + m^2 - 3033x - 3033m + 6063) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 0 \\ x^2 + mx + m^2 - 3033x - 3033m + 6063 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để phương trình $f(x) = f(m)$ có 3 nghiệm phân biệt thì pt(*) có 2 nghiệm phân biệt khác m .

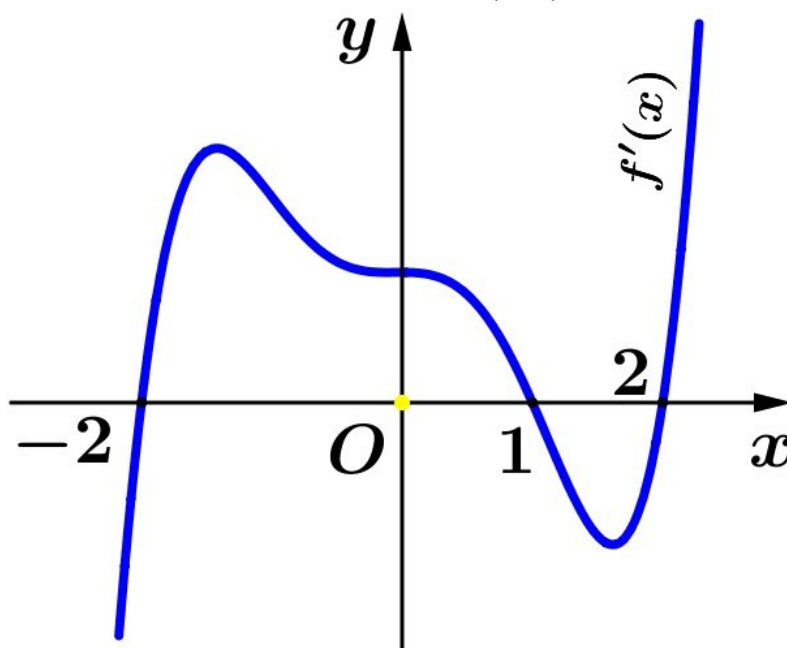
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 3033)^2 - 4(m^2 - 3033m + 6063) > 0 \\ m^2 + (m - 3033)m + m^2 - 3033m + 6063 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6063m + 3033^2 - 4m^2 + 4 \cdot 3033m - 4 \cdot 6063 > 0 \\ m^2 + (m - 3033)m + m^2 - 3033m + 6063 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1009 < m < 3031 \\ m \neq 2021; m \neq 1 \end{cases}$$

Vậy: $m \in (-1009; 3031) \setminus \{1; 2021\}$ có 4037 giá trị m nguyên.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(-2) < f(2) = 0$, đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Hàm số $g(x) = \left| f(x) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



*A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

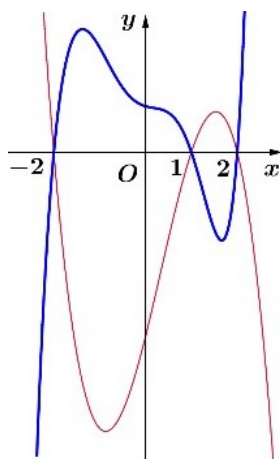
Lời giải

Xét hàm số $h(x) = f(x) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$

Ta có $h'(x) = f'(x) + x^3 - x^2 - 4x + 4 = f'(x) - (1-x)(x^2 - 4)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (1-x)(x^2 - 4)$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = (1-x)(x^2 - 4)$ lên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị $f'(x)$ thì hai đồ thị này cắt nhau tại 3 điểm $x = 1; x = \pm 2$



Mà $h(-2) = f(-2) - \frac{28}{3} < 0$, (do $f(-2) < 0$); $h(1) = f(1) + \frac{23}{12}$,

$h(2) = f(2) + \frac{2}{3} > 0$, do $f(2) = 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$							$+\infty$

The graph shows a function $h(x)$ plotted against x . The function has a W-shape, with local maxima at $x = -2$ and $x = 2$, and local minima at $x = 1$ and $x = 0$. The function crosses the horizontal line $y = 0$ at $x = -2$, $x = 1$, and $x = 2$. The horizontal line is labeled $y = 0$ in red.

Từ bảng biến thiên suy đồ thị hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị và cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên đồ thị hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 cực trị.

Câu 32. Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$		3		-1		3	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \frac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$ là

A. 7.

B. 4.

*C. 5.

D. 6.

Lời giải

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$
 $\Rightarrow f'(x)$ có dạng $f'(x) = kx(x-1)(x+1) = k(x^3 - x)$, với $k \in \mathbb{R}$ và $k \neq 0$

$\Rightarrow f(x) = k \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C \right)$, C là một hằng số

Mà đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua $(1; 3)$ và $(0; -1) \Rightarrow \begin{cases} k \left(-\frac{1}{4} + C \right) = 3 \\ kC = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -16 \\ C = \frac{1}{16} \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = -16 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16} \right) = -4x^4 + 8x^2 - 1$

$\Rightarrow f(x+1) = -4(x+1)^4 + 8(x+1)^2 - 1$

$$\Rightarrow f(x+1) = -4(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + 8(x^2 + 2x + 1) - 1$$

$$\Rightarrow f(x+1) = -4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 3 \Rightarrow f'(x+1) = -16x^3 - 48x^2 - 32x$$

$$g'(x) = \frac{4(x-2)^3 [f(x+1)]^3 - (x-2)^4 \cdot 3[f(x+1)]^2 \cdot f'(x+1)}{[f(x+1)]^6}$$

Ta có:

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{4(x-2)^3 f(x+1) - 3(x-2)^4 f'(x+1)}{[f(x+1)]^4} = \frac{(x-2)^3 [4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1)]}{[f(x+1)]^4}$$

Do đó: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ 4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1) = 0 \end{cases}$

Phương trình: $4f(x+1) - 3(x-2)f'(x+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 4(-4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 3) - 3(x-2)(-16x^3 - 48x^2 - 32x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 - 3(-16x^4 - 16x^3 + 64x^2 + 64x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x^4 - 64x^3 - 64x^2 + 12 + 48x^4 + 48x^3 - 192x^2 - 192x = 0$$

$$\Leftrightarrow 32x^4 - 16x^3 - 256x^2 - 192x + 12 = 0 \Leftrightarrow 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3 = 0$$

Xét hàm số $h(x) = 8x^4 - 4x^3 - 64x^2 - 48x + 3$

Ta có: $h'(x) = 32x^3 - 48x^2 - 128x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \end{cases}$ với $x_1 < -1 < 0 < x_2 < 1 < 2 < x_3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	-1	0	x_2	1	x_3	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$h(x_1)$	-1	3	$h(x_2)$	-105	$h(x_3)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $h(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

Mà $h(2) = -233 \Rightarrow x = 2$ không là nghiệm của phương trình $h(x) = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

$$g(x) = \frac{(x-2)^4}{[f(x+1)]^3}$$

Vậy hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 33. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = 2(m+1)x^3 + 3(m^2 - 5m - 4)x^2 - 6(3m^2 - 6m - 19)x - 32\sqrt{(x+1)^3} + 1$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. Số phần tử của tập hợp S là

- A. 3. B. 0. C. 1. *D. 2.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 6 \left[(m+1)x^2 + (m^2 - 5m - 4)x - 8\sqrt{x+1} - 3m^2 + 6m + 19 \right]$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

$$(m+1)x^2 + (m^2 - 5m - 4)x - 8\sqrt{x+1} - 3m^2 + 6m + 19 \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow [x-3] \cdot \left[(m+1)x + m^2 - 2m - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot g(x) \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

$$g(x) = (m+1)x + m^2 - 2m - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2}$$

Với

$$g(3) = 0 \Leftrightarrow 3(m+1) + m^2 - 2m - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Đk cần:

ĐK đủ:

$$f'(x) = (x-3) \left(x - 1 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2} \right) =$$

Với $m = 0$

ta

có

$$(x-3) \left[(x-3) + \left(2 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2} \right) \right] = (x-3) \left[(x-3) + \frac{2(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}+2} \right]$$

$$= (x-3)^2 \left[1 + \frac{2}{(\sqrt{x+1}+2)^2} \right] \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

$\Rightarrow m = 0$ thỏa mãn

$$f'(x) = (x-3) \left(2 - \frac{8}{\sqrt{x+1}+2} \right) = (x-3) \cdot \frac{2(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{2(x-3)^2}{(\sqrt{x+1}+2)^2} \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$$

Với $m = -1$ ta có

$\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn.

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx - c \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ với a, b, c là các số thực dương, biết $f(1) = -3, f(5) = 2$. Xét hàm số $g(t) = |3f(3-2t) + 2f(3t-2) + m|$, gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho $\max_{t \in [-1;1]} g(t) = 10$. Số phần tử của S là

- A. 1. *B. 2. C. 3. D. 4

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = ax^3 + bx - c \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$f(-x) = -ax^3 - bx - c \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = -ax^3 - bx - c \ln \left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \right)$$

Ta có

$$= -ax^3 - bx + c \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x), \text{ suy ra } f(x) \text{ là hàm số lẻ } \Rightarrow f(-5) = -f(5)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + b - \frac{c}{\sqrt{1+x^2}}$$

Mặt khác ta lại có:

Xét hàm số $h(t) = 3f(3-2t) + 2f(3t-2) + m$, có $h'(x) = -6f'(3-2t) + 6f'(3t-2)$

$$h'(t) = 6[f'(3t-2) - f'(3-2t)] = 6 \left[3a[(3t-2)^2 - (3-2t)^2] + c \left[\frac{1}{\sqrt{1+(3-2t)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+(3t-2)^2}} \right] \right]$$

$$= 6(\sqrt{1+(3t-2)^2} - \sqrt{1+(3-2t)^2}) \left[3a(\sqrt{1+(3t-2)^2} + \sqrt{1+(3-2t)^2}) + c \right]$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+(3t-2)^2} - \sqrt{1+(3-2t)^2} = 0 \Leftrightarrow (3t-2)^2 = (3-2t)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-2 = 3-2t \\ 3t-2 = 2t-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}$$

Do $h(1) = 3f(1) + 2f(1) = 5f(1) = -15$; $h(-1) = 3f(5) + 2f(-5) = f(5) = 2$

Do đó $A = \max_{[-1;1]} g(t) = m+2$, $B = \min_{[-1;1]} g(t) = m-15$

Ta có $\max_{[-1;1]} g(t) = \max\{|m-15|, |m+2|\}$

Trường hợp 1:

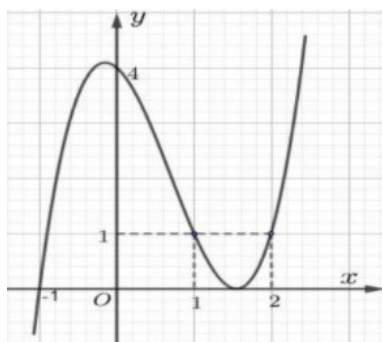
$$\begin{cases} |m-15| \geq |m+2| \\ \max_{[-1;1]} g(t) = |m-15| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-15| \geq |m+2| \\ |m-15| = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m=5$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m+2| > |m-15| \\ \max_{[-1;1]} g(t) = |m+2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| > |m-15| \\ |m+2| = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m=8$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m=5, m=8$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm trên khoảng $(-\pi; 4\pi)$ của phương trình $f(2|\cos 2x|) = 1$ là



A. 48.

*B. 29.

