

Chuyên đề 24.

PHƯƠNG TRÌNH. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa về giá trị tuyệt đối: $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

2. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối:

a) Dạng 1: $|f(x)| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < f(x) < \alpha \quad (\alpha > 0)$

$$* |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$$

b) Dạng 2: $|f(x)| > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \alpha \\ f(x) < -\alpha \end{cases} \quad (\alpha > 0)$

$$* |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

c) Dạng 3: $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2$

3. Một số bất đẳng thức quan trọng về giá trị tuyệt đối:

$|a| + |b| \geq |a + b|$ xảy ra dấu đẳng thức: $ab \geq 0$

và $|a| - |b| \leq |a - b|$ xảy ra dấu đẳng thức: $ab \geq 0$ và $|a| \geq |b|$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình:

a) $|2x - 9| = 2015.$

b) $|2x - 3| = 3x - 4.$

c) $(x - 3)^2 + |2x - 5| - (x + 4)(x - 4) = 0.$

* *Tìm cách giải:* Các phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối dạng đơn (có một dấu $|$). Ta sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối để giải.

Giải

a) *Cách 1:*

* Nếu $2x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{9}{2}$ thì $|2x - 9| = 2x - 9$

Ta có $2x - 9 = 2015 \Leftrightarrow 2x = 2024 \Leftrightarrow x = 1012$ (Thỏa mãn)

* Nếu $2x - 9 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}$ thì $|2x - 9| = 9 - 2x.$

Ta có $9 - 2x = 2015 \Leftrightarrow -2x = 2006 \Leftrightarrow x = -1003$ (thỏa mãn)

Nghiệm của phương trình là: $x = -1003; x = 1012.$

Cách 2: $|2x - 9| = 2015 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 9 = 2015 \\ 2x - 9 = -2015 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1012 \\ x = -1003 \end{cases}$

b) * Với $x \geq 1,5$ thì $|2x - 3| = 2x - 3$

Phương trình thành $2x - 3 = 3x - 4 \Leftrightarrow x = 1$ loại vì $x \geq 1,5$

* Với $x < 1,5$ thì $|2x - 3| = 3 - 2x$

Phương trình trở thành $3 - 2x = 3x - 4 \Leftrightarrow -5x = -7 \Leftrightarrow x = 1,4$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 1,4$.

Chú ý: Tránh mắc sai lầm $|2x - 3| = 3x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 3x - 4 \\ 2x - 3 = 4 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1,4 \end{cases}$

Rồi kết luận luôn nghiệm của phương trình là $x = 1$ và $x = 1,4$

Sai lầm ở chỗ vế trái luôn không âm nên $3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$. Do đó nếu giải kiểu này thì phải thử lại

nghiệm trước khi kết luận.

c) $PT \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + |2x - 5| - x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow |2x - 5| = 6x - 25$.

* Với $x \geq 2,5$ ta có $2x - 5 = 6x - 25 \Leftrightarrow x = 5$.

* Với $x < 2,5$ ta có $5 - 2x = 6x - 25 \Leftrightarrow x = 3,75$ (loại).

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình:

a) $x^2 - 3|x| = 18$.

b) $|x^2 - 4x - 1| = 31$.

c) $|x^2 - 2x + 4| = 8x - x^2 - 8$.

* *Tìm cách giải:* Sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối.

Giải

a) Với $x \geq 0$ thì $|x| = x$; $x^2 - 3|x| = 18 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 6 \end{cases} \cdot \text{Loại } x = -3.$$

Với $x < 0$ thì $|x| = -x$; $x^2 - 3|x| = 18 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+6)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -6 \end{cases} \cdot \text{Loại } x = 3.$$

Nghiệm của phương trình là $x = \pm 6$.

b) $|x^2 - 4x - 1| = 31 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 1 = 31 \\ x^2 - 4x - 1 = -31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 32 = 0 \\ x^2 - 4x + 30 = 0 \end{cases}$

Phương trình $x^2 - 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -4 \end{cases}$

Phương trình $x^2 - 4x + 30 = 0$ vô nghiệm

Vì $x^2 - 4x + 30 = (x-2)^2 + 26 > 0, \forall x$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 8$ và $x = -4$.

c) Do $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0, \forall x$ nên

$$|x^2 - 2x + 4| = x^2 - 2x + 4. \text{ Do đó } PT \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 8x - x^2 - 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 3:

a) Giải phương trình: $||2x - 5| - 7| + 9 = 21.$

b) Giải phương trình: $|||2x - 1| - 4| + 8| - 10 = 15.$

* *Tìm cách giải:* Các phương trình trên có nhiều dấu giá trị tuyệt đối lồng vào nhau (Dạng lồng):

$$||ax + b| + c| + d = e \text{ hoặc } |||ax + b| + c| + d| + e = h$$

Ta sử dụng phương pháp bỏ dần các dấu giá trị tuyệt đối từ ngoài vào trong.

