

CD9: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ

Dạng 1: Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước
Dạng 2: Chứng minh phân số đã cho là tối giản
Dạng 3: Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản
Dạng 4: Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được
Dạng 5: Một số bài toán có lời văn
Dạng 6: Các bài toán về so sánh

Dạng 1. Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Giá trị của x trong biểu thức $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,25$ là:

A. $\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$ C. $\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}$ D. $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

$$(\sqrt{x} - 1)^2 = 0,25$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{x} - 1 = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x} - 1 = -\frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \frac{9}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{array}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{9}{4}; \frac{1}{4} \right\}$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$ với a, b, c thỏa mãn: $(3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0$

Lời giải

$$Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \quad \text{với } a, b, c \text{ thỏa mãn: } (3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0$$

Vì $(3a - 2b)^2 \geq 0$; $|4b - 3c| \geq 0$ với " a, b " nên để $(3a - 2b)^2 + |4b - 3c| \leq 0$ thì:

$$\begin{array}{l} (3a - 2b)^2 = 0 \\ |4b - 3c| = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3a = 2b \\ 4b = 3c \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \end{array}$$

Đặt $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$ $\Rightarrow a = 2k; b = 3k; c = 4k$. Thay vào Q ta có:

$$Q = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{(2k)^3 + (3k)^3 + (4k)^3}{2k \cdot 3k \cdot 4k} = \frac{k^3(2^3 + 3^3 + 4^3)}{24k^3} = \frac{33}{8}$$

Vậy $Q = \frac{33}{8}$.

Câu 2. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa 2022 - 2023)

Cho $\frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a}$ và a, b, c khác 0.

Tính $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

Lời giải

Từ $\frac{a-2b+c}{b} = \frac{b-5c+a}{2c} = \frac{c-8a+b}{3a}$ và a, b, c khác 0.

$$\Rightarrow \frac{a-2b+c}{b} + 3 = \frac{b-5c+a}{2c} + 3 = \frac{c-8a+b}{3a} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{b} = \frac{b+c+a}{2c} = \frac{c+a+b}{3a}$$

TH1: Nếu $a+b+c = 0$

$$\begin{cases} b+c = -a \\ a+b = -c \\ c+a = -b \end{cases}$$

Thay vào P ta có $P = -1$

TH 2: Nếu $a+b+c \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}; \frac{b}{c} = \frac{2}{1}; \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

Thay vào P ta có $P = 10$

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Phong, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 2023$. Chứng minh rằng giá trị biểu

thức sau không phải là một số nguyên: $A = \frac{a}{2023-c} + \frac{b}{2023-a} + \frac{c}{2023-b}$

Lời giải

$$a+b+c = 2023 \Rightarrow \begin{cases} 2023-c = a+b \\ 2023-a = b+c \\ 2023-b = a+c \end{cases}$$

Theo bài ra ta có

$$A = \frac{a}{2023-c} + \frac{b}{2023-a} + \frac{c}{2023-b} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c}$$

Vì a, b, c là các số nguyên dương nên

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{a+c+b} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Ta lại có $\frac{a}{a+b}; \frac{b}{b+c}; \frac{c}{a+c} < 1$ nên

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{b+c+a} + \frac{c+b}{a+c+b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

Vì $1 < A < 2$ nên A không phải là một số nguyên.

Câu 4. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thoả mãn : $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}$. Tính tổng :

$$S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

$$+) \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2} \Rightarrow b+c = 2a$$

$$+) \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c+a = 2b$$

$$+) \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2} \Rightarrow a+b = 2c$$

$$S = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{2c}{c} + \frac{2a}{a} + \frac{2b}{b} = 2+2+2 = 6$$

Suy ra :

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Duyên Hải 2022 - 2023)

Tìm ba phân số tối giản. Biết tổng của chúng bằng $\frac{269}{30}$. Tử số của chúng tỉ lệ thuận với $5; 7; 11$. Mẫu số của chúng tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$.

Lời giải

Gọi ba phân số tối giản cần tìm là: $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f}$ (Điều kiện $(a,b)=1; (c,d)=1; (e,f)=1$).

Vì tử số của chúng tỉ lệ thuận với $5; 7; 11$ nên $\frac{a}{5} = \frac{c}{7} = \frac{e}{11} = k$

$$\Rightarrow a = 5k; c = 7k; e = 11k$$

Vì mẫu số của chúng tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$ nên $\frac{1}{4}b = \frac{1}{5}d = \frac{1}{6}f$

$$\text{Đ} \quad \frac{b}{4} = \frac{d}{5} = \frac{f}{6} = q$$

$$\text{Đ} \quad b = 4q; \quad d = 5q; \quad f = 6q$$

Do tổng của ba phân số bằng $\frac{269}{30}$ nên $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{269}{30}$

$$\text{Đ} \quad \frac{5k}{4q} + \frac{7k}{5q} + \frac{11k}{6q} = \frac{269}{30}$$

$$\text{Đ} \quad \frac{269}{60} \cdot \frac{k}{q} = \frac{269}{30} \quad \text{Đ} \quad \frac{k}{q} = 2$$

$$\text{Đ} \quad \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{5k}{4q} = \frac{5}{4} \cdot 2 = \frac{5}{2} \\ \frac{c}{d} = \frac{7k}{5q} = \frac{7}{5} \cdot 2 = \frac{14}{5} \\ \frac{e}{f} = \frac{11k}{6q} = \frac{11}{6} \cdot 2 = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{5}{2}; \frac{14}{5}; \frac{11}{3}$.

Câu 6. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tìm phân số có tử là 7 biết nó lớn hơn $-\frac{9}{10}$ và nhỏ hơn $-\frac{9}{11}$

Lời giải

Gọi mẫu phân số cần tìm là x ta có:

$$-\frac{9}{10} < \frac{7}{x} < -\frac{9}{11}$$

$$\text{Đ} \quad \frac{63}{-70} < \frac{63}{9x} < \frac{63}{-77}$$

$$\text{Đ} \quad -77 < 9x < -70$$

$$\text{vì } 9x : 9 \quad \text{Đ} \quad 9x = -72 \quad \text{Đ} \quad x = 8$$

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{7}{8}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tìm ba phân số tối giản biết tổng của chúng là $4\frac{9}{40}$; các tử của chúng tỉ lệ với $2; 3; 5$ còn các mẫu của chúng tương ứng tỉ lệ với $5; 4; 3$.

Lời giải

Gọi ba phân số tối giản cần tìm là $\frac{a}{a'}; \frac{b}{b'}; \frac{c}{c'}$ (Điều kiện $(a, a')=1; (b, b')=1; (c, c')=1$)

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 4\frac{9}{40} \\ \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{a'}{5} = \frac{b'}{4} = \frac{c'}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{a'}{5} = \frac{b}{3} = \frac{b'}{4} = \frac{c}{5} = \frac{c'}{3} \\ \frac{a}{a'} \cdot \frac{5}{2} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{4}{3} = \frac{c}{c'} \cdot \frac{3}{5} \end{cases}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{b}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{5}{3}} = \frac{4\frac{9}{40}}{\frac{169}{60}} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{5} \\ \frac{b}{b'} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \\ \frac{c}{c'} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy ba phân số tối giản cần tìm là $\frac{3}{5}; \frac{9}{8}; \frac{5}{2}$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

Tìm 3 phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với $3; 4; 5$ và các mẫu tương ứng của chúng tỉ lệ với $5; 1; 2$.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm lần lượt là $\frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z}$.

Theo đề bài ta có

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1\frac{1}{70}; \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \quad \text{và} \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}}{\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5}} = \frac{1 \cdot \frac{70}{71}}{\frac{10}{10}} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{35} \\ \frac{b}{y} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \\ \frac{c}{z} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14} \end{cases}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{3}{35}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{14}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Kim Thành, năm học 2017 - 2018)

Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}$; $B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$.

Tính $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1} \\ &= \frac{1}{2016} + 1 + \frac{2}{2015} + 1 + \frac{3}{2014} + 1 + \dots + \frac{2015}{2} + 1 \\ &= \frac{2017}{2016} + \frac{2017}{2015} + \frac{2017}{2014} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2017}{1} \\ &= 2017 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} \right) \end{aligned}$$

Do đó $\frac{A}{B} = \frac{1}{2017}$

Câu 10. (HSG 7 huyện Việt Yên, năm học 2018 - 2019)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $B = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$

Chứng minh rằng $\frac{A}{B}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38} \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{37} - \frac{1}{38} \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{37} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38} \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38} \right) \\
 &= \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \\
 B &= \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20} \\
 \Rightarrow B &= \frac{1}{20} + \frac{1}{38} + \frac{1}{21} + \frac{1}{37} + \dots + \frac{1}{38} + \frac{1}{20} = 2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \right) = 2A \\
 \Rightarrow B &= \frac{2}{58}A \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{58}{2} = 29 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Câu 11. (HSG 7 cấp huyện Thạch Thành, tỉnh Thanh Hoá 2017 - 2018)

Tìm số hữu tỉ x , sao cho tổng của số đó với nghịch đảo của nó có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

Gọi $x = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \text{UCLN}(m, n) = 1$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn} \quad (1)$$

Khi đó:

Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $m^2 + n^2 \vdots mn$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 \vdots m \Rightarrow n^2 \vdots m \Rightarrow n \vdots m$$

Mà $\text{UCLN}(m, n) = 1 \Rightarrow m = 1$ hoặc $m = -1$

*) Với $m = 1$

Từ (1), ta có: $x + \frac{1}{x} = \frac{1^2 + n^2}{1 \cdot n} = \frac{1 + n^2}{n}$ Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $1 + n^2 \vdots n \Rightarrow 1 \vdots n$ hay $n = \pm 1$