C. 31.

D. 40.

Lời giải

Đặt $t = 2|\cos 2x|$

Vì $x \in (-\pi; 4\pi)$ nên $t \in [0; 2]$

Phương trình trở thành: $f(t) = 1$.

Từ đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f(t) = 1$ có các nghiệm thuộc $[0; 2]$ là $\begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$.

$$t=1 \Leftrightarrow |\cos 2x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pm\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pm\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Với

$$x \in (-\pi; 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} -\pi < \frac{\pi}{6} + k\pi < 4\pi \\ -\pi < -\frac{\pi}{6} + k\pi < 4\pi \\ -\pi < \frac{\pi}{3} + k\pi < 4\pi \\ -\pi < -\frac{\pi}{3} + k\pi < 4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6} < k < \frac{23}{6} \\ -\frac{5}{6} < k < \frac{25}{6} \\ -\frac{4}{3} < k < \frac{11}{3} \\ -\frac{2}{3} < k < \frac{13}{3} \end{cases}$$

Vì

$\Rightarrow$ phương trình có 20 nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; 4\pi)$.

$$t=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Với

$$x \in (-\pi; 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} -\pi < k\pi < 4\pi \\ -\pi < \frac{\pi}{2} + k\pi < 4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 4 \\ -\frac{3}{2} < k < \frac{7}{2} \end{cases}$$

Vì

$\Rightarrow$ phương trình có 9 nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; 4\pi)$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 29 nghiệm.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$						

Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(f(x+1)-4)\sqrt{x^2-4}}$ là

A. 5.

B. 2.

C. 3.

*D. 4.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ f(x+1) \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \vee x > 2 \\ f(x+1) \neq 4 \end{cases}$$

$$f(x+1)=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\alpha \in (-1;1) \\ x+1=2 \\ x+1=\beta \in (4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha-1 \in (-2;0) \\ x=1 \\ x=\beta-1 \in (3;+\infty) \end{cases} \begin{matrix} (l) \\ (l) \\ (n) \end{matrix}$$

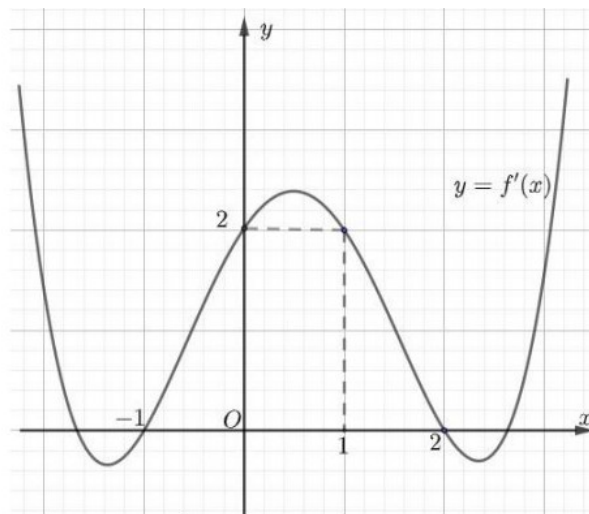
Xét

Khi đó:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (\beta-1)^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (\beta-1)^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số tham số m nguyên thuộc đoạn $[-20; 20]$ để hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$ biết $g(x) = 3f(-x^3 - 3x + m) + (x^3 + 3x - m)^2(-2x^3 - 6x + 2m - 6)$



*A. 23.

B. 21.

C. 5.

D. 17.

Lời giải

$$\begin{aligned} g(x) &= 3f(-x^3 - 3x + m) + 2(-x^3 - 3x + m)^2(-x^3 - 3x + m - 3) \\ &= 3f(-x^3 - 3x + m) + 2(-x^3 - 3x + m)^3 - 6(-x^3 - 3x + m)^2 \end{aligned}$$

Ta có

$$g'(x) = -9(x^2 + 1)f'(-x^3 - 3x + m) - 18(x^2 + 1)(-x^3 - 3x + m)^2 + 36(x^2 + 1)(-x^3 - 3x + m)$$

Để hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$

$$g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (-1; 2) \Leftrightarrow f'(-x^3 - 3x + m) + 2(-x^3 - 3x + m)^2 - 4(-x^3 - 3x + m) \geq 0 \quad \forall x \in (-1; 2)$$

$$\Leftrightarrow f'(-x^3 - 3x + m) \geq -2(-x^3 - 3x + m)^2 + 4(-x^3 - 3x + m) \quad \forall x \in (-1; 2)$$

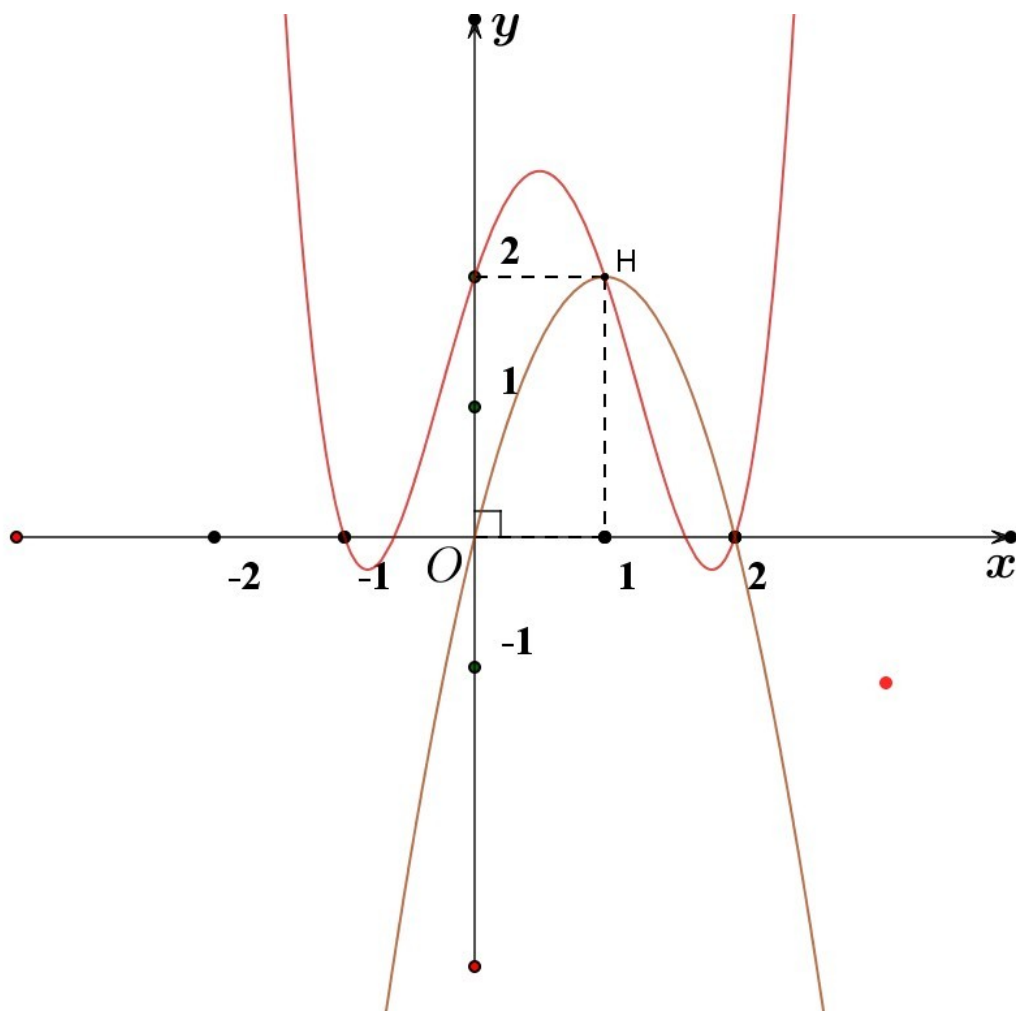
Đặt

$$t = -x^3 - 3x + m. \text{ Với } x \in (-1; 2)$$

$$t' = -3x^2 - 3 < 0 \quad \forall x \in (-1; 2) \Rightarrow t \in (m - 14; m + 4)$$

Xét bất phương trình (1) $f'(t) \geq -2t^2 + 4t$ (1)

Đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = -2t^2 + 4t$ trên cùng hệ trục tọa độ

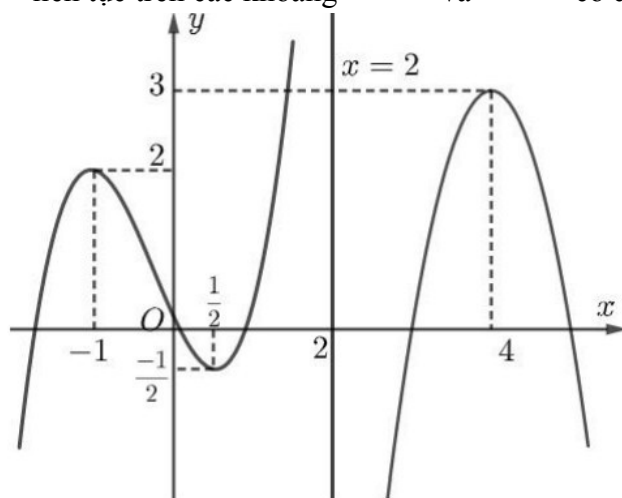


$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (m-14, m+4) \\ t \leq 1 \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (m-14, m+4) \\ t \leq 1 \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+4 \leq 1 \\ m-14 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 16 \end{cases}$$