Giải

$$a) PT \Leftrightarrow ||2x - 5| - 7| + 9 = 21 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 5| - 7 = -12 \\ |2x - 5| - 7 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 5| = -5 \text{ (loại)} \\ |2x - 5| = 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = -19 \\ 2x - 5 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 12 \end{cases}$$

$$b) PT \Leftrightarrow |||2x - 1| - 4| + 8| = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} ||2x - 1| - 4| + 8 = -25 \\ ||2x - 1| - 4| + 8 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ||2x - 1| - 4| = -33 \text{ (loại)} \\ ||2x - 1| - 4| = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 1| - 4 = -17 \\ |2x - 1| - 4 = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 1| = -13 \text{ (loại)} \\ |2x - 1| = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = -21 \\ 2x - 1 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ x = 11 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Giải các phương trình:

a) $|x - 3| + |3x - 6| - |5 - 2x| = 8.$

b) $|x^2 - 9| + |x^2 - 25| = 26.$

c) $|x + 1| + |x + 2| + |2x + 5| = 10x$

* *Tìm cách giải:* Các phương trình có nhiều dấu giá trị tuyệt đối nhưng rời nhau (dạng rời)

$$|ax + b| + |cx + d| + \dots + |px + q| = m$$

Ta lập bảng xét các giá trị tuyệt đối rồi giải phương trình. Câu c) ta nhận xét về trái không âm nên suy ra ngay $x \geq 0$.

Giải

a) Lập bảng xét giá trị tuyệt đối (hay bảng phá dấu GTTĐ):

x	2	2,5	3
$ x - 3 $	$3 - x$ $3 - x$	$3 - x$ $x - 3$	0 $x - 3$
$ 3x - 6 $	$6 - 3x$ $3x - 6$	$3x - 6$ $3x - 6$	0 $3x - 6$
$ 5 - 2x $	$2x - 5$ $2x - 5$	0 $5 - 2x$	$5 - 2x$ $5 - 2x$
Vế trái	$14 - 6x$ $0x + 2$	$4x - 8$ $6x - 14$	

Vậy: + Với $x < 2$ thì $14 - 6x = 8 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

+ Với $2 \leq x \leq 2,5$ thì $0x + 2 = 8$ Vô nghiệm.

+ Với $2 < x \leq 3$ thì $4x - 8 = 8 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

+ Với $x > 3$ thì $6x - 14 = 8 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$ (thỏa mãn).

Nghiệm của phương trình: $x = 1$ và $x = 3\frac{2}{3}$

b) Lập bảng xét GTTĐ:

x^2	9	2,5
$ x^2 - 9 $	$9 - x^2$ $x^2 - 9$	$x^2 - 9$ $x^2 - 9$
$ x^2 - 25 $	$25 - x^2$ $25 - x^2$	0 $x^2 - 25$
Vế trái	$34 - 2x^2$ $0x^2 - 16$	$2x^2 - 34$ $2x^2 - 34$

Với $x^2 \leq 9$; $34 - 2x^2 = 26 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Với $9 < x^2 < 25$; $0x^2 - 16 = 26$ (Vô nghiệm).

Với $x^2 \geq 25$; $2x^2 - 34 = 26 \Leftrightarrow x^2 = 30 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{30}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm 2$ và $x = \pm\sqrt{30}$.

c) Phương trình $|x+1| + |2x+5| + |3x+2| = 10x$ có vế trái không âm nên $10x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ do đó:

$$x+1+2x+5+3x+2=10x \Leftrightarrow x=2$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $||3x-4|-5|-|x+2|=1$.

* *Tìm cách giải:* Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối có dạng hỗn hợp (vừa lồng vừa rời):

$$|ax+b|+|c|+|dx+e|+\dots+|mx+n|=p$$

Ta phối hợp linh hoạt các cách giải ở các ví dụ trên:

Giải

$$(1) \Leftrightarrow ||3x-4|-5|=1+|x+2|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |3x-4|-5=1+|x+2| \\ |3x-4|-5=-1-|x+2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3x-4|-|x+2|=6 \\ |3x-4|+|x+2|=4 \end{cases}$$

a) Với $|3x-4|-|x+2|=6$ ta lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x	-2 $\frac{4}{3}$			
$ 3x-4 $	$4-3x$		$4-3x$	0 $3x-4$
$ x+2 $	$-2-x$	0	$x+2$	$x+2$
Vế trái	$6-2x$		$-4x+2$	$2x-6$