*) Với $m = -1$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 + n^2}{(-1) \cdot n} = \frac{1 + n^2}{-n}$$

Từ (1), ta có:

Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $1 + n^2 \vdots (-n) \Rightarrow 1 \vdots (-n)$ hay $n = \pm 1$

$$\text{Khi đó } x = \frac{m}{n} \text{ nên } x = \pm 1$$

Câu 12. (HSG 7 trường THCS Nguyễn Trãi 2018-2019)

Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với $3; 4; 5$, các mẫu của chúng tỉ lệ với $5; 1; 2$. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi các phân số phải tìm là: a, b, c

$$\text{Ta có: } a + b + c = \frac{213}{70} \quad \text{và} \quad a : b : c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6 : 40 : 25 \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{40} = \frac{c}{25}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{40} = \frac{c}{25} = \frac{a+b+c}{6+40+25} = \frac{213}{70} : 71 = \frac{3}{70}$$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{35}; b = \frac{12}{7}; c = \frac{15}{14}$$

Vậy ba phân số cần tìm là $\frac{9}{35}; \frac{12}{7}; \frac{15}{14}$

Câu 13. (HSG 7 trường THCS Phú Trường 2017-2018)

Tính giá trị của biểu thức $\frac{2a-5b}{a-3b}$ với $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

Lời giải

$$\frac{2a-5b}{a-3b} = \frac{2 \cdot \frac{3}{5} - 5}{\frac{3}{5} - 3} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} - 5}{\frac{3}{4} - 3} = \frac{14}{9}$$

Dạng 2. Chứng minh phân số đã cho tối giản

Câu 1. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho số nguyên tố p . Giả sử x, y là các số tự nhiên khác 0 , thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2 + py^2}{xy}$

là các số tự nhiên. Chứng minh rằng $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$.

Lời giải

Gọi ƯCLN $(x, y) = d (d \in \mathbb{N}^*)$, khi đó tồn tại các số tự nhiên a và b để $x = da$; $y = db$ và $(a, b) = 1$

$$\text{Ta có: } \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 a^2 + p d^2 b^2}{d^2 ab} = \frac{a^2 + p b^2}{ab} \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó ta được: $a^2 + pb^2 : ab \vdash a^2 + pb^2 : b \vdash a^2 : b$

Do $(a; b) = 1$ nên ta suy ra được $b = 1$. Suy ra $a^2 + p : a \vdash p : a$

Do p là số nguyên tố nên ra được $a = 1$ hoặc $a = p$. Khi đó ta xét các trường hợp

Với $a = 1$, khi đó ta được $x = y = d \vdash \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 + pd^2}{d^2} = p + 1$

Với $a = p$, khi đó ta được $x = dp; y = d \vdash \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 p^2 + d^2 p}{d^2 p} = p + 1$

$$\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$$

Vậy ta luôn có

Câu 2. (HSG 7 huyện Hoa Lư, tỉnh Ninh Bình 2020 - 2021)

Chứng minh với n là số nguyên thì phân số $\frac{2n+5}{n+3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Điều kiện: $n \geq -3$

Gọi $\text{ÖCLN}(n+3, 2n+5) = d$

$$\vdash \begin{cases} (n+3) : d \\ (2n+5) : d \end{cases}$$

$$\vdash \begin{cases} 2(n+3) : d \\ (2n+5) : d \end{cases}$$

$$\vdash (2n+6) - (2n+5) : d$$

$$\vdash 1 : d$$

$$\vdash d = 1$$

Vậy $\frac{2n+5}{n+3}$ là phân số tối giản.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Ba, tỉnh Phú Thọ 2020 - 2021)

Chứng minh phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Gọi $\text{ÖCLN}(12n+1, 30n+2) = d$

$$\vdash \begin{cases} 12n+1 : d \\ 30n+2 : d \end{cases} \vdash \begin{cases} 5(12n+1) : d \\ 2(30n+2) : d \end{cases}$$

$$\vdash (60n+5) - (60n+4) : d$$

$$\vdash 1:d$$

$$\vdash d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+1}{30n+2}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n .

Câu 4. (HSG 7 huyện Sơn Tịnh, tỉnh Quảng Ngãi 2020 - 2021)

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n , phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Gọi } \text{ÖCLN}(12n+5, 15n+6) = d$$

$$\vdash \begin{array}{l} 12n+5:d \\ 15n+6:d \end{array} \vdash \begin{array}{l} 5(12n+5):d \\ 4(15n+6):d \end{array}$$

$$\vdash (60n+25) - (60n+24):d$$

$$\vdash 1:d$$

$$\vdash d = 1$$

Vậy phân số $\frac{12n+5}{15n+6}$ là phân số tối giản.

Câu 5. (HSG 7 huyện Nho Quan, tỉnh Ninh Bình 2020 - 2021)

Chứng tỏ rằng với n là số nguyên dương thì $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản.

Lời giải

$$\text{Gọi } d = \text{ÖCLN}(14n+3; 24n+5)$$

$$\vdash \begin{array}{l} 14n+3:d \\ 24n+5:d \end{array} \vdash \begin{array}{l} 12.(14n+3):d \\ 7.(24n+5):d \end{array} \vdash \begin{array}{l} 168n+36:d \\ 168n+35:d \end{array}$$

$$\vdash (168n+36) - (168n+35):d$$

$$\vdash 168n+36 - 168n - 35:d$$

$$\vdash 1:d \vdash d = 1$$

Vậy: phân số $\frac{14n+3}{24n+5}$ là phân số tối giản với n là số nguyên dương.

Câu 6. (HSG 7 huyện Chí Linh năm học 2022 - 2023)

Chứng tỏ phân số có dạng $\frac{n-4}{3n-11}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n .

Lời giải

$$\text{Gọi ước chung của } n-4 \text{ và } 3n-11 \text{ là } d \vdash \begin{array}{l} n-4:d \\ 3n-11:d \end{array} \vdash \begin{array}{l} 3n-12:d \\ 3n-11:d \end{array}$$

Do đó $(3n - 12) - (3n - 11) = -1; d \mid -1 \Rightarrow d = \pm 1$

Vậy phân số có dạng $\frac{n-4}{3n-11}$ là phân số tối giản với mọi số nguyên n .

Dạng 3. Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản

Câu 1. (HSG 7 huyện Than Uyên, tỉnh Lai Châu, 2022 - 2023)

Tìm phân số tối giản $\frac{m}{n}$ biết rằng nếu cộng tử với 6 và cộng mẫu với 9 thì giá trị phân số đó không đổi?

Lời giải

Vì phân số tối giản $\frac{m}{n}$ khi cộng tử với 6 và cộng mẫu với 9 thì giá trị phân số đó không

đổi nên ta có: $\frac{m}{n} = \frac{m+6}{n+9} = \frac{m-(m+6)}{n-(n+9)} = \frac{m-m-6}{n-n-9} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } \frac{m}{n} = \frac{2}{3}.$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Phù Cát, tỉnh Bình Định 2020 - 2021)

Tìm $n \in \mathbb{N}$ để phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $\text{ÖCLN}(n+1, 3n-1) = d$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 \vdots d \\ 3n-1 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n+3 \vdots d \\ 3n-1 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3n+3) - (3n-1) \vdots d$$

$$\Rightarrow 4 \vdots d$$

$$\Rightarrow d \in \{1; 2; 4\}$$

Để $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản thì $d \in \{2; 4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+1 \not\vdots 2 \\ n+1 \not\vdots 4 \end{cases} \Rightarrow n+1 \not\vdots 2$$

$$\Rightarrow n+1 \equiv 2k \pmod{4} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow n \equiv 2k-1$$

Vậy $n \in 2k-1 (k \in \mathbb{N}^*)$ thì phân số $\frac{n+1}{3n-1}$ là phân số tối giản.

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hóa 2020 - 2021)

Tìm các số tự nhiên n để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi $d \in \text{ƯC}(1-3n; 2n-3)$

$$\begin{cases} 1-3n; d \\ 2n-3; d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1-3n); d \\ 3(2n-3); d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-6n; d \\ 6n-9; d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2-6n) + (6n-9); d$$

$$\Rightarrow 2-6n+6n-9; d$$

$$\Rightarrow -7; d \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản thì $d = \pm 1$

Hay $2n-3$ không chia hết cho 7

$$\Rightarrow 2n-3 \neq 7k$$

$$\Rightarrow 2n-3 \neq 7k+7$$

$$\Rightarrow 2n-10 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n-5 \neq 7k$$

$$\Rightarrow n \neq 7k+5$$

Vậy với $n \neq 7k+5$ phân số $\frac{1-3n}{2n-3}$ là phân số tối giản.

Câu 4. (HSG 7 huyện Phú Lương, tỉnh Thái Nguyên 2020 - 2021)

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:

$$\frac{7}{n+9}; \frac{8}{n+10}; \frac{9}{n+11}; \dots; \frac{100}{n+102}$$

Lời giải

Ta có các phân số đã cho đều có dạng $\frac{x}{x+(n+2)}$ với $x \in \{7; 8; 9; \dots; 100\}$

Do đó để các phân số đều tối giản thì x và $n+2$ phải nguyên tố cùng nhau.

Suy ra $n+2$ phải nhỏ nhất và nguyên tố cùng nhau với các số $7; 8; 9; \dots; 100$.

$\Rightarrow n+2$ là số nguyên tố nhỏ nhất và lớn hơn 100

$$\Rightarrow n+2 = 101$$

$$\Rightarrow n = 99$$

Dạng 4. Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được

Câu 1.