Để (I) luôn đúng

Do $m \in [-20; 20]$ nên số giá trị của m là $(-3+20)+1+(20-16)+1=23$

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|2x-1|+2)$ là

A. 5.

B. 4.

*C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$g(x) = f(|2x-1|+2) \Rightarrow g'(x) = \frac{2(2x-1)}{|2x-1|} f'(|2x-1|+2)$$

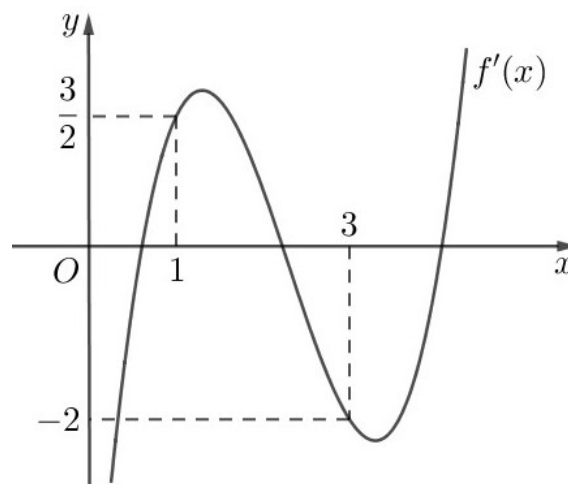
Ta có

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|2x-1|+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1|+2 = -1 (VN) \\ |2x-1|+2 = \frac{1}{2} (VN) \Leftrightarrow |2x-1|+2 = 4 \\ |2x-1|+2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |2x-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 2 \\ 2x-1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$g'(x)$ không xác định tại $x = \frac{1}{2}$ và $g'(x)$ đổi dấu tại $x = \frac{1}{2}$, nhưng tại $x = \frac{1}{2}$ thì $g(x)$ không xác định (vì $f(x)$ kxd tại $x=2$). Vậy hàm số có 2 điểm cực trị là $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$.

Câu 39. Cho hàm đa thức bậc bốn $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x^4) - 2x^3 + 1$ là

A. 3.

B. 6.

*C. 4.

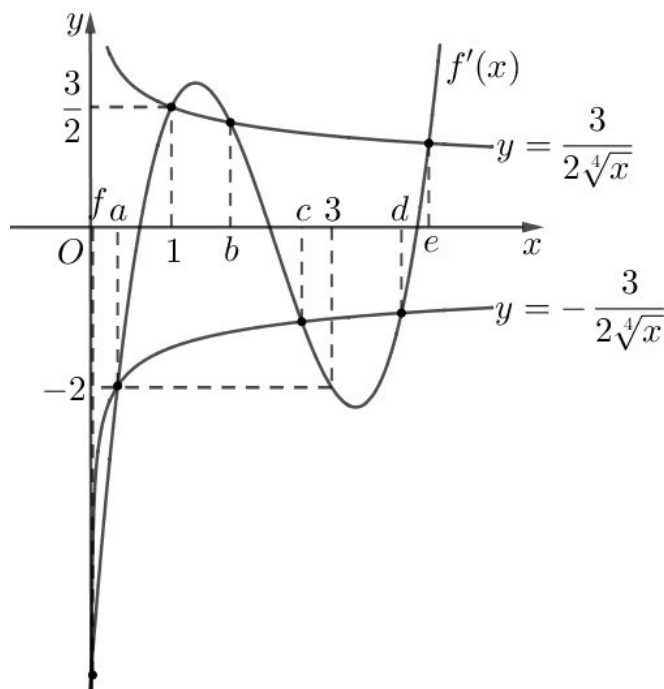
D. 5.

Lời giải

Ta có: $g(x) = f(x^4) - 2x^3 + 1 \Rightarrow g'(x) = 4x^3 \cdot f'(x^4) - 6x^2 = 2x^2 \cdot [2x \cdot f'(x^4) - 3]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ f'(x^4) = \frac{3}{2x} \end{cases} \quad (*)$$

Xét



$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^4) = -\frac{3}{2\sqrt[4]{x^4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 = f \vee x^4 = a \vee x^4 = c \vee x^4 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[4]{f} \\ x = -\sqrt[4]{a} \\ x = -\sqrt[4]{c} \\ x = -\sqrt[4]{d} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^4) = \frac{3}{2\sqrt[4]{x^4}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 = 1 \vee x^4 = b \vee x^4 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt[4]{b} \\ x = \sqrt[4]{e} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt[4]{d}$	$-\sqrt[4]{c}$	$-\sqrt[4]{a}$	$-\sqrt[4]{f}$	0	1	$\sqrt[4]{b}$	$\sqrt[4]{e}$	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$												

Vậy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực tiểu.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2+2mx+m+1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 6.

B. 7.

*C. 9.

D. 8.

Lời giải

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị dương, hay phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x^2+2mx+m+1) = 0$ có đúng 2 nghiệm bội lẻ dương.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 + 2mx + m + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có

Xét các trường hợp

+ Trường hợp (*) có 1 nghiệm dương khác 1 và 1 nghiệm bằng 0, hay $\begin{cases} m+1=0 \\ -2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$.

+ Trường hợp (*) có hai nghiệm trái dấu, trong đó nghiệm dương khác 1, hay $\begin{cases} 1+2m+m+1 \neq 0 \\ m+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{2}{3} \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$.

Vậy với $m \leq -1$ thì $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Vì $m > -10$ nên $m \in [-9; -8; \dots; -1]$, có 9 giá trị.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 4x - 2$. Gọi S là tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = g(x) = |f^2(x) - 2f(x) + m|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 15. Tổng S thuộc khoảng nào sau đây?

- *A. $(-25; -15)$. B. $(-14; 1)$. C. $(1; 8)$. D. $(8; 12)$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 4x - 2$ có $f'(x) = 4x - 4; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = -4$

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) - 2f(x) + m$ có $h'(x) = 2f'(x)[f(x) - 1]$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

Với $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow h(1) = m + 24$

Với $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \pm a$, với $a > 0 \Rightarrow h(1 \pm a) = m - 1$

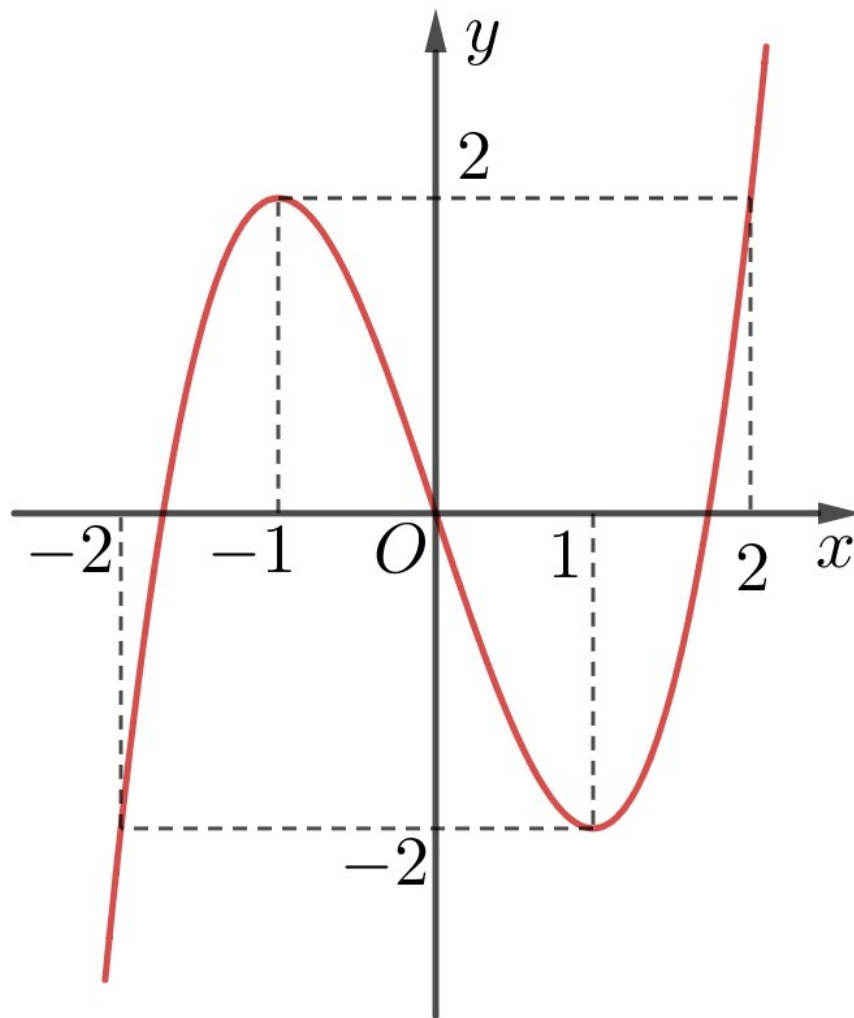
Tại $x = -1 \Rightarrow h(-1) = m + 8$; tại $x = 3 \Rightarrow h(3) = m + 8$

Khi đó $B = \max_{[-1; 3]} h(x) = m + 24; b = \min_{[-1; 3]} h(x) = m - 1$.

$$\text{Mà } \max_{[-1; 3]} g(x) = 15 \Leftrightarrow \frac{|B+b| + |B-b|}{2} = 15 \Leftrightarrow |2m+23| + 25 = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ m = -14 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của m là $-23 \in (-25; -15)$.