Với $x \leq -2$; $6-2x=6 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Với $-2 < x < \frac{4}{3}$; $-4x+2=6 \Leftrightarrow x=-1$ (thỏa mãn)

Với $x \geq \frac{4}{3}$; $2x-6=6 \Leftrightarrow x=6$ (thỏa mãn)

b) Với $|3x-4|+|x+2|=4$ lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x	-2 $\frac{4}{3}$			
$ 3x-4 $	$4-3x$		$4-3x$	0 $3x-4$
$ x+2 $	$-2-x$	0	$x+2$	$x+2$
Vế trái	$2-4x$		$-2x+6$	$4x-2$

Với $x \leq -2$; $2-4x=6 \Leftrightarrow x=-1$ (không thỏa mãn).

Với $-2 < x < \frac{4}{3}$; $-2x+6=4 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn).

Với $x \geq \frac{4}{3}$; $4x-2=4 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -1; 0; 1; \frac{3}{2}; 6 \right\}$

Ví dụ 6: Giải các bất phương trình:

a) $|4x-5| < 25$.

b) $|2x-6| < x+2$

Tìm lời giải: Các bất phương trình có dạng $|f(x)| < \alpha$ và $|f(x)| < g(x)$. Do đó ta sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối để giải hoặc giải theo cách giải sau.

* $|f(x)| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < f(x) < \alpha$ ($\alpha > 0$)

$$* |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \quad (g(x) > 0)$$

Sau khi giải xong lưu ý khi tập hợp nghiệm: nghiệm bất phương trình

$|f(x)| < \alpha$ phải thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình $f(x) < \alpha$ và $f(x) > -\alpha$; nghiệm bất phương trình $|f(x)| < g(x)$ phải thỏa mãn đồng thời cả hai bất phương trình $f(x) < g(x)$ và $f(x) > -g(x)$

Giải

a) $|4x - 5| < 25 \Leftrightarrow -25 + 5 < 4x < 25 + 5$

$$\Leftrightarrow -20 < 4x < 30 \Leftrightarrow -5 < x < 7,5$$

b) *Cách 1:* Ta có $|2x - 6| = 2x - 6$ nếu $x \geq 3$

$$|2x - 6| = 6 - 2x \text{ nếu } x < 3$$

Vì thế:

* Nếu $x \geq 3$ thì $|2x - 6| < x + 2 \Leftrightarrow 2x - 6 < x + 2 \Leftrightarrow x < 8 \Rightarrow 3 \leq x < 8$.

* Nếu $x < 3$ thì $|2x - 6| < x + 2 \Leftrightarrow 6 - 2x < x + 2 \Leftrightarrow -3x < -4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} < x < 3$.

Kết hợp ta được nghiệm của bất phương trình là $\frac{4}{3} < x < 8$.

Cách 2: Ta có với $x > -2$ thì $x + 2 > 0$

Ta có: $|2x - 6| < x + 2 \Leftrightarrow -x - 2 < 2x - 6 < x + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 < x + 2 \\ 2x - 6 > -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 \\ 3x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

Nghiệm của bất phương trình là $\frac{4}{3} < x < 8$.

Ví dụ 7: Giải các bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số:

a) $|2x - 7| > 15$. b) $\left| \frac{2x+3}{x-1} \right| > 1$ (với $x \neq 1$)

c) $|x^2 - 3| > 5 - 2x$

* *Tìm lời giải:* Các bất phương trình dạng $|f(x)| > \alpha$ và $|f(x)| > g(x)$

Do đó ta sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối để giải hoặc giải theo cách giải sau:

$$* |f(x)| > \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \alpha \\ f(x) < -\alpha \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

$$* |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

Sau khi giải xong lưu ý khi tập hợp nghiệm: nghiệm bất phương trình $|f(x)| > \alpha$ chỉ cần thỏa mãn một trong hai bất phương trình $f(x) > \alpha$ hoặc $f(x) < -\alpha$; nghiệm bất phương trình $|f(x)| > g(x)$ chỉ cần thỏa mãn một trong hai bất phương trình $f(x) > g(x)$ hoặc $f(x) < -g(x)$.