Cho $B = \frac{6n+7}{3n+2}$
 Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số B không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $6n+7$ và $3n+2$

$$\begin{array}{l} \vdots 6n+7 : d \\ \vdots 3n+2 : d \end{array} \quad \begin{array}{l} \vdots 6n+7 : d \\ \vdots 6n+4 : d \end{array}$$

$$\vdots (6n+7) - (6n+4) : d \quad \text{hay} \quad 3 : d$$

Vì d là ước nguyên tố nên $d = 3$

Khi đó $3n+2 : 3 \vdots 2 : 3$ vô lý

Vậy không có số tự nhiên n để phân số $B = \frac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

Câu 2.

Cho $B = \frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$
 Tìm tất cả các số tự nhiên n để phân số B không là phân số tối giản.

Lời giải

Gọi d là ước nguyên tố chung (nếu có) của $3n^2+2n+3$ và $2n+1$

$$\begin{array}{l} \vdots 3n^2+2n+3 : d \\ \vdots 2n+1 : d \end{array} \quad \begin{array}{l} \vdots 2(3n^2+2n+3) : d \\ \vdots 3n(2n+1) : d \end{array}$$

$$\vdots \frac{2}{3}(3n^2+2n+3) - 3n(2n+1) : d \quad \text{hay} \quad 2n+12 : d \vdots 2n+1+11 : d$$

$$\text{Suy ra } 11 : d \vdots d = 11$$

$$\text{Khi đó } (2n+1-11) : 11 \quad \text{hay} \quad 2(n-5) : 11$$

$$\vdots n-5 : 11$$

$$\vdots n = 11k + 5 (k \in \mathbb{N})$$

Vậy với $n = 11k + 5 (k \in \mathbb{N})$ để phân số $B = \frac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ không là phân số tối giản.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tam Nông 2021 - 2022)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{3}{x-1}$ và $\frac{x+1}{3}$ là một số nguyên.

Lời giải

Tích hai phân số $\frac{3}{x-1}$ và $\frac{x+1}{3}$ là:

$$\frac{3}{x-1} \cdot \frac{x+1}{3} = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

Để tích này là một số nguyên thì $\frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z}$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x-1 \in \{2\} = \{-1; -2; 1; 2\}$

Suy ra: $x \in \{0; -1; 2; 3\}$

Vậy $x \in \{0; -1; 2; 3\}$ là các giá trị cần tìm.

Dạng 5. Một số bài toán có lời văn

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn năm học 2022 - 2023)

Cả ba vòi nước cùng chảy vào một bể nước. Nếu vòi ¹ và vòi ² cùng chảy thì ⁶ giờ được ³/₅ bể. Nếu vòi ² và vòi ³ cùng chảy thì ⁵ giờ chảy được ⁷/₁₂ bể, nếu vòi ¹ và vòi ³ cùng chảy thì ⁹ giờ chảy được ³/₄ bể. Thời gian cả ba vòi cùng chảy đầy bể là:

- A. ⁶ giờ. B. ¹⁰/₃ giờ. C. ²⁰/₃ giờ. D. ³ giờ.

Lời giải

Chọn C

Một giờ vòi ¹ và vòi ² cùng chảy được: $\frac{3}{5} : 6 = \frac{1}{10}$ (bể)

Một giờ vòi ² và vòi ³ cùng chảy được: $\frac{7}{12} : 5 = \frac{7}{60}$ (bể)

Một giờ vòi ¹ và vòi ³ cùng chảy được: $\frac{3}{4} : 9 = \frac{1}{12}$ (bể)

Một giờ cả ba vòi cùng chảy được: $\frac{1}{10} + \frac{7}{60} + \frac{1}{12} = \frac{3}{20}$ (bể)

Thời gian cả ba vòi cùng chảy đầy bể là: $1 : \frac{3}{20} = \frac{20}{3}$ (giờ)

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Trong đợt ôn thi học sinh giỏi môn Toán lớp 7, bạn Nam đã giải một số bài toán trắc nghiệm. Sau khi thầy giáo kiểm tra kết quả thì có một số câu sai. Nếu bạn Nam sửa hai câu từ đáp án sai thành đáp án đúng thì tỉ lệ số câu đúng của bạn sẽ là 76%. Nếu bạn Nam bỏ hẳn hai câu đó thì tỉ lệ số câu đúng của bạn là 75%. Hỏi trong đợt ôn thi bạn Nam đã giải bao nhiêu bài toán trắc nghiệm?

- A. 150 B. 100 C. 50 D. 20

Lời giải

Chọn C

Gọi số câu trắc nghiệm Nam đã giải trong đợt ôn thi là a (với $a > 2$).

Trong đó Nam làm đúng b câu.

Khi đó, theo đề bài ta có: $b + 2 = 76\%a$ và $b = 75\%(a - 2)$

Suy ra: $76\%a - 2 = 75\%a - 1,5$

$$76\%a - 75\%a = 2 - 1,5$$

$$1\%a = 0,5$$

$$a = 50$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Câu	Câu hỏi	Đáp án đúng
Câu 2	Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5 . Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68 . Số đó là?	
Câu 3	Tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng. Tìm hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỉ đã cho?	
Câu 4	Một cửa hàng mua sắm trên Internet cứ cách 495 giờ lại gửi email quảng cáo đến khách hàng. Nếu lần gần đây nhất Nam nhận quảng cáo là thứ Ba, thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ là ngày thứ mấy?	
Câu 5	Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $21m$ và tỉ lệ giữa chúng là 5 và 8 . Diện tích khu vườn bằng bao nhiêu.	
Câu 6	Mai mua nhầm 5 ổ bánh mì và 2 chai sữa, nên đã trả lại hàng và đồng thời mua lại 2 ổ bánh mì và 5 chai sữa. Tổng số tiền lần này rẻ hơn lần trước 4200 đồng. Vậy giá tiền 1 chai sữa ít hơn giá tiền 1 ổ bánh mì là bao nhiêu đồng?	

Đáp án

Câu	Câu hỏi	Đáp án đúng
Câu 2	Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5 . Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 68 . Số đó là?	75
Câu 3	Tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng. Tìm hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỉ đã cho?	- 1
Câu 4	Một cửa hàng mua sắm trên Internet cứ cách 495 giờ lại gửi email quảng cáo đến khách hàng. Nếu lần gần đây nhất Nam nhận quảng cáo là thứ Ba, thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ là ngày thứ mấy?	Thứ 2
Câu 5	Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng $21m$ và tỉ lệ giữa chúng là 5 và 8 . Diện tích khu vườn bằng bao nhiêu.	$1960 m^2$

Câu 6	Mai mua nhầm 5 ổ bánh mì và 2 chai sữa, nên đã trả lại hàng và đồng thời mua lại 2 ổ bánh mì và 5 chai sữa. Tổng số tiền lần này rẻ hơn lần trước 4200 đồng. Vậy giá tiền 1 chai sữa ít hơn giá tiền 1 ổ bánh mì là bao nhiêu đồng?	1300
--------------	--	------

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Nhân dịp trồng cây đầu xuân, một trường THCS có ba lớp 7A; 7B; 7C tham gia trồng cây.

Nhà trường giao chỉ tiêu trồng cây cho từng lớp. Sau buổi làm việc thứ nhất thì thấy $\frac{1}{3}$ số cây trồng được của lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số cây trồng được của lớp 7B và bằng $\frac{3}{5}$ số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C. Tính số cây còn lại chưa trồng của lớp 7C sau buổi làm việc thứ nhất. Biết rằng tổng số cây đã trồng trong buổi thứ nhất của hai lớp 7A và 7B là 39 cây.

Lời giải

Gọi số cây lớp 7A trồng được trong buổi thứ nhất là $x, (x \in \mathbb{N}^*)$

Gọi số cây lớp 7B trồng được trong buổi thứ nhất là $y, (y \in \mathbb{N}^*)$

Gọi số cây lớp 7C chưa trồng được trong buổi thứ nhất là $z, (z \in \mathbb{N}^*)$

$$\frac{1}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{3}{5}z \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{9}x \\ z = \frac{5}{9}x \end{cases}$$

Theo đề:

Tổng số cây lớp 7A và 7B đã trồng được trong buổi thứ nhất là 39 cây nên

$$x + y = 39 \Leftrightarrow x + \frac{4}{9}x = 39 \Leftrightarrow \frac{13}{9}x = 39 \Leftrightarrow x = 27$$

$$z = \frac{5}{9}x = \frac{5}{9} \cdot 27 = 15$$

Suy ra

Vậy số cây chưa trồng của lớp 7C là 15 cây.

Câu 2. (HSG 7 huyện Ý Yên, tỉnh Nam Định 2021 - 2022)

Hai xe ô tô khởi hành cùng một lúc từ hai địa điểm A và B , đi ngược chiều nhau trên cùng một tuyến đường. Đến điểm gặp nhau, xe thứ hai đi được quãng đường dài hơn xe thứ nhất là 20 km. Biết rằng nếu đi hết quãng đường AB , xe thứ nhất đi hết 4 giờ 15 phút, xe thứ hai đi hết 3 giờ 45 phút. Tính độ dài quãng đường AB .

Lời giải

$$\text{Đổi } 4 \text{ giờ } 15 \text{ phút} = \frac{17}{4} \text{ giờ}, 3 \text{ giờ } 45 \text{ phút} = \frac{15}{4} \text{ giờ}.$$

Gọi a (km/h) và b (km/h) lần lượt là vận tốc xe ô tô xuất phát từ A và xuất phát từ B .
Điều kiện $a > 0$, $b > 0$.