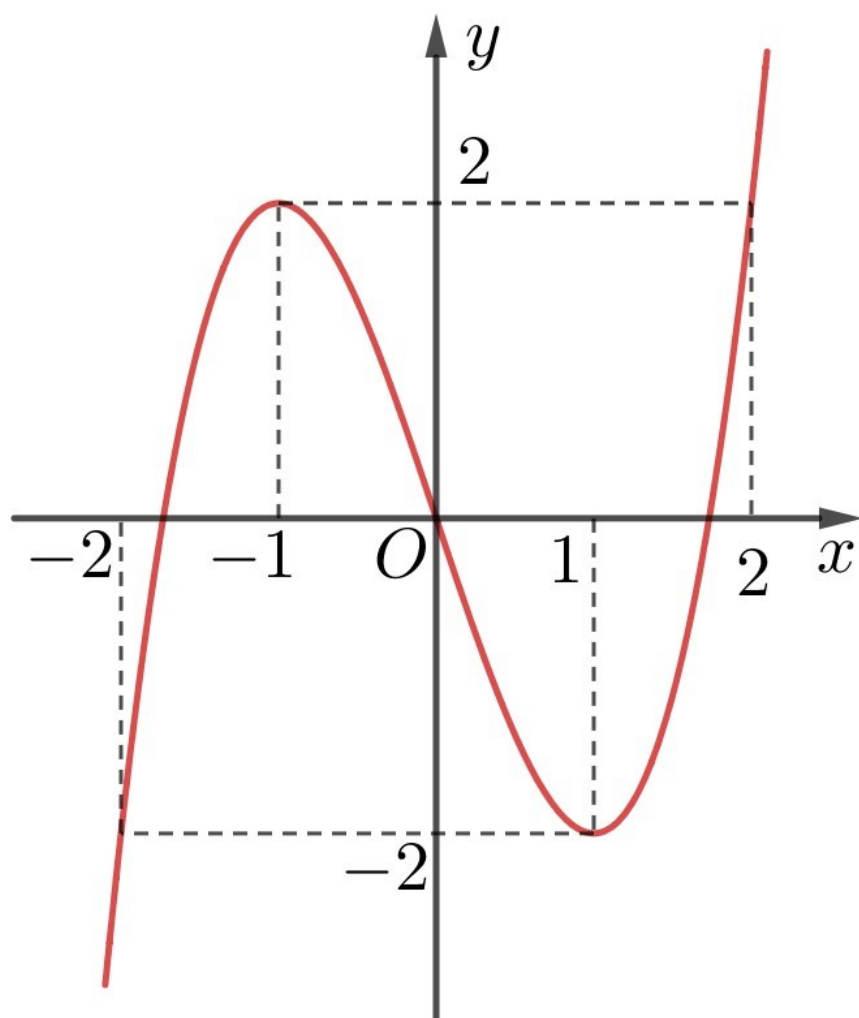
Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

*A. 4. B. 5. C. 3. D. 2.

Lời giải



Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Từ đồ thị suy ra $f(t) \in (-2; 0) \Rightarrow 4 + 2f(t) \in (0; 4) \Rightarrow u = \sqrt{4 + 2f(t)} \in (0; 2)$.

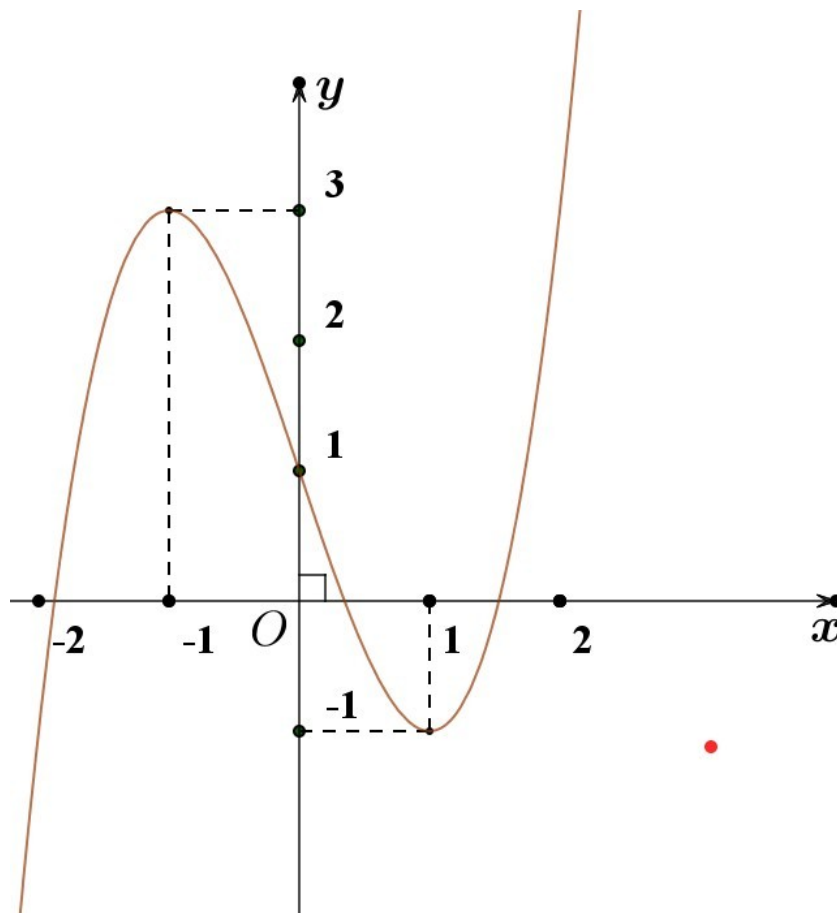
Ta có $f(u) = m$ với $u \in (0; 2)$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(u) = m$ có nghiệm $u \in (0; 2)$
 $\Leftrightarrow -2 \leq m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f'(x)$ là hàm bậc 3. Có đồ thị như hình vẽ sau

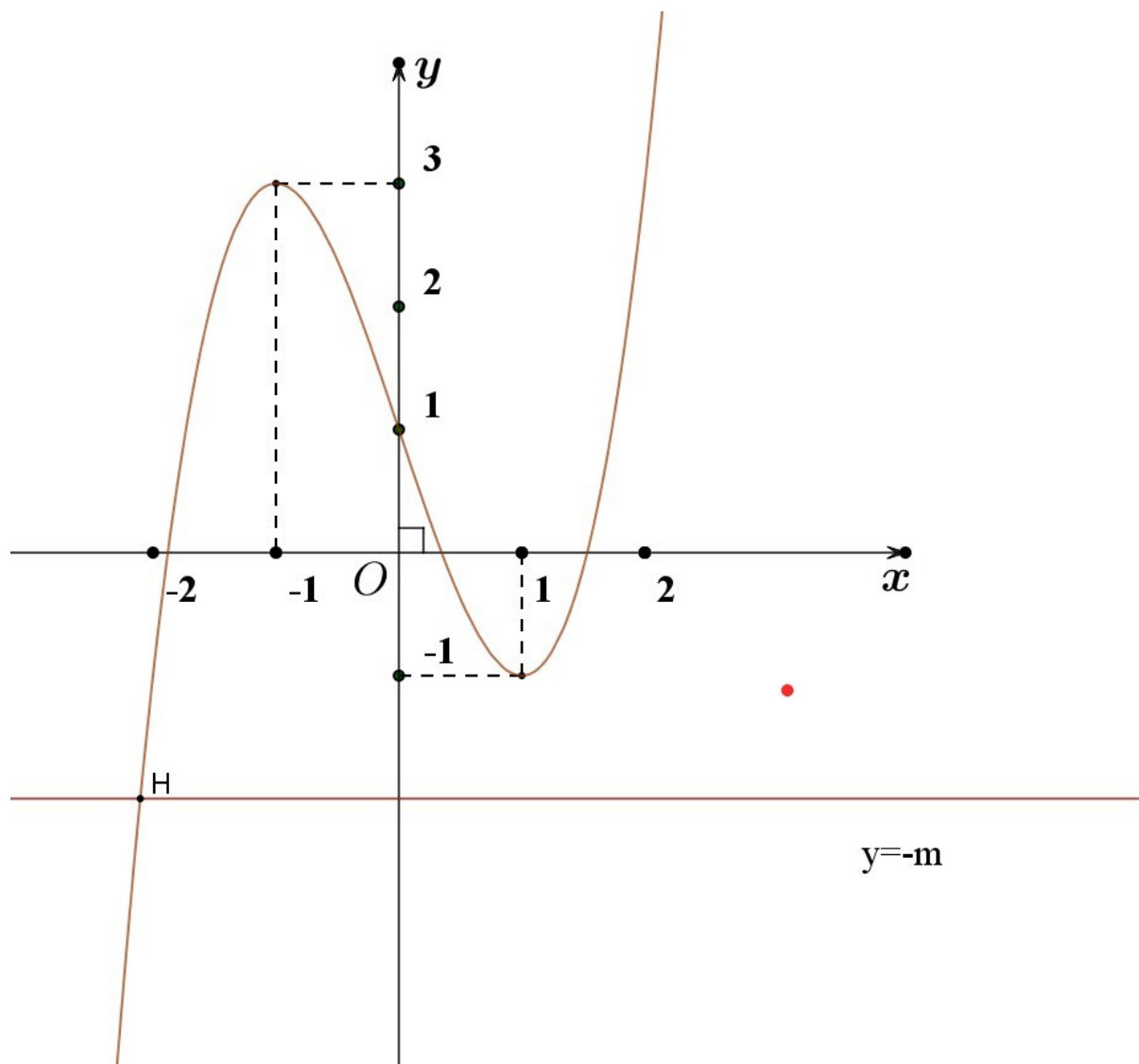


Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10, 10]$ để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 2021$ có đúng 1 cực trị?
 A. 20. B. 16. C. 15. *D. 18.

Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x) + m \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = -m$ (1)

Số nghiệm của ⁽¹⁾ là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường $d: y = -m$

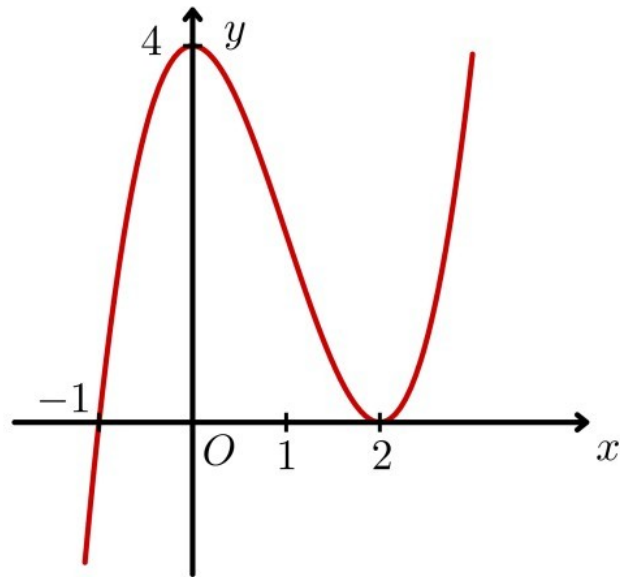


Dựa vào đồ thị trên. Để $g(x)$ có đúng 1 cực trị thì điều kiện là

$$\begin{cases} m \in [-10, 10] \\ m < -1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$$

Số giá trị của m là 16.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ có đồ thị (C) của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x) = f(f'(x))$, $h(x) = f'(f(x))$. Tổng số điểm cực trị của $g(x)$ và $h(x)$ là:

A. 12.

B. 11.

*C. 8.

D. 13.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f'(x) = x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Ta lại có:
$$\begin{cases} f'(0) = 4 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ -1 + 3a - 2b + 4 = 0 \\ 8 + 12a + 4b + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ 3a - 2b = -3 \\ 12a + 4b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

hay $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x$, $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \rightarrow f''(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

• Tìm số cực trị của hàm số: $g(x) = f(f'(x))$

$$g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(f'(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f'(x) = -1 \\ f'(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$$

Ta có:

với x_1 là nghiệm của phương trình $f'(x) = -1$

và x_2, x_3, x_4 là ba nghiệm của phương trình $f'(x) = 2$, $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < 2 < x_4$

Bảng xét dấu $y = g'(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$						
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

nhìn vào bảng trên, hàm số $g(x) = f(f'(x))$ có 3 cực trị

• Tìm số cực trị của hàm số $h(x) = f'(f(x))$

BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$						$+\infty$
			$-\frac{11}{4}$		4		

$$h'(x) = f'(x) \cdot f''(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_3 \\ x = x_4 \end{cases}$$

Ta có:

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $f(x) = 2$

và $x_3 < x_1 < -1 < x_2 < x_4 < 2$

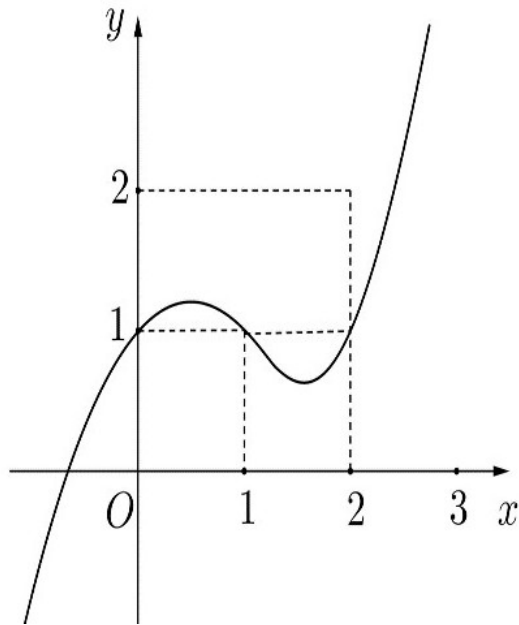
Bảng xét dấu $y = h'(x)$

x	$-\infty$	x_3	x_1	-1	x_2	x_4	<u>2</u>	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

nhìn vào bảng trên, hàm số $h(x) = f'(f(x))$ có 5 cực trị

Vậy tổng có 8 cực trị.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{9}x^3$ là

***B. 1.**

D.3.

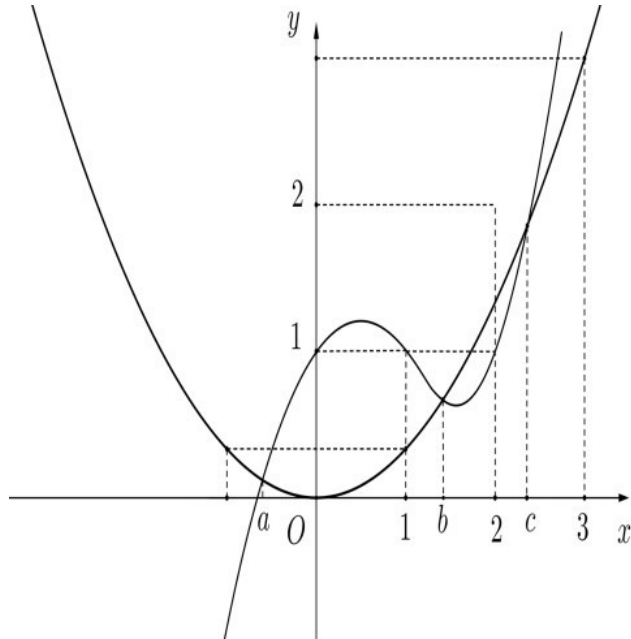
Lời giải

• Ta có $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{3}x^2$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2 \quad (1).$$

• Vẽ parabol $(P): y = \frac{1}{3}x^2$. Ta thấy (P) đi qua các điểm $\left(-1; \frac{1}{3}\right), (0; 0), \left(1; \frac{1}{3}\right), \left(2; \frac{4}{3}\right), (3; 3)$.

Parabol này cắt đồ thị $y=f(x)$ tại các điểm có hoành độ lần lượt là $a \in (-1; 0), b \in (1; 2)$ và $c \in (2; +\infty)$. Suy ra (1) có các nghiệm là: $x=a, x=b, x=c$.

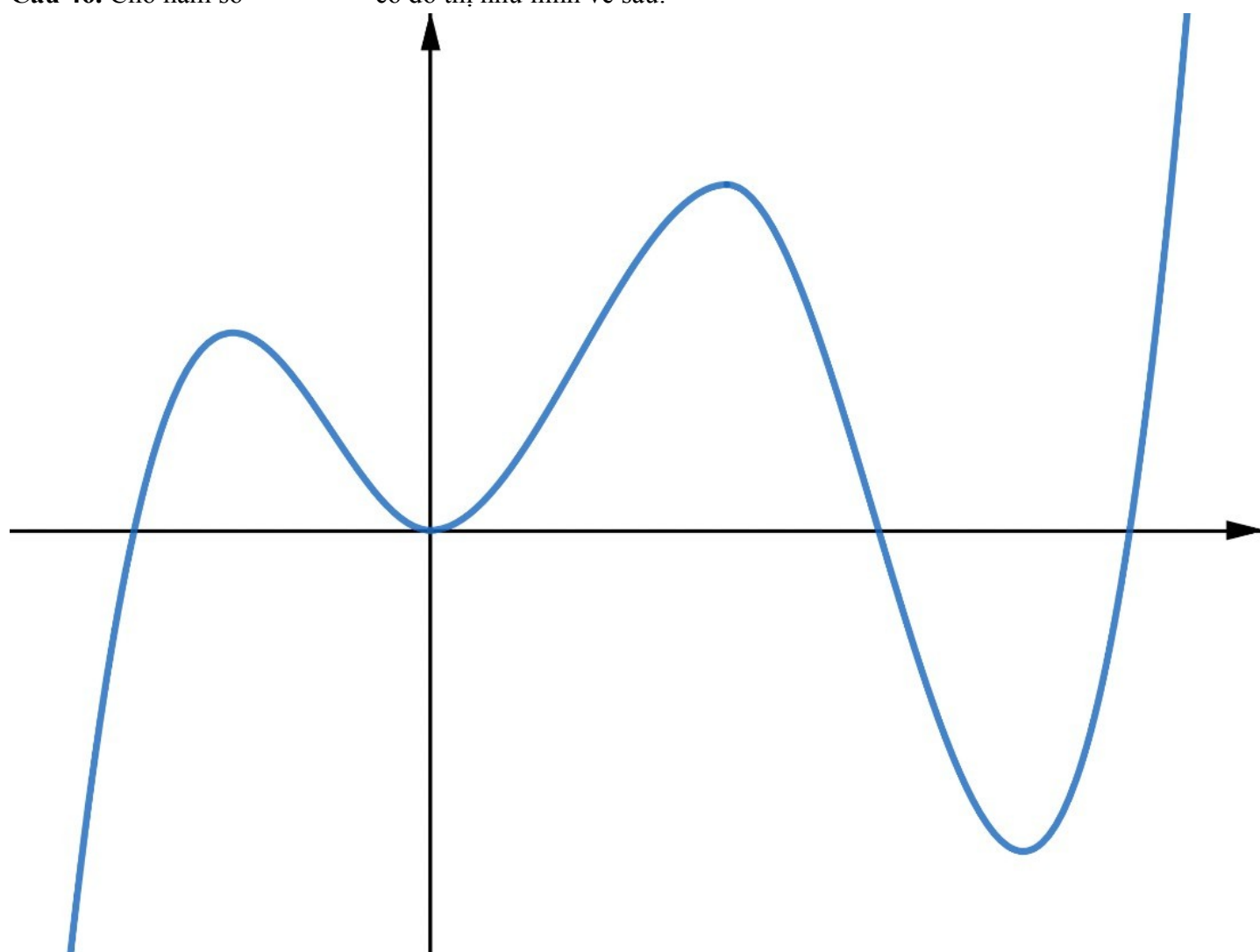


• Bảng biến thiên của hàm $g(x) = f(x) - \frac{1}{9}x^3$ như sau:

$++-00-\infty b c +\infty a-0$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có một điểm cực đại.

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



$yxO2-23\frac{7}{2}-\frac{13}{4}6$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = \frac{1}{2}m - 5$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

A. 4.

*B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

• Đặt: $g(x) = f(2x^3 - 6x + 2)$; $g'(x) = (6x^2 - 6) \cdot f'(2x^3 - 6x + 2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6 = 0 & (1) \\ f'(2x^3 - 6x + 2) = 0 & (2) \end{cases}$$

+ Giải (1): $6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$$+ \text{Giải (2): } f'(2x^3 - 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 6x + 2 = -2 \\ 2x^3 - 6x + 2 = 0 \\ 2x^3 - 6x + 2 = 3 \\ 2x^3 - 6x + 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin [-1; 2] \\ x = 1 \text{ (nghiệm kĐp)} \\ x \approx -1,87 \notin [-1; 2] \\ x \approx 0,34 \\ x \approx 1,53 \\ x \approx -1,64 \notin [-1; 2] \\ x \approx -0,16 \\ x \approx 1,81 \\ x = -1 \text{ (nghiệm kĐp)} \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

Số nghiệm của phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = \frac{1}{2}m - 5$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x) = f(2x^3 - 6x + 2)$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}m - 5$.