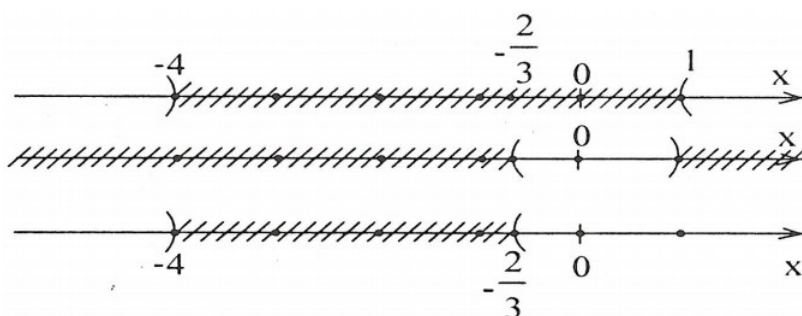
Giải

$$a) |2x - 7| > 15 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 > 15 \\ 2x - 7 < -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 22 \\ 2x < -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 11 \\ x < -4 \end{cases}$$



$$b) \left| \frac{2x+3}{x-1} \right| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+3}{x-1} > 1 \\ \frac{2x+3}{x-1} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+3}{x-1} - 1 > 0 \\ \frac{2x+3}{x-1} + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+4}{x-1} > 0 (*) \\ \frac{3x+2}{x-1} < 0 (**) \end{cases}$$

Giải (*) có $\begin{cases} x < -4 \\ x > 1 \end{cases}$. Giải (**) có $-\frac{2}{3} < x < 1$. Hợp nghiệm $\begin{cases} x < -4 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases}$



$$* \begin{cases} x < -4 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$** -\frac{2}{3} < x < 1$$

$$\begin{cases} x < -4 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Nghiệm của bất phương trình đã cho là $\begin{cases} x < -4 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases}$

$$c) |x^2 - 3| > 5x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 > 5x - 2 \\ x^2 - 3 < 5x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 > 0 (*) \\ x^2 - 2x + 2 < 0 (**) \end{cases}$$

Giải (*): $x^2 + 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -4 \end{cases}$

Giải (**): Do $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0, \forall x$ nên (**) vô nghiệm.

Biểu diễn nghiệm:



Ví dụ 8: Giải các bất phương trình:

a) $|x - 4| > |3x + 9|;$

b) $|x| - |x - 1| + |2x - 5| < 3x - 6$

* *Tìm cách giải:* Các bất phương trình đã cho (viết tắt BPT) đều có nhiều biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối nhưng rời nhau. Ta lập bảng xét giá trị tuyệt đối của các biểu thức để giải bất phương trình.

Giải

a) *Cách 1:* Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x	-3	4
$ x - 4 $	$4 - x$	$x - 4$
$ 3x + 9 $	$-3x - 9$	$3x + 9$

* Với $x < -3$ thì (1) $\Leftrightarrow 4 - x > -3x - 9 \Leftrightarrow x > -6,5$

* Với $-3 \leq x \leq 4$ thì BPT $\Leftrightarrow 4 - x > 3x + 9 \Leftrightarrow x < -1,25$

* Với $x > 4$ thì BPT $\Leftrightarrow x - 4 > 3x + 9 \Leftrightarrow x < -6,5$ (loại)

Hợp hai khoảng nghiệm: $-6,5 < x < -3$ và $-3 \leq x < -1,25$ ta được nghiệm của bất phương trình là $-6,5 < x < -1,25$

Chú ý: Ta còn cách giải khác đơn giản hơn dựa vào:

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 > [g(x)]^2$$

Cách 2: Bình phương hai vế ta có:

$$BPT \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 > 9x^2 + 54x + 81 \Leftrightarrow 8x^2 + 62x + 65 < 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 5)(2x + 13) < 0 \Leftrightarrow -6,5 < x < -1,25$$

b) Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x	-1	0	2,5
$ x $	$-x$	x	x
$ x + 1 $	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$ 2x - 5 $	$5 - 2x$	$5 - 2x$	$2x - 5$

* Với $x < -1$. BPT $\Leftrightarrow -x + x + 1 + 5 - 2x < 3x - 6$

$$\Leftrightarrow -5x < -12 \Leftrightarrow x > 2,4 \text{ (loại)}$$

* Với $-1 \leq x < 0$. BPT $\Leftrightarrow -x - x - 1 + 5 - 2x < 3x - 6$

$$\Leftrightarrow -7x < -2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{7} \text{ (loại)}$$

* Với $0 \leq x < 2,5$. BPT $\Leftrightarrow x - x - 1 + 5 - 2x < 3x - 6$

$$\Leftrightarrow -5x < -10 \Leftrightarrow x > 2$$

$$* \text{ Với } x \geq 2,5. \text{ BPT } \Leftrightarrow -x - x - 1 + 2x - 5 < 3x - 6$$

$$\Leftrightarrow -3x < 0 \text{ (đúng với mọi } x \text{)}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > 2$.