Hai xe ô tô cùng khởi hành và đi ngược chiều nhau, đến điểm gặp nhau xe thứ hai đi được quãng đường dài hơn xe thứ nhất là 20 km nên vị trí gặp nhau cách điểm chính giữa đoạn đường AB là 10 km.

Gọi độ dài quãng đường AB là s (km), $s > 0$.

$$\frac{\frac{1}{2}s - 10}{a} = \frac{\frac{1}{2}s + 10}{b}$$

Vì thời gian đi ngược chiều của hai xe là như nhau nên ta có:

$$\frac{\frac{1}{2}s - 10}{a} = \frac{\frac{1}{2}s + 10}{b}$$

$$\text{hay } \frac{s - 20}{a} = \frac{s + 20}{b} \quad (1)$$

Nếu cùng đi hết quãng đường AB như nhau thì vận tốc và thời gian của mỗi xe là hai đại

lượng tỉ lệ nghịch, suy ra $\frac{17}{4}a = \frac{15}{4}b \Rightarrow 17a = 15b \Rightarrow \frac{a}{15} = \frac{b}{17} \quad (2)$

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được: $\frac{s - 20}{15} = \frac{s + 20}{17}$

$$17(s - 20) = 15(s + 20)$$

Suy ra

$$17s - 340 = 15s + 300$$

$$17s - 15s = 340 + 300$$

$$2s = 640$$

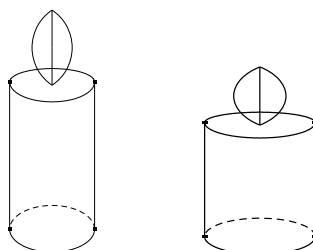
$$s = 320 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy quãng đường AB dài 320 km.

Câu 3. (HSG 7 huyện Quế Võ năm học 2022 - 2023)

Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao.

Tìm tỉ lệ chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến.



Lời giải

Gọi chiều cao ban đầu ngọn nến thứ nhất là x cm

Chiều cao ban đầu ngọn nến thứ hai là y cm (Điều kiện: $x > 0, y > 0$)

Giả sử tốc độ tiêu hao của hai cây nến khi cháy là không đổi.

Mỗi giờ cây nến thứ nhất giảm $\frac{x}{6}$ cm

↳ Sau 3 giờ chiều cao cây nến thứ nhất còn: $x - 3 \cdot \frac{x}{6} = \frac{x}{2}$ cm.

Mỗi giờ cây nến thứ hai giảm $\frac{y}{8}$ cm

↳ Sau 3 giờ chiều cao cây nến thứ hai còn: $y - 3 \cdot \frac{y}{8} = \frac{5y}{8}$ cm.

Vì sau 3 giờ cháy, hai cây nến có cùng chiều cao nên ta có: $\frac{x}{2} = \frac{5y}{8}$ ⇔ $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

Vậy tỉ lệ chiều cao ban đầu của hai ngọn nến là $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Đồng Xuân năm học 2022 - 2023)

Một người gửi tiết kiệm tại ngân hàng với số tiền là 200 triệu đồng, gửi theo lãi suất 6% kỳ hạn một năm lĩnh lãi mỗi quý (3 tháng). Theo quy định nếu đến hạn mà người gửi không đến lĩnh lãi thì số tiền lãi đó sẽ được nhập vào vốn gửi ban đầu. Do công việc người đó không đến lĩnh kỳ quý thứ nhất, các quý còn lại thì vẫn được lĩnh lãi bình thường. Vậy tổng số tiền gửi và lãi sau 1 năm là bao nhiêu?

Lời giải

Lãi suất mỗi quý là: $6\% : 4 = 1,5\%$

Tiền lãi quý thứ nhất là: $200 \cdot 1,5\% = 3$ (triệu)

Tổng số tiền cả vốn và lãi sau quý thứ nhất là: $200 + 3 = 203$ (triệu)

Tiền lãi quý thứ hai là: $203 \cdot 1,5\% = 3,045$ (triệu)

Tiền lãi quý thứ ba và thứ tư bằng tiền lãi quý thứ hai.

Vậy tổng số tiền cả vốn lẫn lãi sau 1 năm là: $200 + 3 + 3,045 \cdot 3 = 212,135$ (triệu)

Câu 5. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ năm học 2022 - 2023)

Hai cửa hàng A và B bán cùng một loại bút với giá 15000 đồng một chiếc, nhưng mỗi cửa hàng áp dụng hình thức khuyến mãi khác nhau:

Cửa hàng A: Nếu mua 3 chiếc trở lên thì được giảm 25% cho tổng số bút mua, nếu mua từ 10 chiếc trở lên thì từ chiếc thứ 10 trở đi thì mỗi chiếc lại được giảm thêm 5% so với giá giảm ban đầu.

Cửa hàng B: Cứ mua 3 chiếc thì được tặng thêm 1 chiếc.

Bạn An cần mua đúng 1^3 chiếc bút cho hoạt động nhóm thì bạn ấy nên mua ở cửa hàng nào để tiết kiệm và tiết kiệm bao nhiêu tiền so với cửa hàng kia.

Lời giải

Nếu mua ở cửa hàng A thì An phải trả số tiền là:

$$(9.15000).75\% + 4.15000 = 144000 \text{ (đồng)}$$

Nếu mua ở cửa hàng B , cứ 3 chiếc thì được tặng 1 chiếc, nên để có 1^3 chiếc bút thì An phải trả số tiền là: $9.15000 + 15000 = 150000$ (đồng)

Vậy An mua bút ở cửa hàng A thì sẽ tiết kiệm hơn, và tiết kiệm được:

$$150000 - 144000 = 6000 \text{ (đồng)}, \text{ so với mua ở cửa hàng } B.$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Một số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5 . Hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 6^8 . Số đó là?

Lời giải

Vì số tự nhiên lẻ có hai chữ số và chia hết cho 5 nên số đó có chữ số hàng đơn vị là chữ số 5

Gọi chữ số hàng chục là: a ($a \in \mathbb{N}^*, a < 10$)

Số đó có dạng $\overline{a5} = 10a + 5$

Vì hiệu của số đó và chữ số hàng chục của nó bằng 6^8 nên ta có phương trình:

$$10a + 5 - a = 6^8$$

$$9a = 63$$

$$a = 7$$

Vậy số đó là 75 .

Câu 7. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng. Tìm hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỷ đã cho?

Lời giải

Gọi 2 số hữu tỷ là: a, b , ($a, b \neq 0$)

Vì tích của hai số hữu tỷ bằng hiệu của chúng nên ta có: $ab = a - b$

Hiệu hai số nghịch đảo của hai số hữu tỷ đã cho là: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} = \frac{-(a - b)}{ab} = \frac{-ab}{ab} = -1$

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Một cửa hàng mua sắm trên Internet cứ cách 4^95 giờ lại gửi email quảng cáo đến khách hàng. Nếu lần gần đây nhất Nam nhận quảng cáo là thứ Ba, thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ là ngày thứ mấy?

Lời giải

Vì 1 ngày có 24 giờ nên 4^95 giờ là 20 ngày 15 giờ

Ta xét hai trường hợp:

TH1: Nếu Nam nhận email lúc 0h đến trước 9h sáng thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ vào ngày thứ ba.

TH2: Nếu Nam nhận email lúc 9h đến trước 24h thì lần nhận quảng cáo tiếp theo sẽ vào ngày thứ tư.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Một khu vườn hình chữ nhật có chiều dài hơn chiều rộng 21m và tỉ lệ giữa chúng là $\frac{5}{8}$. Diện tích khu vườn bằng bao nhiêu.

Lời giải

Gọi chiều dài hình chữ nhật là: x (m) ($x > 21$)

Thì chiều rộng là: $x - 21$ (m)

Vì tỉ lệ giữa chúng là $\frac{5}{8}$ và $\frac{8}{5}$ nên ta có phương trình:

$$\frac{x - 21}{5} = \frac{x}{8}$$

$$\text{P } 8x - 168 = 5x$$

$$\text{P } 3x = 168$$

$$\text{P } x = 56$$

Chiều dài hình chữ nhật là 56m và chiều rộng là $56 - 21 = 35$ (m)

Vậy diện tích khu vườn là $56 \cdot 35 = 1960$ (m²)

Câu 10. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Mai mua nhằm $\frac{5}{2}$ ổ bánh mì và $\frac{2}{1}$ chai sữa, nên đã trả lại hàng và đồng thời mua lại $\frac{2}{5}$ ổ bánh mì và $\frac{5}{1}$ chai sữa. Tổng số tiền lần này rẻ hơn lần trước 4200 đồng. Vậy giá tiền $\frac{1}{1}$ chai sữa ít hơn giá tiền $\frac{1}{1}$ ổ bánh mì là bao nhiêu đồng?

Lời giải

Gọi giá tiền $\frac{1}{1}$ chai sữa là: x (đồng) ($0 < x < 4200$)

Gọi giá tiền $\frac{1}{1}$ ổ bánh mì là: y (đồng) ($0 < y < 4200$)

Giá tiền Mai $\frac{5}{2}$ ổ bánh mì và $\frac{2}{1}$ chai sữa là: $2x + 5y$ (đồng)

Giá tiền Mai $\frac{2}{5}$ ổ bánh mì và $\frac{5}{1}$ chai sữa là: $5x + 2y$ (đồng)

Vì số tiền lần sau rẻ hơn lần trước 4200 đồng, nên ta có phương trình:

$$(2x + 5y) - (5x + 2y) = 4200$$

$$\text{P } 3y - 3x = 4200$$

$$\text{P } 3(y - x) = 4200$$

$$\text{P } y - x = 1400$$

Vậy giá tiền $\frac{1}{1}$ chai sữa ít hơn giá tiền $\frac{1}{1}$ ổ bánh mì là 1400 đồng.