Kẻ đường thẳng $y = \frac{1}{2}m - 5$ trên cùng bảng biến thiên của $g(x)$. Điều kiện để đường thẳng $y = \frac{1}{2}m - 5$ cắt đồ thị hàm số $g(x) = f(2x^3 - 6x + 2)$ tại 6 điểm phân biệt là:

$$0 < \frac{1}{2}m - 5 < 2 \Leftrightarrow 10 < m < 14. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{11; 12; 13\}$$

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn ycbt.

Câu 47. Cho hàm số $f(x) = |2x^2 + (a+4)x + b+3|$. Đặt $M = \max_{[-2;3]} f(x)$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của biểu thức $T = a + 4b$ là

A. -42.

*B. -41.

C. 41.

D. 42.

Lời giải

$$\text{Đặt } g(x) = 2x^2 + (a+4)x + b+3 \Rightarrow g'(x) = 4x + a+4$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 - \frac{a}{4}$$

$$g(-2) = -2a + b + 3; \quad g(3) = 3a + b + 33; \quad g\left(-1 - \frac{a}{4}\right) = b + 3 - \frac{(a+4)^2}{8}$$

$$\Rightarrow M = \max \left\{ |-2a + b + 3|; |3a + b + 33|; \left| b + 3 - \frac{(a+4)^2}{8} \right| \right\}$$

$$= \max \left\{ |-2a + b + 3|; |3a + b + 33|; \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| \right\}$$

$$\begin{cases} M \geq |-2a+b+3| \\ M \geq |3a+b+33| \\ M \geq \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}M \geq \left| -a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{2} \right| \\ \frac{1}{2}M \geq \left| \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{33}{2} \right| \\ M \geq \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| \end{cases}$$

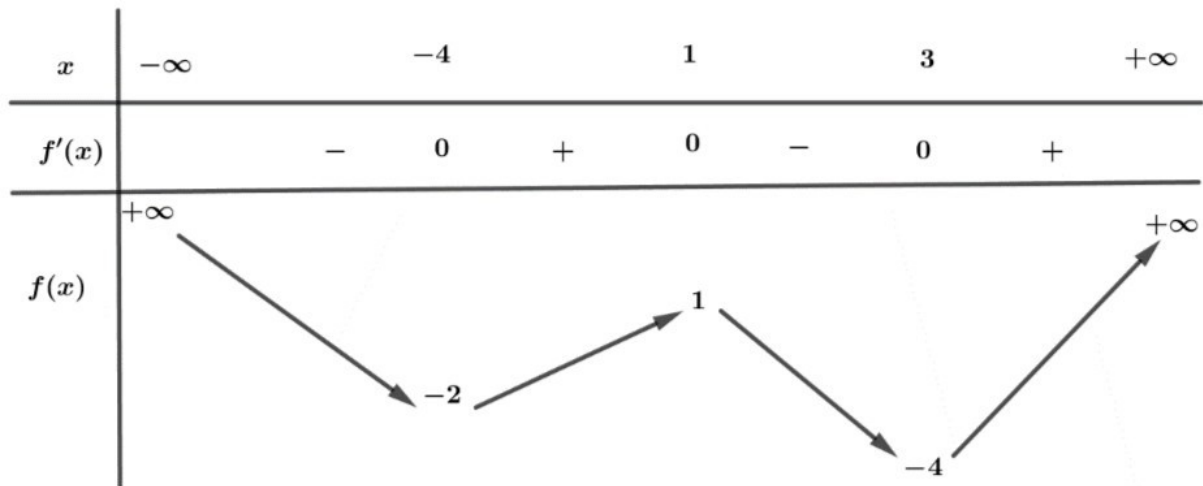
Ta có

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2M &\geq \left| -a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{2} \right| + \left| \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{33}{2} \right| + \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| \\ &\geq \left| -a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{33}{2} + \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| = \left| \frac{1}{8}a^2 + \frac{3}{2}a + 17 \right| \geq \frac{25}{2} \Rightarrow M \geq \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |-2a+b+3| = |3a+b+33| = \left| \frac{(a+4)^2}{8} - b - 3 \right| = \frac{25}{4} \\ a = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -\frac{35}{4} \end{cases}$$

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Số nghiệm của phương trình $|f(f(x))| = 2$ là

A. 4.

B. 5.

C. 9.

*D. 7.

Lời giải

$$|f(f(x))| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(f(x)) = 2 \\ f(f(x)) = -2 \end{cases}$$

Ta có:

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

$$f(f(x)) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \text{ (a thuộc } (-\infty; -4)) \\ f(x) = b \text{ (b thuộc } (3; +\infty)) \end{cases}$$

$$f(x) = -4$$

$$\Leftrightarrow f(x) = d \text{ (d thuộc } (1; 3))$$

$$f(f(x)) = -2 \Leftrightarrow f(x) = e \text{ (e thuộc } (3; +\infty))$$

$$f(x) = a \text{ (a thuộc } (-\infty; -4)) \text{ vô nghiệm.}$$

$f(x) = b(b \wedge (3; +\infty))$ có 2 nghiệm.

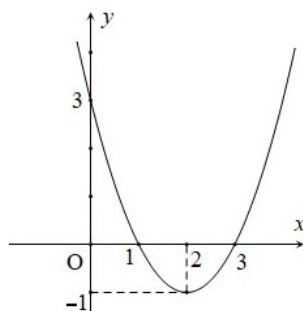
$f(x) = -4$ có 1 nghiệm.

$f(x) = d(d \wedge (1; 3))$ có 2 nghiệm.

$f(x) = e(e \wedge (3; +\infty))$ có 2 nghiệm.

$|f(f(x))| = 2$ có 7 nghiệm.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ)



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 2.

*B. 3.

C. 1.

D. 4.

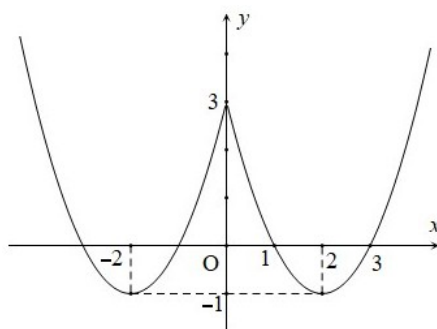
Lời giải

Xét phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$.

$$1 - (m-2) + (m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3-m \end{cases}$$

Nhận thấy

Từ đồ thị hàm số $f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $f(|x|)$ như sau:



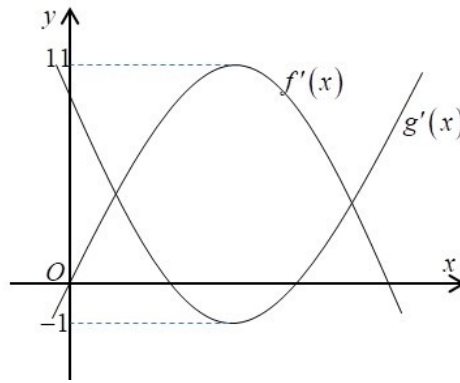
Với $f(|x|) = -1$, ta được 2 nghiệm x .

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt, tức là phương trình $f(|x|) = 3-m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Hay $-1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3\}$.

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 50. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có một phần đồ thị biểu diễn đạo hàm $f'(x)$ và $g'(x)$ như hình vẽ.



Biết rằng hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x) - a^2x + 2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến $(\alpha; \beta)$. Số giá trị nguyên dương của a thỏa mãn là

A. 4.

B. 2.

*C. 3.

D. 1.

Lời giải

Ta có: $y' = h'(x) = f'(x) - g'(x) - a^2$.

Hàm số $y = h(x)$ đồng biến khi $y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq g'(x) + a^2$

Đồ thị hàm số $y = g'(x) + a^2$ là đồ thị hàm số $y = g'(x)$ tịnh tiến lên phía trên a^2 đơn vị.

Hàm số $y = h(x) = f(x) - g(x) - a^2x + 2021$ luôn tồn tại một khoảng đồng biến $(\alpha; \beta)$ khi $a^2 < 11 \Leftrightarrow -3 \leq a \leq 3$.

Mà $a \in \mathbf{Z}_+^*$, suy ra: $a \in \{1; 2; 3\}$.

Câu 51. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Đặt $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$ với k là số tự nhiên lớn hơn 1. Tìm số nghiệm của phương trình $f^6(x) = 0$.

*A. 729.

B. 365.

C. 730.

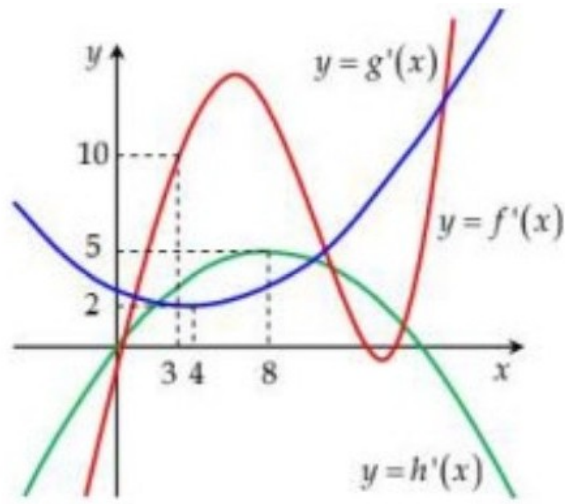
D. 364.

Lời giải

Công thức: Số nghiệm của phương trình $f^k(x) = 0$ là $u_k = u_1 + \frac{n^k - n}{n - 1}$ với u_1 là số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ và n là bậc của $f(x)$.

Áp dụng ta được số nghiệm là $2 + \frac{3^6 - 3}{2} = 365$.

Câu 52. Cho ba hàm số $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$. Đồ thị của ba hàm số $y = f'(x), y = g'(x), y = h'(x)$ được cho như hình vẽ.