C. Bài tập vận dụng

24.1. Giải các phương trình:

$$a) \left| \frac{x}{2} - \frac{6}{5} \right| = x - \frac{16}{5}.$$

$$b) x - \frac{2x+1}{5} = 2 - \frac{|3x-4|}{2}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) \text{ Biến đổi } PT \Leftrightarrow |5x - 12| = 10x - 32$$

$$\text{Ta có vì } |5x - 12| \geq 0 \text{ nên } 10x - 32 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3,2$$

Khi ấy $|5x - 12| = 5x - 12$. Phương trình trở thành $5x - 12 = 10x - 32$ ta tìm được $x = 4$ (thỏa mãn); Vậy nghiệm của phương trình là $x = 4$.

$$b) \text{ Biến đổi } PT \Leftrightarrow 5|3x - 4| = 22 - 6x$$

$$\text{Xét với } x \geq \frac{4}{3} \text{ ta tìm được } x = 2. \text{ Xét với } x < \frac{4}{3} \text{ ta tìm được } x = -\frac{2}{9}$$

24.2. Giải các phương trình:

$$a) ||2x| - 3| - 1 = 1.$$

$$b) ||x| - 2| = 2x - 6.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) PT \Leftrightarrow ||2x| - 3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x| = 5 \\ |2x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2,5 \\ x = \pm 0,5 \end{cases}$$

$$b) * \text{ Với } |x| \geq 2 \text{ thì } ||x| - 2| = |x| - 2$$

$$\text{Phương trình trở thành } \Leftrightarrow |x| - 2 = 2x - 6 \Leftrightarrow |x| = 2x - 4$$

$$\text{Với } x \geq 0, \text{ ta có } x = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } x < 0, \text{ ta có } -x = 2x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$$

$$* \text{ Với } |x| < 2 \text{ thì } ||x| - 2| = 2 - |x|$$

$$\text{Phương trình trở thành } \Leftrightarrow 2 - |x| = 2x - 6 \Leftrightarrow |x| = 8 - 2x$$

$$\text{Với } x \geq 0, \text{ ta có: } x = 8 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ (loại vì } |x| < 2)$$

$$\text{Với } x < 0, \text{ ta có: } -x = 8 - 2x \Leftrightarrow x = 8 \text{ (loại)}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 4$

24.3. Giải các phương trình:

$$a) |4x+5|+|4x-5|=10.$$

$$b) |2x-6|+|x-5|-|x+2|=5.$$

$$c) |x+4|+2|1-2x|-3|x|=5-4x.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối rồi giải các phương trình.

$$a) \text{ Tập nghiệm là } -\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$$

b) Bảng xét giá trị tuyệt đối:

x	-2	3	5
$ 2x-6 $	$6-2x$	$6-2x$	$2x-6$
$ x-5 $	$5-x$	$5-x$	$x-5$
$ x+2 $	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
Vế trái	$-2x+13$	$-4x+9$	$0x-3$

$$* \text{ Với } x < -2 \text{ PT } \Leftrightarrow -2x+13=5 \Leftrightarrow x=4 \text{ (loại)}$$

$$* \text{ Với } -2 \leq x < 3 \text{ PT } \Leftrightarrow -4x+9=5 \Leftrightarrow -4x < -4 \Leftrightarrow x=1$$

$$* \text{ Với } 3 \leq x < 5 \text{ PT } \Leftrightarrow 0x-3=5 \Leftrightarrow 0x=8 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$* \text{ Với } x \geq 5 \text{ PT } \Leftrightarrow 2x-13=5 \Leftrightarrow 2x=18 \Leftrightarrow x=9$$

$$\text{Tập nghiệm là } S = \{1; 9\}$$

$$c) \text{ Lập bảng xét GTTĐ. Nghiệm là } x = -0,25; x = 0,5$$

24.4. Giải phương trình:

$$a) |x^2-2x-1|=2.$$

$$b) |x^2-6|=x.$$

$$c) 4x-x^2=|x-1|+|x-5|.$$

$$d) |x^2-25|-|x^2-9|=x^2-2x+17.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) \text{ PT } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-1=2 \\ x^2-2x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)=0 \\ (x-1)^2=0 \end{cases}$$