Câu 11. (HSG 7 Huyện Tam Điệp, tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Ba tổ công nhân có mức sản xuất tỉ lệ với $5; 4; 3$. Tổ I tăng năng suất 10% , tổ II tăng năng suất 20% và tổ III tăng năng suất 30% . Do đó trong cùng một thời gian tổ I làm được nhiều hơn tổ III là 16 sản phẩm. Tính tổng số sản phẩm mà ba tổ làm được.

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số sản phẩm khoán của tổ I; II và III ($x; y; z \in \mathbb{N}^*$)

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} \Rightarrow z = \frac{3x}{5} \quad (1)$$

Do tổ I tăng năng suất 10% nên số sp tổ I làm được là $x + 10\% \cdot x = 1,1x$ (sp)

Do tổ II tăng năng suất 20% nên số sp tổ II làm được là $y + 20\% \cdot y = 1,2y$ (sp)

Do tổ III tăng năng suất 30% nên số sp tổ III làm được là $z + 30\% \cdot z = 1,3z$ (sp)

Do trong cùng một thời gian tổ I làm được nhiều hơn tổ III là 16 sản phẩm nên ta có:
 $1,1x - 1,3z = 16 \quad (2)$

$$\text{Thế (1) vào (2) ta có: } 1,1x - 1,3 \cdot \frac{3x}{5} = 16 \Rightarrow 0,32x = 16 \Rightarrow x = 50 \quad (\text{TMĐK})$$

$$\text{Thay } x = 50 \text{ vào (1) } \Rightarrow z = \frac{3 \cdot 50}{5} = 30 \quad (\text{TMĐK})$$

$$\text{Khi đó } y = 4 \cdot \frac{z}{3} = 4 \cdot \frac{30}{3} = 40 \quad (\text{TMĐK})$$

Vậy số sản phẩm khoán của tổ I, II và III lần lượt là $50; 40; 30$ sản phẩm.

$\Rightarrow$ Tổng số sản phẩm tổ I, II và III làm được là $1,1 \cdot 50 + 1,2 \cdot 40 + 1,3 \cdot 30 = 142$ sản phẩm.

Câu 12. (HSG 7 Huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Diện tích ba mặt của một hình hộp chữ nhật là 30 cm^2 , 40 cm^2 và 75 cm^2 . Hỏi thể tích của hình hộp đó bằng bao nhiêu cm^3 ?

Lời giải

Gọi kích thước ba cạnh của hình hộp chữ nhật lần là a, b, c ($a, b, c > 0, \text{cm}$)

Vì các mặt là các hình chữ nhật, nên diện tích ba mặt lần lượt là:

$$\begin{cases} ab = 30 \\ bc = 40 \\ ac = 75 \end{cases} \Rightarrow (abc)^2 = 30 \cdot 40 \cdot 75 \Rightarrow abc = 300$$

$$\text{Vậy thể tích của hình hộp chữ nhật là: } V = abc = 300 \text{ cm}^3$$

Câu 13. (HSG 7 Thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh 2022 - 2023)

Ông Bình mua một con nghé và một con bê vàng. Ông bán lại đồng giá 18 triệu mỗi con, do nghé mất giá nên ông chịu lỗ 20% , nhưng bù lại nhờ bê vàng lên giá nên ông lời được 20% . Hỏi ông Bình lời hay lỗ? Giải thích.

Lời giải

Coi giá mua của mỗi con là 100%

Giá bán của con nghé chiếm số phần trăm so với giá mua là $100 - 20 = 80\%$

Ông bình mua con nghé với giá $18\,000\,000 : 80\% = 22\,500\,000$ (đồng)

Giá bán của con bê chiếm số phần trăm so với giá mua là $100 + 20 = 120\%$

Ông Bình mua con bê với giá $18\,000\,000 : 120\% = 15\,000\,000$ (đồng)

Ông Bình mua con bê và con nghé với giá

$22\,500\,000 + 15\,000\,000 = 37\,500\,000$ (đồng)

Ông Bình bán một con bê với một con nghé với giá

$18\,000\,000 \cdot 2 = 36\,000\,000$ (đồng)

Số tiền ông Bình có được sau khi mua và bán là:

$36\,000\,000 - 37\,500\,000 = -1\,500\,000$ (đồng)

$\Rightarrow$ Ông Bình lỗ 1 500 000 đồng

Câu 14. (HSG 7 huyện năm 2017 - 2018)

Bốn con Ngựa ăn hết một xe cỏ trong một ngày, một con Dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày, hai con Cừu trong 24 ngày ăn hết 2 xe cỏ. Hỏi chỉ ba con (ngựa, dê và cừu) ăn hết hai xe cỏ trong mấy ngày ?

Lời giải

Vì 4 con ngựa cùng ăn hết 1 xe cỏ trong 1 ngày, do đó một con ngựa ăn hết 1 xe cỏ trong 4 ngày.

Một con dê ăn hết một xe cỏ trong 6 ngày.

Hai con cừu ăn hết hai xe cỏ trong 24 ngày nên một con cừu ăn hết một xe cỏ trong 24 ngày nên một con cừu ăn hết 1 xe cỏ trong 12 ngày.

Trong một ngày: một con ngựa ăn hết $\frac{1}{4}$ xe cỏ, một con dê ăn hết $\frac{1}{6}$ xe cỏ, một con cừu ăn hết $\frac{1}{12}$ xe cỏ

Cả ba con ăn hết $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$ (xe cỏ).

Vậy cả 3 con ăn hết 1 xe cỏ trong 2 ngày nên ăn hết 2 xe cỏ trong 4 ngày.

Dạng 6. Các bài toán về so sánh

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 Huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2022 - 2023)

Cho biểu thức
$$N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}.$$
 Khẳng định đúng là:

A. $N < \frac{3}{16}$. B. $N > \frac{3}{16}$. C. $\frac{3}{16} < N < \frac{3}{4}$. D. $N > \frac{3}{4}$.

Lời giải

$$3N = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3N + N = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}.$$

$$3N + N = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\frac{4N}{3} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{101}}$$

$$4N + \frac{4N}{3} = 1 - \frac{101}{3^{100}} - \frac{100}{3^{101}}$$

$$\frac{16N}{3} = 1 - \frac{101}{3^{100}} - \frac{100}{3^{101}} < 1 \quad \left(\text{vì } \frac{101}{3^{100}} + \frac{100}{3^{101}} > 0 \right) \Rightarrow N < \frac{3}{16}$$

Vậy $N < \frac{3}{16}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Tp. Thanh Hóa 2022 - 2023; trường THCS Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn 2017-2018)

Cho $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$ (Thêm bớt 49 đơn vị)

$$B = 49 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{8}{9} + 1 - \frac{15}{16} + 1 - \frac{24}{25} + \dots + 1 - \frac{2499}{2500}$$

$$B = 49 - \frac{3}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$$

Đặt $M = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$

Áp dụng tính chất $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$

Ta có: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} < \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{50 \cdot 49}$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

$$M > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} \dots \frac{1}{50.51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \dots \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

Lại có:

$$M > \frac{1}{2} - \frac{1}{50} = \frac{49}{100} > 0$$

Hay

Từ đó suy ra $0 < M < 1$, Do đó $B = 49 - M$ không phải là một số nguyên.

Câu 2. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$. Chứng minh rằng: $A < \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$$

Ta có:

$$4A = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}}$$

$$4A - A = \frac{3}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2021}} - \frac{1}{4} - \frac{2}{4^2} - \frac{3}{4^3} - \dots - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{1}{3} - \frac{1}{4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}}$$

$$3A = \frac{4}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^{2021}} - \frac{2022}{4^{2022}} < \frac{4}{3}$$

$$A < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A < \frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 3. (HSG 7 huyện Thọ Xuân, tỉnh Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$

Lời giải

$$S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3}$$

Đặt

Ta có:

$$S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023.2024}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2022.2023.2024} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2022.2023} - \frac{1}{2023.2024}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4.5} - \frac{1}{2023.2024} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow S < \frac{1}{40} \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} > \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024.2025}$$

Ta lại có:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5.6.7} + \frac{2}{6.7.8} + \dots + \frac{2}{2023.2024.2025}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2023.2024} - \frac{1}{2024.2025}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5.6} - \frac{1}{2024.2025} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{30} - \frac{1}{2.2024.2025} > \frac{1}{60} - \frac{1}{2.2024.2025} > \frac{1}{60} - \frac{1}{780} = \frac{1}{65}$$

$$\Rightarrow S > \frac{1}{65} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{65} < S < \frac{1}{40}$

$$\text{Vậy } \frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Lời giải

Sử dụng tính chất: $0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a}$.

