**Ví dụ 19.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán ta hãy để ý ngay đến phương trình bậc hai trong căn ở vế trái phương trình hình như có liên quan gì đến hai đại lượng bậc nhất trong căn ở vế phải phương trình.

Thật vậy ta có: 

Tiếp theo ta để ý rằng sự xuất hiện của hệ số 4 trong đại lượng  và hệ số 2 và 1 trước hai đại lượng   làm ta nghĩ ngay đến hằng đẳng thức, ta có: .

Tới đây, ta đã có thể hình dung được mối liên hệ giữa các căn thức với nhau, đồng thời có thể gợi cho ta hai ý tưởng chính để tối giản hóa bài toán đó chính là ẩn phụ. Ta có hai hướng ẩn phụ như sau:

**- Hướng 1:** Đặt hai ẩn phụ cho hai căn bậc nhất và kéo x và hệ số tự do theo hai ẩn phụ đó.

**- Hướng 2:** Đặt một ẩn phụ cho hiệu hai căn thức và kéo đại lượng căn bậc hai chứa phương trình bậc hai theo ẩn phụ và ẩn x để đưa phương trình ẩn phụ không triệt để kéo được biệt thức và số chính phương.

Nếu ta giải quyết theo hướng 1, ta có thể định hình về ý tưởng như sau:

Đặt:   , , 

Khi đó phương trình đã cho sẽ trở thành phương trình sau:













Ở phương trình  sự xuất hiện của  và các đại lượng   lập lại liên tục nên ta có quyền suy nghĩ là đẩy một hằng đẳng thức liên quan đến  và là bình phương của một hiệu liên quan đến a, b.

Do đó, ta tiếp tục tách phương trình  như sau:











Tới đây, xem như hướng đi 1 thành công, từ đó ta hoàn chỉnh cách giải bài toán như sau:

**- Cách 1:** Điều kiện:  

Đặt:   

Từ điều kiện ta có các kết quả sau:

  

Nhân hai vế phương trình đã cho với 2 ta được phương trình:

















 

Với:  

Ta nhận xét thấy rằng:



Do đó ta có phương trình (\*) tương đương với phương trình sau:

 

Với:   (thỏa điều kiện)

Với:   

  

Thử lại ta có  là nghiệm của phương trình.

Với:  



 

Nhận xét với  ta có  nên từ (i) ta có 

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm:   .

Nếu ta giải quyết theo hướng 2 thì ta sẽ có sự phân tích sau:

Đặt  



Lúc đó phương trình sẽ trở thành: .

Xem đây là phương trình bậc hai theo t có biệt thức



Tới đây xem như hướng 2 đã được giải quyết. Từ đó ta có cách giải thứ 2 như sau:

**- Cách 2:** Điều kiện:  

Đặt   

Lúc đó phương trình sẽ trở thành: 

Xem đây là phương trình bậc hai theo t có biệt thức



Suy ra phương trình  có hai nghiệm phân biệt:

 

Với:  ta giải như cách 1.

Với:  ngoài lời giải như cách 1 ta còn có thể sử dụng hàm số để giải quyết nó dựa trên yếu tố có nghiệm duy nhất  như sau:

Ta có:  

Do  và  không thỏa nên với  và  ta có phương trình trở thành: 

+ Xét hàm số  liên tục trên khoảng 

Ta có:  

Do đó hàm số  liên tục và đồng biến trên khoảng  nên phương trình  có tối đa một nghiệm.

Mà  nên phương trình  vô nghiệm trên khoảng 

+ Xét hàm số  liên tục trên khoảng 

Ta có:  

Do đó hàm số  liên tục và đồng biến trên khoảng  nên phương trình  có tối đa một nghiệm.

Mà  nên phương trình  có nghiệm duy nhất 

Do đó phương trình đã cho có ba nghiệm:   

**- Bình luận.** Qua bài toán trên, ta thấy hai cách giải ẩn phụ cho bài toán đều là những hướng giải khá tự nhiên. Tuy nhiên ở cách 1 bài toán đòi hỏi sự vận dụng khéo léo trong việc tách nhân tử một cách tinh ý và hợp lý. Ở cách 2, tuy bài toán khi giải có vẻ như đơn giản hơn nhưng thật chất là nhờ cách 1 có thể tách nhân tử thành công nên việc phương trình bậc 2 có biệt thức là số chính phương là điều tất yếu tức là không cần quá nhiều kỉ năng phân tích để chọn hệ số tách được phương trình có biệt thức chính phương như ta từng giải ở các ví dụ trước. Và đến ví dụ này, ta có thể thấy rằng phương trình giải bằng phương pháp ẩn phụ không hoàn toàn là một bước tiến khá nét và gọn của bài toán đặt hai ẩn phụ tách được tích các nhân tử mà đòi hỏi sự biến đổi đại số phải linh hoạt, đôi khi gây nhiều trở ngại cho những ai không thuần thục kỉ năng đại số.