$$\text{Tập nghiệm: } S = \{-1; 3; 1\}.$$

$$b) \text{ Lưu ý: } x \geq 0. \text{ Tập nghiệm: } S = \{2; 3\}$$

$$c) \text{ Vế trái } 4x-x^2=4-(4-4x+x^2)=4-(2-x)^2 \leq 4$$

$$\text{Vế phải: áp dụng bất đẳng thức } |a|+|b| \geq |a+b| \text{ ta có}$$

$$\text{Vế trái: } |x-1|+|x-5|=|x-1|+|5-x| \geq |x-1+5-x|=4$$

$$\text{Suy ra vế phải bằng vế trái bằng } 4 \Rightarrow x=2.$$

d) Áp dụng bất đẳng thức: $|a| - |b| \leq |a - b|$ ta có:

$$\text{Về trái } |x^2 - 25| - |x^2 - 9| \leq |x^2 - 25 - x^2 + 9| = 16$$

$$\text{Mặt khác về phải } x^2 - 2x + 17 = (x - 1)^2 + 16 \geq 16$$

Suy ra về phải bằng về trái và bằng 16 $\Rightarrow x = 1$

24.5. Cho phương trình $|x - 2| + |x - 5| = m$ (với m là tham số). Hãy cho biết với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm, vô số nghiệm, vô nghiệm?

Hướng dẫn giải – đáp số

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x	2		5	
$ x - 2 $	$2 - x$	0	$x - 2$	$ x - 2 $
$ x - 5 $	$5 - x$		$5 - x$	0 $x - 5$
Về trái	$7 - 2x$		$0x + 3$	$2x - 7$

* Với $x < 2$ thì (1) $\Leftrightarrow 7 - 2x = m \Leftrightarrow x = \frac{7 - m}{2}$ là nghiệm nếu $\frac{7 - m}{2} < 2 \Leftrightarrow m > 3$

* Với $2 \leq x \leq 5$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x = m - 3$ vô số nghiệm nếu $m = 3$

* Với $x > 5$ thì (1) $\Leftrightarrow 2x - 7 = m \Leftrightarrow x = \frac{m + 7}{2}$ là nghiệm nếu $\frac{m + 7}{2} > 5 \Leftrightarrow m > 3$.

Vậy nếu $m > 3$ thì (1) có hai nghiệm là $x = \frac{7 - m}{2}$ và $x = \frac{m + 7}{2}$

Nếu $m = 3$ thì (1) có vô số nghiệm $2 \leq x \leq 5$.

Nếu $m < 3$ thì (1) vô nghiệm.

24.6. Giải phương trình $|2|x - 5| - 9| = |x - 3| + 4$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{PT} \Leftrightarrow \begin{cases} |2|x - 5| - 9| = |x - 3| + 4 \\ |2|x - 5| - 9| = -4 - |x - 3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2|x - 5| - |x - 3| = 9 \\ |2|x - 5| + |x - 3| = 1 \end{cases}$$

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối tìm được tập nghiệm là $S = [-12; 6]$

24.7. Giải phương trình $|2|x - 5| - 9| + |2|x - 5| - 11| = 12$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $|x - 5| = t (t \geq 0)$. Phương trình trở thành $|2t - 9| + |2t - 11| = 12$

Lập bảng xét giá trị tuyệt đối tìm được $t = 2$ và $t = 8$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow |x - 5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t=8 \Leftrightarrow |x-5|=8 \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ x=-3 \end{cases}$$

24.8. Giải các bất phương trình:

a) $|x^2 - 4x + 2| < 14.$

b) $|x-3| < x^2 + 2x + 3.$

c) $|2x-5| \leq \frac{2x+5}{3}.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) BPT $\Leftrightarrow -14 < x^2 - 4x + 2 < 14 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 12 < 0 \\ x^2 - 4x + 16 > 0 \end{cases}$

* $x^2 - 4x + 16 = (x-2)^2 + 12 > 0 \quad \forall x$

* $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 6$

Nghiệm của bất phương trình là $-2 < x < 6$

b) $|x-3| < x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 3 < x-3 < x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x > 0 \\ x^2 + x + 6 > 0 \end{cases}$

* $x^2 + x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0, \quad \forall x > 0$

* $x^2 + 3x = x(x+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -3 \end{cases}$

Nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x > 0 \\ x < -3 \end{cases}$

c) BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x-15 \leq 2x+5 \\ 6x-15 \geq -2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow 1,25 \leq x \leq 5$

24.9. Giải các bất phương trình:

a) $2|5x-1| > 5x+1.$

b) $\left|\frac{1}{x-2} + 1\right| > 3.$

c) $\left|\frac{2x}{x+3} - 1\right| > 2.$

d) $|-x^2 - 2x - 2016| \geq x^2 + 2018.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(5x-1) > 5x+1 \\ 2(5x-1) < -5x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 3 \\ 15x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,6 \\ x < \frac{1}{15} \end{cases}$