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có:

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}, \text{ mà } \frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c} \quad (\text{do } a, b, c \text{ dương})$$

$$\text{Do đó ta có: } \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c} \quad (1)$$

Chúng minh tương tự ta được :

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c} \quad (2); \quad \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c} \quad (3)$$

Cộng về ba bất đẳng thức (1) (2) (3) ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{36}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}}$

Suy ra: $5A = 1 - \frac{2}{5^1} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \frac{5}{5^4} - \dots + \frac{2021}{5^{2020}} - \frac{2022}{5^{2021}}$

Suy ra: $5A + A = 6A = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \dots - \frac{1}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2021}}$

Đặt $P = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} + \dots - \frac{1}{5^{2021}}$

Suy ra: $5P = 5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \dots - \frac{1}{5^{2020}}$

Suy ra: $6P = 5 - \frac{1}{5^{2021}} \Rightarrow P = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}}$

Suy ra: $6A = \frac{5}{6} - \frac{1}{6 \cdot 5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{6} \Rightarrow A < \frac{5}{36}$

Vậy $A < \frac{5}{36}$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường Hoàng Quyên 2018 - 2019; huyện Hương Sơn 2017 - 2018; huyện Hương Khê 2016 - 2017)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Lời giải

* Nếu $a+b+c=0$ thì $a=b=c=0$

Khi đó $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} = \frac{0}{bc+1} + \frac{0}{ac+1} + \frac{0}{ab+1} = 0 \leq 2$

* Nếu $a + b + c \neq 0$

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$

$$\Rightarrow (1-a)^3 \geq 0; (1-b)^3 \geq 0$$

$$\Rightarrow (1-a)(1-b)^3 \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 + ab^3 \geq a + b(1)$$

$$\text{Lại có } 1 + ab^3 \geq c(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2(1+ab)^3 \geq a + b + c$

$$\Rightarrow \frac{c}{2(1+ab)} \leq \frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{2(1+ac)} \leq \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{2(1+ab)} \leq \frac{c}{a+b+c}$

Từ đó suy ra $\frac{a}{2(1+bc)} + \frac{b}{2(1+ac)} + \frac{c}{2(1+ab)} \leq \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Từ hai trường hợp trên suy ra $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$ đpcm

Câu 7. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3} - \frac{1}{300} + \frac{1}{4} - \frac{1}{400} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{10000} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3} - \frac{1}{300} + \frac{1}{4} - \frac{1}{400} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{10000} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100} \end{aligned}$$

Vậy: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{99}{100}$

Câu 8. (HSG 7 thị xã Nghi Sơn 2022 - 2023)

Cho $S_n = \frac{1^2 - 1}{1} + \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$). Chứng minh S_n không là số nguyên.

Lời giải

Ta có:

$$S_n = \frac{1^2 - 1}{1} + \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= n - 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{n^2} < n - 1 \Rightarrow S_n < n - 1 \quad (1)$$

Lại có

$$S_n = n - 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$> n - 1 - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right)$$

$$= n - 1 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= n - 1 - \frac{1}{n} > n - 2 \Rightarrow S_n > n - 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $n - 2 < S_n < n - 1$ Chứng tỏ S_n không là số nguyên.

Câu 9. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên 2022 - 2023)

Chứng tỏ: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$

Lời giải

Đặt

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}}$$

$$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{2018}}$$

Suy ra:

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}}$$

Đặt

$$M = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}}$$

$$\Rightarrow 3M = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$$

$$\Rightarrow 2M = 1 - \frac{1}{3^{2018}} < 1 \Rightarrow M < \frac{1}{2}$$

Ta có:

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}} = 1 + M - \frac{2019}{3^{2019}} < 1 + M < 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3^{2023} - 4}{3^{2022} - 1}$ và $C = \frac{3^{2022} - 4}{3^{2021} - 1}$. Hãy so sánh B và C.

Lời giải

$$B = \frac{3^{2023} - 4}{3^{2022} - 1} \Rightarrow \frac{1}{3}B = \frac{3^{2023} - 4}{3^{2023} - 3} = 1 - \frac{1}{3^{2023} - 3}$$

$$C = \frac{3^{2022} - 4}{3^{2021} - 1} \Rightarrow \frac{1}{3}C = \frac{3^{2022} - 4}{3^{2022} - 3} = 1 - \frac{1}{3^{2022} - 3}$$

Vì $3^{2023} - 3 > 3^{2022} - 3 \Rightarrow \frac{1}{3^{2023} - 3} < \frac{1}{3^{2022} - 3}$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{3^{2023} - 3} > 1 - \frac{1}{3^{2022} - 3} \Rightarrow \frac{1}{3}B > \frac{1}{3}C$$

Vậy $B > C$

Câu 11. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)

Giả sử x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2, chứng minh:

$$S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2$$

Lời giải

Giả sử x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác và có chu vi bằng 2 nên

$$0 < x \leq y \leq z < 1 \text{ suy ra: } x-1 < 0; y-1 < 0$$

suy ra :

$$(x-1)(y-1) < 0 \text{ suy ra: } xy+1 > x+y \text{ suy ra: } \frac{1}{xy+1} < \frac{1}{x+y}$$

suy ra

$$\frac{z}{xy+1} < \frac{z}{x+y} \quad (1)$$

Suy ra:

$$\frac{x}{yz+1} < \frac{x}{y+z} \quad (2); \quad \frac{y}{xz+1} < \frac{y}{x+z} \quad (3)$$

Chứng minh tương tự :

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được :

$$\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (4)$$

$$\frac{x}{y+z} < \frac{x+x}{x+y+z} \text{ suy ra: } \frac{x}{y+z} < \frac{2x}{x+y+z}$$

Mà :

$$\frac{y}{x+z} < \frac{2y}{x+y+z}; \quad \frac{z}{x+y} < \frac{2z}{x+y+z}$$

Chứng minh tương tự :

$$\text{suy ra: } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z}$$

$$\text{suy ra: } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < \frac{2(x+y+z)}{x+y+z}$$

$$\text{suy ra: } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} < 2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) (đpcm)

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Hồng Lĩnh 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} - \frac{1}{101^2}$. Hãy so sánh B với $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

B là tích của 99 số âm, do đó:

$$-B = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} - \frac{1}{101^2}$$

$$-B = \frac{1.3}{2^2} - \frac{2.4}{3^2} + \frac{3.5}{4^2} - \frac{4.6}{5^2} + \frac{5.7}{6^2} - \frac{6.8}{7^2} + \dots + \frac{99.101}{100^2}$$

$$-B = \frac{1.2.3.4 \dots 98.99}{2.3.4 \dots 99.100} - \frac{3.4.5 \dots 100.101}{2.3.4 \dots 99.100}$$

$$-B = \frac{1}{100} - \frac{101}{2}$$

$$-B = \frac{101}{200}$$

$$\text{Vì } \frac{101}{200} > \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \text{ nên } -B > \frac{1}{2} \text{ p } B < -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } B < -\frac{1}{2}$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Dân Chủ 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng $B < 1$.

Lời giải

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$B = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Vì n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên $\frac{1}{n^2} > 0$ và $1 - \frac{1}{n^2} < 1$.

Vậy $B < 1$.

Câu 14. (HSG 7 trường Trần Đức Thông, huyện Hưng Hà; huyện Mường Lát 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh rằng: $P < \frac{3}{16}$.

Lời giải

$$3P = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

Xét

$$\Rightarrow 3P + P = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{98}{3^{99}} + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 4P = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 12P = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 4P + 12P = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$\Rightarrow 16P = 3 - \frac{101}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 16P = 3 - \frac{303}{3^{100}} - \frac{100}{3^{100}} = 3 - \frac{403}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{16} - \frac{403}{16 \cdot 3^{100}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{16} - \frac{403}{16 \cdot 3^{100}} < \frac{3}{16} \Rightarrow P < \frac{3}{16}$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2 + 1} + \frac{2001}{2000^2 + 2} + \dots + \frac{2001}{2000^2 + 2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Lời giải

Tổng A có tất cả 2000 số hạng.

$$\text{Ta có: } \frac{2001}{2000^2 + 1} > \frac{2001}{2000^2 + 2} > \frac{2001}{2000^2 + 3} > \dots > \frac{2001}{2000^2 + 2000}$$

$$\Rightarrow A > \frac{2001}{2000^2 + 2000} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000(2000 + 1)} = 1 \quad (1)$$

Mặt khác:

$$A < \frac{2001}{2000^2 + 1} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{2000^2 + 2000}{2000^2 + 1}$$

$$= \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000^2 + 1) + 1999}{2000^2 + 1} = 1 + \frac{1999}{2000^2 + 1} < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < A < 2$ và $1 < A^2 < 4$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Tân Tiến 2022 - 2023)

So sánh B và C , biết:

$$B = \frac{1}{1010} + \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

$$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

Lời giải

$$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

$$= \frac{1}{1010} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2022}$$

$$= \frac{1}{1010} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1011} - \frac{1}{1012} + \frac{1}{1013} + \dots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{1011} - \frac{1}{1010}$$

$$= \frac{1}{1011} + \frac{1}{1012} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$$

⇒ $B = C$

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

$$B = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2018.2020}$$

Cho

So sánh B với $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$B = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2018.2020}$$

$$B = \frac{4}{1.3} \cdot \frac{9}{2.4} \cdot \frac{16}{3.5} \dots \frac{2019.2019}{2018.2020}$$

$$B = \frac{2.2.3.3.4.4 \dots 2019.2019}{1.3.2.4.3.5 \dots 2018.2020}$$

$$B = \frac{2.3.4 \dots 2019.2.3.4 \dots 2019}{1.2.3 \dots 2018.3.4.5 \dots 2020}$$

$$B = 2019 \cdot \frac{2}{2020} = \frac{2019}{1010}$$

Ta có $\frac{2019}{1010} < \frac{2020}{1010} \Rightarrow B < 2$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Hiệp Đức; trường Lục Nam, huyện Thái Thụy; huyện Bến Lức 2018 - 2019; huyện Than Uyên 2017 - 2018; tỉnh Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$
 Chứng tỏ rằng S không là số tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 2$

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \\ &= \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2} = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \\ &\Rightarrow S < n - 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4}; \dots; \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

$$\Rightarrow (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > (n-1) - 1 = n-2$$

$$\Rightarrow S > n-2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $n-2 < S < n-1$ hay S không là số nguyên

Câu 19. (HSG 7 trường Thanh Thùy; trường Bảo Phương 2018 - 2019)

Cho $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$
 Chứng minh rằng:

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} \\ 3B &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} \\ 3B - B &= 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \\ \Rightarrow B &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$B < \frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 20. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2022 - 2023)

Cho $M = \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{53.55}$. Tính M và so sánh M với $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \frac{3}{3.5} + \frac{3}{5.7} + \frac{3}{7.9} + \frac{3}{9.11} + \dots + \frac{3}{53.55} \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \dots + \frac{1}{53.55} \right) \\ &= \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \frac{2}{9.11} + \dots + \frac{2}{53.55} \right) \\ &= \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \dots + \frac{2}{53 \cdot 55} \right) \\ &= \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{53} \cdot \frac{1}{55} \right) \\ &= \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{55} \right) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{110 - 1}{165} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{109}{165} = \frac{26}{55} \end{aligned}$$

$$M = \frac{26}{55} < \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Ta có

Câu 21. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2022 - 2023)

Cho tổng $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{2024^2} + \frac{1}{2025^2}$. So sánh S với 1.