Hàm số $k(x) = f(x+7) + g(5x+1) - h\left(4x + \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{5}{8}; 0\right)$

B. $\left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$

*C. $\left(\frac{3}{8}; 1\right)$

D. $\left(-\frac{3}{8}; 1\right)$

Lời giải

Ta có: $k'(x) = f'(x+7) + 5g'(5x+1) - 4h'\left(4x + \frac{3}{2}\right)$

Khi $x \in \left(\frac{3}{8}; 1\right)$ thì $\begin{cases} 7.375 < x+7 < 8 \\ 2.875 < 5x+1 < 6 \\ 3 < 4x + \frac{3}{2} < 5.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x+7) > 10 \\ g'(5x+1) > 2 \Rightarrow 5g'(5x+1) > 10 \\ h'\left(4x + \frac{3}{2}\right) < 5 \Rightarrow -4h'\left(4x + \frac{3}{2}\right) > -20 \end{cases}$

Do đó $k'(x) = f'(x+7) + 5g'(5x+1) - 4h'\left(4x + \frac{3}{2}\right) > 0, \forall x \in \left(\frac{3}{8}; 1\right)$

Hàm số $k(x) = f(x+7) + g(5x+1) - h\left(4x + \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên $\left(\frac{3}{8}; 1\right)$

Câu 53. Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	1	2	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

A. 5.

B. 6.

*C. 7.

D. 4.

Lời giải

Xét phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ (1).

Đặt $t = 2\sin x + 1$.

$t' = 2\cos x$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vi } x \in \left[0; \frac{9\pi}{2}\right] \text{ nên } x \in \left\{0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right\}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$
t'		+ 0	- 0	+ 0	- 0	+ 0
t		1 $\nearrow$ 3 $\searrow$ -1	-1 $\nearrow$ 3 $\searrow$ -1	-1 $\nearrow$ 3 $\searrow$ -1	-1 $\nearrow$ 3 $\searrow$ -1	-1 $\nearrow$ 3 $\searrow$ -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = a \in (1; 3) \\ t = b \in (3; +\infty) \end{cases}$$

Phương trình (1) trở thành $f(t) = 1$

Căn cứ bảng biến thiên ta có

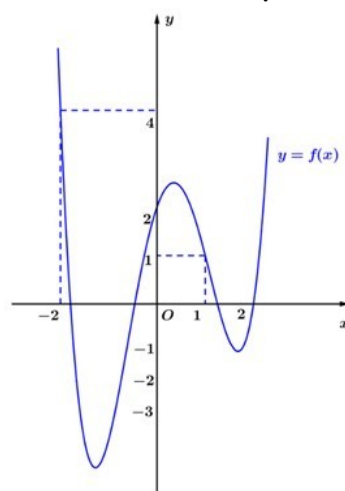
+ Với $t = -1$ phương trình (1) có 2 nghiệm.

+ Với $t = a$ phương trình (1) có 5 nghiệm.

+ Với $t = b$ phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình có 7 nghiệm.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x - 2)^2 + \frac{1}{2}(x - 2)^4$ là

*A. 3.

B. 7.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

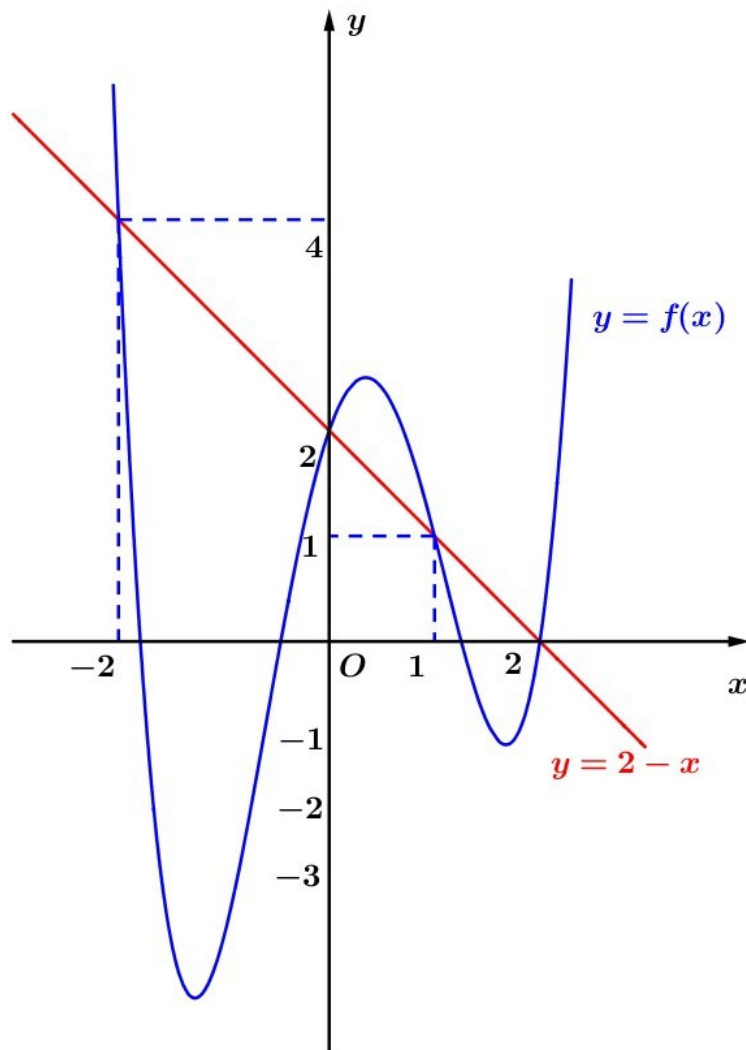
Ta có: $g(x) = f(x^2 - 4x + 3) - 3(x - 2)^2 + \frac{1}{2}(x - 2)^4$

$$g'(x) = f'(x^2 - 4x + 3) \cdot 2(x - 2) - 6(x - 2) + 2(x - 2)^3$$

$$= (x - 2)(2f'(x^2 - 4x + 3) - 6 + 2(x - 2)^2)$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(1n_0) \\ f'(x^2-4x+3)=3-(x-2)^2 (*) \end{cases}$$

$$(*) f'(x^2-4x+3)=3-(x-2)^2 \Leftrightarrow f'(x^2-4x+3)=3-x^2+4x-4=- (x^2-4x+3)+2$$



Đặt: $t=x^2-4x+3$ suy ra phương trình trở thành: $f'(t)=-t+2$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	$2-\sqrt{2}$	1	2	3	$2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	+

Phương trình trên tương ứng với tương giao giữa đồ thị $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=-t+2$

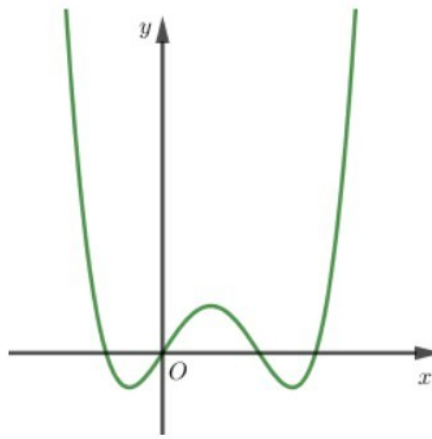
Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy phương trình có 3 nghiệm là $t=0, t=1, t=2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ x^2-4x+3=1 \\ x^2-4x+3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ x^2-4x+2=0 \\ x^2-4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, x=3 \\ x=2-\sqrt{2}; x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{3}; x=2+\sqrt{3} \end{cases}$$

Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$ như sau:

Dựa vào BBT trên, ta kết luận hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực đại

Câu 55. Biết đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g(x)=[f'(x)]^2-f(x).f''(x)$ và trục hoành



A. 4.

*B. 0.

C. 6.

D. 2.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = g(x)$ và Ox là:

$$[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 0$$

Ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 .

Giả sử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, $a \neq 0, x_1 < x_2 < x_3 < x_4$

Ta có: $f'(x) = a(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + a(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) + a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Ta có: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4}$

Ta có: $\left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{1}{(x - x_2)^2} - \frac{1}{(x - x_3)^2} - \frac{1}{(x - x_4)^2} = 0$ vô nghiệm.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và trục hoành bằng 0.

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2)^2(x^2 - x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp tất cả các

giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng các phần tử của S ?

A. 154.

B. 17.

C. 213.

*D. 153.

Lời giải

$$f'(x) = (x - 2)^2(x^2 - x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có. Với $x = 2$ là nghiệm kép, $x = 1, x = 0$ là nghiệm đơn.

Do đó hàm số $f = f(x)$ đạt cực trị tại $x = 1, x = 0$.

Đặt

$$g(x) = f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right) \Rightarrow g'(x) = (x - 6)f'\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$$

Khi

đó:

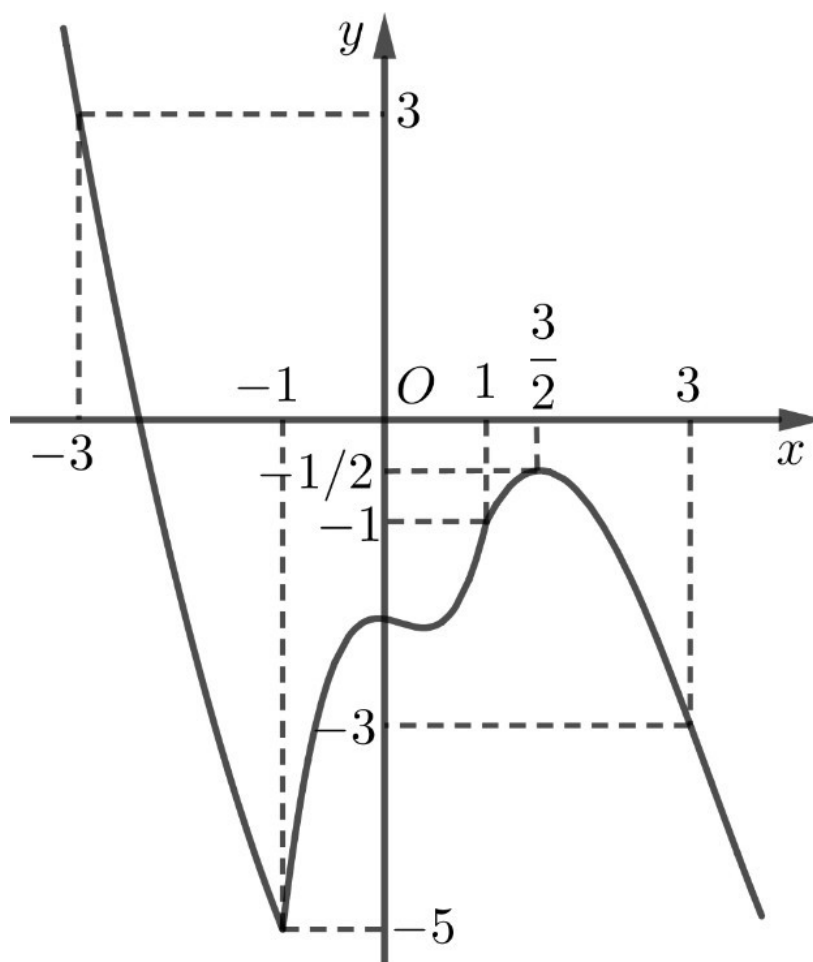
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 0(1) \\ \frac{1}{2}x^2 - 6x + m = 1(2) \end{cases}$$

. Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì $\frac{1}{2}x_0^2 - 6x_0 + m = 0$ do đó x_0 không thể là nghiệm của phương trình (2) hay nói cách khác phương trình (1), (2) không có nghiệm chung. Vì vậy, để hàm số $f\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + m\right)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (1), (2) có hai nghiệm phân biệt khác ⁶ hay

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - \frac{m}{2} > 0 \\ 9 - \left(\frac{m-1}{2}\right) > 0 \\ m < 18 - \frac{m \in \mathbb{Z}^+}{\rightarrow} m \in \{1, 2, \dots, 17\} \\ m \neq 18, m \neq 19 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của m là: $1 + 2 + \dots + 17 = 153$.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ



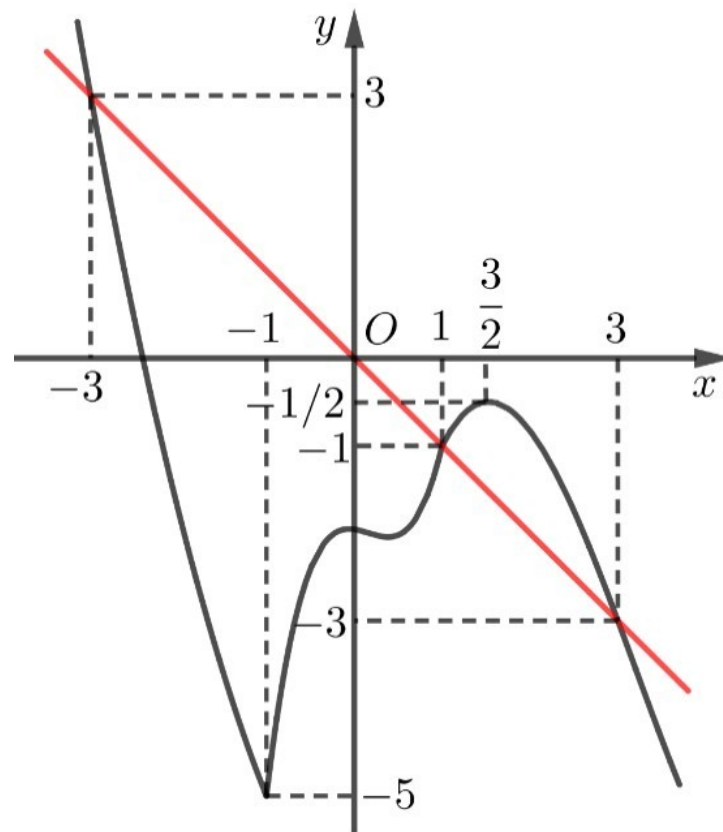
Xét hàm số $g(x) = f(x - 2m) + \frac{1}{2}(2m - x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$. Số phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. 4. B. 3. *C. 2. D. Vô số.

Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x - 2m) + (x - 2m)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t \quad (t = x - 2m) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m - 3 \\ x = 2m + 1 \\ x = 2m + 3 \end{cases}$$



Từ đồ thị suy ra $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2m + 3 \\ 2m - 3 < x < 2m + 1 \end{cases}$

Vậy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$ khi

$$\begin{cases} 2m + 3 \leq 3 \\ 2m - 3 \leq 3 \\ 2m + 1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \end{cases}$$

Vì m nguyên dương nên $m = 2; m = 3$.

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4; 4]$ như sau:

x	-4	-3	-1	0	2	4					
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	-4		4		2		3		-3		1

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in [-4; 4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x|^3 + 3|x|) + f(m)$ trên $[-1; 1]$ bằng $\frac{11}{2}$?

A. 2.

*B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Ta có $g(-x) = g(x)$ nên $g(x)$ chẵn hay đồ thị của hàm số $y = g(x)$ đối xứng qua trục tung.

$$\Rightarrow \max_{[-1;1]} g(x) = \max_{[0;1]} g(x) = \max_{[0;1]} [f(x^3 + 3x) + f(m)] = \max_{[0;1]} [f(x^3 + 3x)] + f(m).$$

Xét hàm số $y = f(x^3 + 3x)$ trên $[0; 1]$.

$$\text{Đặt } t = x^3 + 3x \Rightarrow t \in [0; 4] \Rightarrow \max_{[0;1]} y = \max_{[0;4]} f(t) = 3.$$

$$\text{Khi đó } \max_{[-1;1]} g(x) = 3 + f(m) = \frac{11}{2} \Leftrightarrow f(m) = \frac{5}{2}.$$

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 59. Cho $A = \{n \in \mathbb{Z} | 0 \leq n \leq 20\}$ và F là tập hợp các hàm số $f(x) = x^3 + (2m^2 - 5)x^2 + 6x - 8m^2$ có $m \in A$. Chọn ngẫu nhiên một hàm số $f(x)$ từ F . Tính xác suất để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox .

A. $\frac{18}{21}$.

B. $\frac{19}{20}$.

C. $\frac{9}{10}$.

*D. $\frac{19}{21}$.

Lời giải

Ta có: $A = \{n \in \mathbb{Z} | 0 \leq n \leq 20\} \Rightarrow |A| = 21 \Rightarrow |\Omega| = |F| = 21$ (do $m \in A$).

Xét hàm số: $f(x) = x^3 + (2m^2 - 5)x^2 + 6x - 8m^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2(2m^2 - 5)x + 6$.

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành:

$$x^3 + (2m^2 - 5)x^2 + 6x - 8m^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)[x^2 + (2m^2 - 3)x + 4m^2] = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = x^2 + (2m^2 - 3)x + 4m^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ phải cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$x \neq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m^2 - 3)^2 - 16m^2 > 0 \\ 4 + 2(2m^2 - 3) + 4m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^4 - 28m^2 + 9 > 0 \\ 8m^2 - 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > \frac{7 + 2\sqrt{10}}{2} \approx 6,6 \\ m^2 < \frac{7 - 2\sqrt{10}}{2} \approx 0,3 \\ m \neq \pm \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [0; 1; 2; \dots; 20]} m \in \{0; 3; 4; \dots; 20\}.$$

Vậy số hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox là 19.

Xác suất cần tìm là: $P = \frac{19}{21}$.

Cách 2: Xét hàm số: $f(x) = x^3 + (2m^2 - 5)x^2 + 6x - 8m^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2(2m^2 - 5)x + 6$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(2m^2 - 5)x + 6 = 0 \quad (1')$$

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị thì (1') phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2} \approx 4,6 \\ m^2 < \frac{5 - 3\sqrt{2}}{2} \approx 0,4 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [0; 1; 2; \dots; 20]} m \in \{0; 3; 4; \dots; 20\}.$$

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4m^4 - 20m^2 + 7 > 0$$

Khi đó (1) có 2 nghiệm $x_M; x_N$. Theo Viét ta có: $x_M + x_N = \frac{10 - 4m^2}{3}; x_M x_N = 2$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $M(x_M; y_M); N(x_N; y_N)$ của đồ thị hàm số là

$$y = \left[4 - \frac{2}{9}(2m^2 - 5)^2 \right] x - \frac{28}{3}m^2 + \frac{10}{3} \quad (d).$$

$$\text{Đặt } 4 - \frac{2}{9}(2m^2 - 5)^2 = a; \quad -\frac{28}{3}m^2 + \frac{10}{3} = b; \quad m^2 = t.$$

Hai điểm cực trị nằm về 2 phía của trục hoành, suy ra:

$$y_M \cdot y_N < 0 \Leftrightarrow (ax_M + b)(ax_N + b) < 0 \Leftrightarrow a(x_M x_N) + ab(x_M + x_N) + b^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2a + ab \cdot \frac{2(5 - 2t)}{3} + b^2 < 0 \Leftrightarrow 224t^4 - 752t^3 + 2064t^2 - 1040t + 188 > 0 \quad (2).$$

Sử dụng CASIO - FX 580 giải được (2) đúng với $\forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy số hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox là 19.

Xác suất cần tìm là: $P = \frac{19}{21}$.

Câu 60. Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$, với a, b là tham số. Với M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$. Khi M nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính $a + 2b$.

A. 5.

B. -5.

*C. -4.

D. 4.

Lời giải

$$\begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |-a+b+1| \\ M \geq |3a+b+9| \\ 2M \geq 2|a+b+1| = |-2a-2b-2| \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có:

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } 4M &\geq |-a+b+1| + |3a+b+9| + |-2a-2b-2| \geq |-a+b+1+3a+b+9-2a-2b-2| \\ &\Leftrightarrow 4M \geq 8 \Leftrightarrow M \geq 2. \end{aligned}$$

Điều kiện cần để $M=2$ là $|-a+b+1| = |3a+b+9| = |-a-b-1| = 2$ và $-a+b+1, 3a+b+9, -a-b-1$ cùng dấu

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+1=3a+b+9=-a-b-1=2 \\ -a+b+1=3a+b+9=-a-b-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Ngược lại, với $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$ thì $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Ta có: $g'(x) = 2x - 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$.

Do M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ nên $M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2$.

Từ đó suy ra với $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $a+2b = -4$.

---HẾT---

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>