Nghiệm bất phương trình là $\begin{cases} x > 0,6 \\ x < \frac{1}{15} \end{cases}$

b) Với $x \neq 2$ bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-2} + 1 > 3 \\ \frac{1}{x-2} + 1 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} - 2 > 0 \\ \frac{1}{x-2} + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5-2x}{x-2} > 0 \\ \frac{4x-7}{x-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < \frac{5}{2} \\ \frac{4}{7} < x < 2 \end{cases}$$

Hợp nghiệm được $\frac{7}{4} < x < \frac{5}{2}$ trừ $x=2$

c) Với $x \neq -3$. Tương tự (b) hoặc biến đổi $BPT \Leftrightarrow \left| \frac{x-3}{x+3} \right| > 2$

Tìm được $-9 < x < -1$ trừ $x = -3$

d) Ta có $|-x^2 - 2x - 2016| = x^2 + 2x + 2016$ (do $-x^2 - 2x - 2016 < 0; \forall x$)

và $x^2 + 2018 > 0, \forall x$ nên $BPT \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2016 \geq x^2 + 2018$

$$\Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

24.10. Giải các bất phương trình:

a) $\frac{|2x-3|}{2+5+8+\dots+89} \geq \frac{1}{91}.$

b) $2-x \leq |x^2-4|.$

c) $|4x+5| > x^2 - 2x + 5.$

d) $-2|3x-5| > x^2 - x + 1.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $2+5+8+\dots+89 = \frac{(2+89).30}{2} = 91.15$

Do đó $BPT \Leftrightarrow |2x-3| \geq 15 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \geq 15 \\ 2x-3 \leq -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x \leq -6 \end{cases}$

b) $BPT \Leftrightarrow |x^2-4| \geq 2-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4 \geq 2-x \\ x^2-4 \leq x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+3) \geq 0 \\ (x-2)(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -3 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Tổng hợp nghiệm: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -3 \end{cases}$

c) $BPT \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5 > x^2 - 2x + 5 \\ 4x+5 < -(x^2 - 2x + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x < 0 & (1c) \\ x^2 + 2x + 10 < 0 & (2c) \end{cases}$

$(1c) \Leftrightarrow x(x-6) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6$

(2) Vô nghiệm

Nghiệm của bất phương trình là $0 < x < 6$.

d) Ta có $-2|3x-5| \leq 0; \forall x$ và $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0; \forall x$

Nên bất phương trình vô nghiệm.

24.11. Giải các bất phương trình:

a) $|x+5| < |x-3|$.

b) $|x-5| + |x-6| > 3x-11$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Bình phương hai vế. Hoặc lập bảng xét giá trị tuyệt đối.

Nghiệm của (1) là $x < -1$.

b) Lập bảng xét giá trị tuyệt đối:

x	5		6	
$ x-5 $	$5-x$	0	$x-5$	$ x-5 $
$ x-6 $	$6-x$		$6-x$	0 $x-6$
Vế trái	$11-2x$		$0x+1$	$2x-11$

* Với $x < 5$ thì (2) $\Leftrightarrow 11-2x > 3x-11 \Leftrightarrow x < 4,4$

* Với $5 \leq x \leq 6$ thì (2) $\Leftrightarrow 0x+1 > 3x-11 \Leftrightarrow x < 4$ (loại)

* Với $x > 6$ thì (2) $\Leftrightarrow 2x-11 > 3x-11 \Leftrightarrow x < 0$ (loại)

Vậy nghiệm của (2) là $x < 4,4$

24.12. Giải các bất phương trình:

a) $||x-4|-6|-8 > 2$.

b) $||2x-3|-11|+5 < 6$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) BPT $\Leftrightarrow ||x-4|-6| > 10 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4|-6 > 10 \\ |x-4|-6 < -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4| > 16 \\ |x-4| < -4 \end{cases}$ (loại)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 16 \\ x-4 < -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 20 \\ x < -12 \end{cases}$

b) BPT $\Leftrightarrow ||2x-3|-11| < 1 \Leftrightarrow -1 < |2x-3|-11 < 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |2x-3| < 12 \\ |2x-3| > 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 < 2x-3 < 12 \\ 2x-3 > 10 \\ 2x-3 < -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4,5 < x < 7,5 \\ x > 6 \\ x < -4 \end{cases}$

Hợp nghiệm ta được nghiệm của BPT là $\begin{cases} 6 < x < 7,5 \\ -4,5 < x < -4 \end{cases}$

***Một số đề thi:**

24.13. Giải phương trình $|x| + |x+1| + |x+2| = 7$.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên, Quốc học Huế, năm học 1994-1995)