Lời giải

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}, k > 1)$$

Ta có

Thay $k = 10; 11; 12; \dots; 2025$,

$$S < \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$$

ta có

$$S < \frac{1}{9} - \frac{1}{2025} < 1$$

Vậy $S < 1$.

Câu 22. (HSG 7 Bắc Giang năm học 2022 - 2023)

Chúng minh rằng $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} \\ &= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2024^2 - 2023^2}{2023^2 \cdot 2024^2} \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} - \frac{1}{2024^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2024^2} \end{aligned}$$

Ta thấy $1 - \frac{1}{2024^2} < 1$

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{4047}{2023^2 \cdot 2024^2} < 1$$

Do vậy

Câu 23. (HSG 7 huyện Đồng Xuân năm học 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chúng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \\ &= \frac{5}{6} - \frac{1}{64} + \frac{1}{50} - \frac{1}{66} + \frac{1}{70} - \frac{1}{88} + \dots - \frac{1}{990} + \frac{1}{1000} < \frac{5}{6} \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác: $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900}$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{120} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} = \frac{7}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} > \frac{7}{12} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 24. (HSG 7 trường Điện Hồng; trường Hồng Dương 2018-2019; trường Bích Hòa 2017-2018; huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

Chúng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$.

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{4}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$$

$$A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101}$$

$$A > \frac{1}{6}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Câu 25. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thường Tín 2018 - 2019)

$$A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2^3 > 1.2.3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{1}{1.2.3}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{3^3} < \frac{1}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2017.2018.2019}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018.2019}$$

$$A < \frac{1-1}{2.1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{2019-2017}{2017.2018.2019}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2.1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} - \frac{1}{2018.2019}$$

$$A < \frac{1}{2.1.2} - \frac{1}{2018.2019}$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2018.2019.2}$$

$$A < \frac{1}{2^2}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Câu 26. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

$$\text{Chứng minh rằng: Nếu } 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9 \text{ thì: } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$.

Câu 27. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Cát Tiên 2018 - 2019)

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Hãy so sánh $\frac{a}{b}$ với $\frac{a+c}{b+d}$.

Lời giải

Vì a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ nên $ad < bc$ (1)

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)} \quad (2)$$

Mặt khác:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

Câu 28. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Lục Nam 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$.

Lời giải

$$A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3}$$

Đặt

$$A < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2003.2004.2005}$$

$$A < \frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.5} - \dots + \frac{1}{2003.2004} - \frac{1}{2004.2005}$$

$$A < \frac{1}{4.5} - \frac{1}{2004.2005}$$

$$A < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4.5}$$

$$A < \frac{1}{40}$$

Vậy $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$

Câu 29. (HSG 7 trường THCS Hương - Điền - Nam Hương năm 2017 - 2018)

Chứng minh: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$

Lời giải

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 30. (HSG 7 huyện Năm Căn, huyện Dương Nam Căn 2017 - 2018)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Lời giải

Ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Vậy

Câu 31. (HSG 7 trường THCS Tào Sơn, huyện Anh Sơn 2017-2018)

Chứng minh rằng: $A = \frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \dots + \frac{19}{9^2.10^2} < 1$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \dots + \frac{19}{9^2.10^2}$

$$= \frac{2^2 - 1^2}{1^2.2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2.3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2.4^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2.10^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$$

Câu 32. (HSG 7, trường THCS Trường Sa, NH: 2017-2018)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$

Lời giải

$$x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$$

Xét

Vì $0 < x < 1; n \geq 2 \Rightarrow x^{n-1} < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0$ mà $x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$ nên $x^n < x$ (đpcm)

Câu 33. (HSG 7 Đề 240)

Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a, b, c > 0$

a) Chứng minh $M > 1$.

b) Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Lời giải

a) Vì $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

$$\Rightarrow M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Vậy $M > 1$

b) Mà $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{a}{a+c}$

$$= \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} = 3$$

$$\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} > 1$$

Vì (tương tự câu a)

$$M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad (2)$$

Suy ra:

Từ (1) và (2) suy ra: $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên.

Câu 34. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2017 - 2018)

Tìm tỉ số của A và B , biết rằng:

$$A = \frac{1}{1.1981} + \frac{1}{2.1982} + \dots + \frac{1}{n.(1980+n)} + \dots + \frac{1}{25.2005}$$

$$B = \frac{1}{1.26} + \frac{1}{2.27} + \dots + \frac{1}{m.(25+m)} + \dots + \frac{1}{1980.2005}$$

Trong đó, A có 25 số hạng và B có 1980 số hạng.

Lời giải

$$\frac{1}{n.(1980+n)} = \frac{1}{1980} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1980+n} \right); \frac{1}{m.(25+m)} = \frac{1}{25} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{25+m} \right)$$

Ta có:

Áp dụng tính A và B ta được:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1980} - \frac{1}{1981} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1982} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{2005} \\
 &= \frac{1}{1980} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25} - \frac{1}{1981} - \frac{1}{1982} - \dots - \frac{1}{2005} \\
 B &= \frac{1}{25} - \frac{1}{26} + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{1980} - \frac{1}{2005} \\
 &= \frac{1}{25} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1980} - \frac{1}{26} - \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{2005} \\
 \frac{A}{B} &= \frac{1}{1980} : \frac{1}{25} = \frac{5}{396}
 \end{aligned}$$

Vậy

Câu 35. (HSG 7 năm 2022 - 2023)

Không dùng máy tính, hãy so sánh: $A = \frac{2006}{2007} + \frac{2007}{2008} + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2006}$ với 4.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2007-1}{2007} + \frac{2008-1}{2008} + \frac{2009-1}{2009} + \frac{2006+3}{2006} \\
 &= 1 - \frac{1}{2007} + 1 - \frac{1}{2008} + 1 - \frac{1}{2009} + 1 + \frac{3}{2006} \\
 &= 4 + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2008} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2009} \\
 \text{Do } \frac{1}{2006} &> \frac{1}{2007}, \frac{1}{2006} > \frac{1}{2008}, \frac{1}{2006} > \frac{1}{2009} \\
 \text{Þ } A &> 4
 \end{aligned}$$

Câu 36. (HSG 7 năm 2022 - 2023; huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

So sánh A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = \frac{-2012}{4025}$; $B = \frac{-1999}{3997}$

b) $A = \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000}$; $B = \frac{2012}{1001} + \frac{2012}{1002} + \frac{2012}{1003} + \dots + \frac{2012}{2000}$

Lời giải

a) $\frac{2012}{4025} < \frac{2012}{4024} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} = \frac{1999}{3998} < \frac{1999}{3997}$

Þ $\frac{2012}{4025} < \frac{1999}{3997}$ Þ $\frac{-2012}{4025} > \frac{-1999}{3997}$

Vậy $A > B$

b) $A = \frac{2011}{1.2} + \frac{2011}{3.4} + \frac{2011}{5.6} + \dots + \frac{2011}{1999.2000}$

$$= 2011 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000} \right)$$

$$= 2011 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{1999} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000} \right)$$

$$= 2011 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{1999} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2000} \right)$$

$$= 2011 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{1999} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1000} \right)$$

$$= 2011 \cdot \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{1999} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1000} \right)$$

$$B = 2012 \cdot \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} + \dots + \frac{1}{2000} \right)$$

Suy ra $A < B$

Câu 37. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

a) Chứng minh: $\frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$

b) Cho $P = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{99}{100}$. Chứng minh rằng $P < \frac{1}{10}$

Lời giải

a) Đặt $A = \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2}$ (1)

Ta thấy tổng A có 2022 số hạng

$$A = \frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2}$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2022^2} + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2023^2}$$

2018 số hạng

$$A = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2}$$

2022 số hạng

$$A = 2022 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2023^2} \quad (2)$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} \\ \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} \\ \dots \\ \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022.2023} \end{array} \quad \text{và} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \dots \\ \frac{1}{2023^2} < \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \end{array}$$

Ta có:

Suy ra: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} = 1 - \frac{1}{2023} < 1$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} < 1$$

$$2022 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} < 2022 + 1 = 2023$$

Chúng ta có: $\frac{1.3+2}{2^2} + \frac{2.4+2}{3^2} + \frac{3.5+2}{4^2} + \dots + \frac{2021.2023+2}{2022^2} + \frac{2022.2024+2}{2023^2} < 2023$

b) Ta đi chứng minh bài toán phụ sau: $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Thật vậy: với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^2 + n < n^2 + n + n + 1$

$$n(n+1) < (n+1)^2$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

$$n(n+2) < (n+1)(n+1)$$

Nhân chéo chứng minh

Cho n các giá trị từ 1 đến 99 ta có:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}; \frac{3}{4} < \frac{5}{6}; \frac{5}{6} < \frac{6}{7}; \dots; \frac{99}{100} < \frac{100}{101}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots \times \frac{100}{101}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{99}{100} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots \times \frac{100}{101} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{99}{100}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \times \dots \times \frac{99}{100} < \frac{1}{101}$$