**Ví dụ 20.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán ta thấy chỉ có duy nhất một căn bậc 4, đồng thời đại lượng  xuất hiện tới ba lần vì  Do đó ta sẽ biến đổi luôn đại lượng  theo đại lượng  như sau: 

Vì căn bậc 4 quá lẻ loi nên ta tự nhiên nghĩ ngay đến việc ẩn phụ hóa nó ngay lập tức. Cụ thể:   Khi đó phương trình đã cho sẽ trở thành: 

Ở phương trình  gợi ý cho ta sử dụng phương pháp xét hàm số đặc trưng để giải là hướng đi nhanh nhất. Ta đi vào giải bài toán như sau:

Điều kiện:  Phương trình đã cho được biến đổi như sau:



Đặt:  . Lúc đó ta có: .

Phương trình (\*) tương đương với phương trình: 

Xét hàm số  liên tục trên nữa khoảng .

Ta có:  .

Do đó hàm số  liên tục và đồng biến . Do đó từ  ta có:

    

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình đã cho là  

**- Bình luận.** Cách đi trên chỉ là chúng tôi cố gắng khai thác tư duy về hướng giải theo hướng logic nhất với bài toán. Tuy nhiên, nếu ta tinh ý thì ta có thể biến đổi trực tiếp phương trình trên về phương trình: 

Từ đó ta đưa hướng giải như lời giải ở trên.

**Ví dụ 21.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát bài toán ta thấy có chứa hai căn thức không liên quan đến nhau nên một điều tự nhiên ta nghĩ ngay đến việc ẩn phụ hóa hai căn thức để thoát căn.

Cụ thể, ta đặt:  

Vấn đề tiếp theo ta để ý rằng trước hai căn thức thì mỗi căn thức chứa một đại lượng bậc nhất, nên ta thuần hóa bài toán theo ẩn phụ thì ta sẽ kéo hai đại lượng bậc nhất đó theo hai ẩn phụ bằng cách ta chọn hai hệ số m, n sao cho:



Đồng nhất hệ số hai vế của  ta thu được:  

Tức là: 



Đồng nhất hệ số hai vế của  ta thu được:  

Tức là: 

Với các hệ số có sự đan chéo đối xứng như vậy và đặc biệt các hệ số 1, 3, 3, 1 gợi cho chúng ta cái gì đó khá quen thuộc nên ta thử liên kết hai biểu thức lại với nhau xem điều gì xảy ra?

Ta có: 



Từ nhận xét đặc biệt này, ta nghĩ ngay đến việc thay gì đặt hai ẩn phụ ta quay về đặt một ẩn phụ.

Vậy ta sẽ chuyển hướng đặt: 

Quan sát lại phương trình lần nữa, ta lại thấy trong phương trình có chứa   mà điều này từ tích hai đại lượng  ta thấy ngay hoàn toàn có thể biểu diễn phương trình bậc hai còn lại theo t một cách dễ dàng.

Cụ thể, ta có:  

Mặt khác sử dụng máy tính ta biết được phương trình có một nghiệm duy nhất  

Tới đây ta hoàn toàn có thể tiến hành các bước phân tích trên vào lời giải như sau:

**- Cách 1:** Điều kiện: 

Phương trình đã cho được biến đổi tương đương với phương trình:



 

Đặt  .

Lúc đó ta có:  

Khi đó phương trình  trở thành:

 

 

 

  

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là 

Tuy nhiên, nếu ta có hướng suy nghĩ khác ngay từ đầu dựa vào hình thức của phương trình sau khi nhóm các căn thức lại gần nhau và những gì không liên quan đến căn thức gần nhau ta sẽ có một hướng đi khác lời giải trên. Cụ thể, ta biến đổi phương trình về phương trình:



Từ nhận xét liên quan đến “hằng đẳng thức dư” sau:



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:  

Mặt khác vế phải của  có hình thức:  làm ta liên quan đến bất đẳng thức B.C.S như sau:

“, ta có: ”

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: 

Tuy vậy đó chỉ là cách nhìn của chúng ta, nhưng để áp dụng được trong bài toán ta cần xác định được rằng dấu bằng xảy ra ở đánh giá vừa tìm được phải xảy ra cho bất đẳng thức này.