Hướng dẫn giải – đáp số

Lập bảng xét GTTĐ rồi xét các khoảng

* Nếu $x < -2$ thì PT $\Leftrightarrow -x - x - 1 - x - 2 = 7 \Leftrightarrow x = -\frac{10}{3}$

* Nếu $-2 \leq x < -1$ thì PT $\Leftrightarrow -x - x - 1 + x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = -6$ (loại)

* Nếu $-1 \leq x \leq 0$ thì PT $\Leftrightarrow -x + x + 1 + x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = 4$ (loại)

* Nếu $x > 0$ thì PT $\Leftrightarrow x + x + 1 + x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Phương trình có hai nghiệm là $x = -\frac{10}{3}$ và $x = \frac{4}{3}$.

24.14. Giải phương trình $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = 3$.

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 1994-1995)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = |x^2 - 1| + |4 - x^2| \geq x^2 - 1 + 4 - x^2 = 3$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (x^2 - 1)(4 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

Nghiệm phương trình là $1 \leq x \leq 2$; $-2 \leq x \leq -1$

24.15. Giải phương trình $|x| - |x - 2| = 2$.

(Thi vào lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong TP. Hồ Chí Minh, năm học 1995-1996)

Hướng dẫn giải – đáp số

Lập bảng xét GTTĐ rồi xét các khoảng:

* Với $x \leq 0$ phương trình thành $-x - 2 + x = 2 \Leftrightarrow 0x = 4$ vô nghiệm.

* Với $0 \leq x \leq 2$ phương trình thành $x - 2 + x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận).

* Với $x > 2$ phương trình thành $x - x + 2 = 2 \Leftrightarrow 0x + 2 = 2$ vô số nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x \geq 2$.

24.16. Giải phương trình $(x - 1)^2 + 2|x - 1| - 8 = 0$

(Thi học sinh giỏi lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, năm học 2001-2002)

Hướng dẫn giải – đáp số

Đặt $y = |x - 1|$ thì $y \geq 0$. Phương trình trở thành:

$$y^2 + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y + 4) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ hoặc } y = -4 \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } y = 2 \Leftrightarrow |x - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2 \\ x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình là $x = 3$ và $x = -1$

24.17. Giải phương trình $|2x + 5| = x^2 + 3x - 1$

(Thi vào lớp 10 năng khiếu ĐHQG TP.Hồ Chí Minh, năm học 2003-2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

* Nếu $x \geq 2,5$ thì $|2x+5| = 2x+5$ khi ấy $2x+5 = x^2 + 3x - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ hoặc } x = 2. \text{ Loại } x = -3$$

* Nếu $x < -2,5$ thì $|2x+5| = -2x-5$ khi ấy $-2x-5 = x^2 + 3x - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ hoặc } x = -1. \text{ Loại } x = -1.$$

Nghiệm của phương trình là $x = 2$ và $x = -4$

24.18. Giải phương trình $|x+1| + |x-1| = 1 + |x^2 - 1|$

(Đề thi tuyển sinh THPT chuyên ĐHQG Hà Nội, năm 2004)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $|ab| = |a| \cdot |b|$ nên $|x+1| + |x-1| = 1 + |x^2 - 1| \Leftrightarrow |x+1| \cdot |x-1| - |x+1| - |x-1| + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (|x+1| - 1) \cdot (|x-1| - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+1| - 1 = 0 & (1) \\ |x-1| - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$* (1) \Leftrightarrow x+1 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}; (2) \Leftrightarrow x-1 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 0; 2\}$

24.19. Giải phương trình $|x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} = 1$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa, năm học 2004-2005)

Hướng dẫn giải – đáp số

* Khi $x = 2005; x = 2006$ thì vế trái và vế phải đều cùng số trị là 1. Do đó $x = 2005$ và $x = 2006$ là nghiệm của phương trình.

* Với $x < 2005$ thì $|x-2005| > 0$ và $|x-2006| > 1$

Do đó $|x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} > 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Với $x > 2006$ thì $|x-2005| > 1$ và $|x-2006| > 0$

Do đó $|x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} > 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Với $2005 < x < 2006$ thì $0 < x-2005 < 1$ và $-1 < x-2006 < 0$

$$\Rightarrow |x-2005|^{2006} < |x-2005| = x-2005 \text{ và } |x-2006|^{2006} < |x-2006| = 2006-x$$

$$\Rightarrow |x-2005|^{2006} + |x-2006|^{2006} < x-2005 + 2006-x = 1 \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2005$ và $x = 2006$