Câu 38. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Chứng minh rằng $\frac{1}{4048} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2021}{2022} \times \frac{2023}{2024} < \frac{1}{2025}$

Lời giải

$$\frac{1}{4048} < \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{2021}{2022} \times \frac{2023}{2024} < \frac{1}{2025}$$

Với mọi $n \geq 1$ ta có: $\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} < \frac{n^2}{n^2+2n} = \frac{n}{n+2}$

Từ đó suy ra: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{2021}{2022} \times \frac{2023}{2024} < \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \frac{2021}{2023} \times \frac{2013}{2025} = \frac{1}{2025}$

Với mọi $n \geq 2$ ta có: $\frac{n^2}{(n+1)^2} > \frac{n^2-1}{(n+1)^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n-1}{n+1}$

Từ đó suy ra: $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{2021}{2022} \times \frac{2023}{2024} > \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{4}{6} \times \frac{2020}{2022} \times \frac{2022}{2024} = \frac{1}{4048}$

Câu 39. (HSG 7 huyện, Thái Thụy 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}$. So sánh B với $\frac{1}{10}$.

Lời giải

$$B = \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{11^{100}}$$

$$11B = 1 + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{11^{99}}$$

$$11B - B = 1 - \frac{1}{11^{100}}$$

$$10B = 1 - \frac{1}{11^{100}} < 1 \Rightarrow B < \frac{1}{10}$$

Vậy $B < \frac{1}{10}$

Câu 40. (HSG 7 trường Tri Thức 2022 - 2023)

Chứng minh: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$

$$< \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{49.50} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{50} = \frac{1}{8} - \frac{1}{200} < \frac{1}{8} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 41. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho dãy số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ được xác định như sau: $a_1 = 1$; $a_2 = 1 + \frac{1}{2}$; $a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $\dots$;
 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Lời giải

Với mọi " $k \geq 2$ ", ta có: $\frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$).

Lại có: $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k}$

Suy ra: $\frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$

Cho $k = 2; 3; \dots; n$, ta có:

$$\frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \quad \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \quad \dots; \quad \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1$$

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 1 + 1 = 2$$

Suy ra: (đpcm)

Câu 42. (HSG 7 huyện Tiên Du 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$

Lời giải

Ta có $A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$

Đ $7^2 \cdot A = 7^2 \cdot \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$

Đ $49A = 1 - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} - \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$

Đ $49A + A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$

Đ $50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1$ Đ $A < \frac{1}{50}$

Vậy $A < \frac{1}{50}$.

Câu 43. (HSG 7 huyện Trục Ninh năm 2017 - 2018)

Cho $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$. Chứng minh rằng $A < \frac{7}{36}$.

Lời giải

Ta có $A = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{99}} + \frac{100}{7^{100}}$

$$\Rightarrow 7A = 1 + \frac{2}{7^1} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{7^3} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}}$$

$$\Rightarrow 7A - A = \frac{99}{7^1} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots + \frac{99}{7^{98}} + \frac{100}{7^{99}} - \frac{99}{7^0} - \frac{2}{7^1} - \frac{3}{7^2} - \frac{4}{7^3} - \dots - \frac{99}{7^{99}} - \frac{100}{7^{100}}$$

$$\Rightarrow 6A = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}} - \frac{100}{7^{100}}$$

$$\text{Đặt } B = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{99}}$$

$$\Rightarrow 7B = 7 + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 7B - B = \frac{99}{7^0} + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{99}{7^1} - \frac{1}{7^0} - \frac{1}{7^1} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^4} - \dots - \frac{1}{7^{99}} - \frac{1}{7^{100}}$$

$$\Rightarrow 6B = 7 - \frac{1}{7^{99}} < 7 \Rightarrow B < \frac{7}{6}$$

$$6A = B - \frac{100}{7^{100}} < B$$

Lại có:

$$\Rightarrow 6A < \frac{7}{6} \Rightarrow A < \frac{7}{36}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{7}{36}.$$

Câu 44. (HSG 7 huyện, Nga Sơn 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Lời giải

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2022} + 1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{2023}} + \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2022}} + \dots + \frac{1}{2^{2023}} + \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + 2^2 \times \frac{1}{2^3} + \dots + 2^{2022} \times \frac{1}{2^{2023}} - \frac{1}{2^{2023}}$$

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2006}} = 1 + 2016 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2016}} = \frac{2023}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2023}} > \frac{2023}{2}$$

$$\text{Vậy } A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1} > \frac{2023}{2}.$$

Câu 45. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$
 Chứng minh rằng:

Lời giải

$$A = \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Ta có:

Câu 46. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng: $B < 1$.

Lời giải

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 \cdot n^2}$$

$$B = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$B = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Vì n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1$.

Vậy $B < 1$.

Câu 47. (HSG 7 huyện Sơn Dương năm 2016 - 2017)

Chứng minh rằng: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\frac{a^{2014} + b^{2014}}{c^{2014} + d^{2014}} = \frac{a-b}{c-d}$

Lời giải

Từ $\frac{a}{d} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a-b}{c-d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a-b}{c-d} = \frac{a-b}{c-d} \quad (1)$

Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{c-d} = \frac{a-b}{c-d} = \frac{a^{2014} + b^{2014}}{c^{2014} + d^{2014}} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^{2014} + b^{2014}}{c^{2014} + d^{2014}} = \frac{a-b}{c-d}$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

Cho $A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$
 Chứng minh rằng:

Lời giải

Tổng A không có thừa số chung, do vậy ta đánh giá từng số hạng

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{2}{2.4}$$

$$\frac{2}{5^2} = \frac{2}{25} < \frac{2}{24} = \frac{2}{4.6}$$

$$\frac{2}{7^2} = \frac{2}{49} < \frac{2}{48} = \frac{2}{6.8}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{2}{2007^2} < \frac{2}{2006.2008}$$

$$A < \frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \dots + \frac{2}{2006.2008} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2008} = \frac{1003}{2008}$$

Câu 49. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

Cho $M = \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}}; N = \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}$. Hãy so sánh M và N .

Lời giải

Ta có: $2022 > 2021 \Rightarrow \frac{2022}{2021} > 1$

$$2024 > 2023 \Rightarrow \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024} > \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}$$

Mà

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024} > 1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2024}} < \frac{1}{1 + \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2023}}$$

$$\Rightarrow \frac{2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} < \frac{2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}$$

$$\Rightarrow \frac{2.2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} < \frac{2.2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2.2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} > 1 - \frac{2.2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}$$

$$\Rightarrow \frac{2022^{2024} - 2021^{2024}}{2022^{2024} + 2021^{2024}} > \frac{2022^{2023} - 2021^{2023}}{2022^{2023} + 2021^{2023}}$$

Vậy $M > N$.

Câu 50. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2021.2023}$$

So sánh A với 1 biết:

Lời giải

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1.3} + \frac{1}{1.3} \times \frac{2}{2.4} + \frac{1}{2.4} \times \frac{2}{3.5} + \frac{1}{3.5} \times \frac{2}{2021.2023}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{3+1}{1.3} \times \frac{2.4+1}{2.4} \dots \frac{2021.2023+1}{2021.2023}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{2.2}{1.3} \times \frac{3.3}{2.4} \times \frac{4.4}{3.5} \dots \frac{2022.2022}{2021.2023}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{2.3.4 \dots 2022}{1.2.3 \dots 2021} \times \frac{2.3.4 \dots 2022}{3.4.5 \dots 2023}$$

$$A = \frac{1}{2} \times \frac{2022}{1} \times \frac{2}{2023}$$

$$A = \frac{2022}{2023} < \frac{2023}{2023} = 1$$

Vậy $A < 1$.

Câu 51. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 – 2023)

Cho $S_1 = 1 + \frac{1}{5}$; $S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}$; ...; $S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

Ta có: $S_n > S_{n-1} > \dots > S_2 > S_1 > 1$

$$\Rightarrow S_n^2 > S_{n-1}^2 > \dots > S_2^2 > S_1^2 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

$$A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n}$$

Đặt

$$\Rightarrow 5A = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 4A = 1 - \frac{1}{5^n} < 1 \Rightarrow A < \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$$

Vậy

Câu 52. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015; huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017)

Cho $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}$ So sánh A với $\frac{1}{2015}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} + \frac{1}{2017}$$

Ta có

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} = \frac{1}{2016}$$

$$\text{Mà } \frac{1}{2016} > \frac{1}{2015}$$

$$\text{Vậy } A > \frac{1}{2015}$$

Câu 53. (HSG 7 huyện Tư Nghĩa, Trường Nghĩa Điền năm 2017 - 2018)

$$A = \frac{10^{2011} + 1}{10^{2012} + 1} \quad B = \frac{10^{2012} + 1}{10^{2013} + 1}$$

So sánh các số sau: và

Lời giải

$$\text{Ta có: } 10A = \frac{10^{2012} + 10}{10^{2012} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2012} + 1}$$

$$10B = \frac{10^{2013} + 10}{10^{2013} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2013} + 1}$$

$$\text{Vì } \frac{9}{10^{2012} + 1} > \frac{9}{10^{2013} + 1} \text{ nên } 10A > 10B \Rightarrow A > B$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>