Muốn vậy ta lập tỉ lệ:  cho  ta có hai vế bằng nhau

Đồng thời khi  ta lại có giá trị của biểu thức

 bằng 16.

Vậy xem như sự linh cảm của chúng ta có lý và đồng thời lúc đó có dấu của bất đẳng thức B.C.S nên ta sẽ có biểu thức  nên bài toán chuyển về bài toán so sánh như sau: .

Tuy nhiên, đó chỉ là sự linh cảm chính xác về hướng tư duy đi, nhưng còn một vấn đề nữa chúng ta cần chú ý là cần kiểm tra lại xem điều chúng ta linh cảm có thật sự là chính xác dấu đẳng thức có thật sự xảy ra hay không hay bị ngược dấu, vấn đề này hết sức quan trọng. Cụ thể, nếu ta tiến để dấu đẳng thức xảy ra ta sẽ áp dụng bất đẳng thức như sau:

  

Rõ ràng tới đây, bài toán không giải quyết được vì bất đẳng thức bị ngược dấu, phải chăng linh cảm hướng đi của ta bị phá sản?

Hãy bình tĩnh, chúng ta xem thử chúng ta có vấn đề gì? Vấn đề ở chỗ là chỗ dấu bằng xảy ra ở phía trên tuy có xảy ra nhưng lại không cho kết quả đúng.

Lại thấy khi  ta lại có: 

Mặt khác: 

Dấu  này là một sự khả thi khá rõ trong lúc chúng ta cần vế phải bé hơn 16. Từ đó, ta có thêm cách giải sau:

**- Cách 2:** Điều kiện: 

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:



Ta có:  Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi   Lại áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:

  

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

  

Từ đó ta có: 

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  và cũng chính là ngiệm của phương trình.

Qua sự phát hiện ra:  ta có thể đưa bài toán theo hướng tư duy khác đó là ta sẽ đưa bài toán giải phương trình như đề bài đã cho về bất phương trình với sự cảm nhận là phương trình có một nghiệm duy nhất nên bất phương trình cần xét sẽ có tính đúng nhất định để suy ra nghiệm của phương trình. Cụ thể ta có cách giải tiếp theo sau đây:

**- Cách 3:** Điều kiện:  Do: 

Ta sẽ chứng minh: 



 



   (luôn đúng)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:  

Thử lại ta có ngay  là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**- Bình luận.** Qua ba cách giải này, nhìn về bài gải có lẽ độc giả dễ cảm nhận lời giải cách ba hay và gọn hơn, tuy nhiên cách giải thứ 2 và thứ 3 đòi hỏi một sự tư duy và tỉnh táo nhất định mới có thể triển khai thành công, còn cách 1 tuy có vẻ khó nhận ra về điều đặc biệt ở lập phương một tổng nhưng để đi đến được điều đó chúng ta lại bắt đầu bằng những tư duy tự nhiên và đó chính là nét trong sáng ở cách giải thứ nhất.

**Ví dụ 22.** Giải phương trình 

**- Phân tích hướng giải.** Quan sát phương trình điều dễ nhận thấy nhất là bên vế phải phương trình tuy là một phương trình bậc ba khá rắc rối, tuy nhiên có hai hạng tử khi nhóm lại sẽ bắt được nhân tử chung với bên vế trái của phương trình.

Thật vậy, ta có:  

Khi đó ta sẽ biến đổi phương trình về phương trình:



Tới đây ta tinh ý một chút ta sẽ có nhận xét:



Như vậy, rõ ràng sử dụng nhân lượng liên hợp ta lại tiếp tục bắt nhân tử chung một lần nữa và đưa phương trình thành:





Hãy để ý trong biểu thức  có chứa hệ số 4 trước các biểu thức   làm ta có liên tưởng đến hằng đẳng thức. Do đó ta biến đổi sau:





Và tới đây ta đã xem như bài toán được giải quyết trọn vẹn. Từ đó ta đi đến lời giải chi tiết như sau:

- Điều kiện: 

Phương trình đã cho được biến đổi thành:













  

Đối chiếu điều kiện (\*) ta có nghiệm của phương trình là:  

**- Bình luận.** Bài toán này, các bạn dễ mắc sai lầm ở bước  nếu khẳng định vô nghiệm do thấy tổng hai số dương. Các bạ chú ý ta chỉ khẳng định được nó vô nghiệm khi mà tổng đó dương thật sự với mọi giá trị.