

CHUYÊN ĐỀ: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

A. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

Khái niệm: Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số k và tồn tại một giá trị của biến để A có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biến thuộc khoảng xác định nói trên

Xét biểu thức $A(x)$

+) Ta nói $A(x)$ có giá trị lớn nhất là M , nếu

$A(x) \leq M, \forall x$ và có giá trị x_0 sao cho $A(x_0) = M$ (Chỉ ra 1 giá trị là được)

+) Ta nói $A(x)$ có giá trị nhỏ nhất là m , nếu

$A(x) \geq m, \forall x$ và có giá trị x_0 sao cho $A(x_0) = m$ (Chỉ ra 1 giá trị là được)

Như vậy :

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A , ta cần :

- Chứng minh $A \geq k$ với k là hằng số
- Chỉ ra dấu “=” có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của A , ta cần :

- Chứng minh $A \leq k$ với k là hằng số
- Chỉ ra dấu “=” có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

Ký hiệu: $\min A$ là giá trị nhỏ nhất của A và $\max A$ là giá trị lớn nhất của A

Ví dụ: Sai lầm

$$A(x) = 2x^2 - 2x + 3 = x^2 + (x-1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow GTNN = 2 \text{ (Không chỉ ra được dấu =)}$$

Đáp án đúng là: $A(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2} \Rightarrow GTNN = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

B. Các dạng toán

Dạng 1: Tìm GTLN, GTNN của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ **Phương pháp:** Áp dụng hằng đẳng thức số 1 và số 2**Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau**

a. $A(x) = x^2 - 4x + 24$

b. $B(x) = 2x^2 - 8x + 1$

c. $C(x) = 3x^2 + x - 1$

Lời giải

a) Ta có $A(x) = x^2 - 4x + 24 = (x - 2)^2 + 20 \geq 20 \forall x \Rightarrow \min A(x) = 20 \Leftrightarrow x = 2$

b) Ta có $B(x) = 2x^2 - 8x + 1 = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7 \Rightarrow \min B = -7 \Leftrightarrow x = 2$

c) Ta có $C(x) = 3x^2 + x - 1 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{12} \geq -\frac{13}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$

Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A(x) = -5x^2 - 4x + 1$

b. $B(x) = -3x^2 + x + 1$

Lời giải

a. Ta có $A(x) = -5x^2 - 4x + 1 = -5\left(x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}\right) = -5\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \leq \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

b. Ta có $B(x) = -3x^2 + x + 1 = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{13}{12} \leq \frac{13}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$

Dạng 2: Tìm GTLN, GTNN của đa thức có bậc cao hơn 2

Phương pháp: Ta đưa về dạng tổng bình phương

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$

b. $B(x) = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30$

c. $C(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2017$

d. $D(x) = x^4 - x^2 + 2x + 7$

Lời giải

a. Ta có $A(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9) = (x^2 - 3x)^2 + (x - 3)^2 \geq 0 \forall x$

$$\Rightarrow \min A(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

b. Ta có $B(x) = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30 = (x^2 - 5x)^2 + (x - 5)^2 + 5 \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$

c. Ta có $C(x) = x^2(x^2 + 2) - 2x(x^2 + 2) + (x^2 + 2) + 2015 = (x^2 + 2)(x - 1)^2 + 2015 \geq 2015 \Leftrightarrow x = 1$

d. Ta có $D(x) = x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 + 2x + 1 + 5 = (x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2 + 5 \geq 5 \Leftrightarrow x = -1$

Bài 2: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $E(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 22$

b. $F(x) = x(x - 3)(x - 4)(x - 7)$

c. $G(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6) - 2006$

Lời giải

a. Ta có:

$$E(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 22 = (x^4 - 4x^3 + 4x^2) + 5(x^2 - 4x + 4) + 2 = (x^2 - 2x)^2 + 5(x - 2)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow x = 2$$

b) Ta có $F(x) = x(x - 3)(x - 4)(x - 7) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12) = y^2 - 36 \geq -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$

c) Ta có $G(x) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) - 2006 = (x^2 + 5x)^2 - 2042 \geq -2042 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$

Dạng 3 : Đa thức có từ 2 biến trở lên

Phương pháp: Đa số các biểu thức có dạng $F(x; y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + h (a, b, c \neq 0) (1)$

- Ta đưa dần các biến vào trong hằng đẳng thức $(a^2 \pm 2ab + b^2) = (a \pm b)^2$ như sau

$$F(x; y) = mK[x; y]^2 + nG[y]^2 + r(2) \text{ hoặc } F(x; y) = mK[x; y]^2 + nH[x]^2 + r(3)$$

Trong đó $G[y], H[x]$ là biểu thức bậc nhất đối với biến, còn $K[x; y] = px + qy + k$ cũng là biểu thức bậc nhất đối với cả hai biến x và y

Cụ thể:

Ta biến đổi (1) để chuyển về dạng (2) như sau với $a \neq 0; 4ac - b^2 \neq 0$

$$\text{Ta có: } 4a.F(x; y) = 4a^2x^2 + 4abxy + 4acy^2 + 4adx + 4aey + 4ah = 4a^2x^2 + b^2y^2 + d^2 + 4abxy + 4adx + 2bdy + (4ac - b^2)y^2 + 2y(2ae - bd) + 4ah - d^2$$

$$= (2ax + by + d)^2 + (4ac - b^2) \left(y + \frac{2ae - bd}{4ac - b^2} \right) + 4ah - d^2 - \left(\frac{2ae - bd}{4ac - b^2} \right)^2$$

Vậy có (2) với

$$m = \frac{1}{4a}, F(x; y) = 2ax + by + d; n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}; G(y) = y + \frac{2ae - bd}{4ac - b^2}; r = h - \frac{d^2}{4a} - \frac{(2ae - bd)^2}{4a(4ac - b^2)}$$

+) Nếu $a > 0; 4ac - b^2 > 0 \Rightarrow m > 0, n > 0 \Rightarrow (2): F(x; y) \geq r(*)$

+) Nếu $a < 0; 4ac - b^2 > 0 \Rightarrow m < 0, n < 0 \Rightarrow (2): F(x; y) \leq r(**)$

+) Nếu $m > 0, n > 0$, thì ta tìm được giá trị nhỏ nhất

+) Nếu $m < 0, n < 0$ thì ta tìm được giá trị lớn nhất

Dễ thấy rằng luôn tồn tại $(x; y)$ để có dấu của đẳng thức, như vậy ta sẽ tìm được cực trị của đa thức đã cho

Trong cả hai trường hợp trên:

- Nếu $r = 0$ thì phương trình $F(x; y) = 0$ có nghiệm

- Nếu $F(x; y) \geq r > 0$ hoặc $F(x; y) \leq r < 0$ thì không có $(x; y)$ nào thỏa mãn $F(x; y) = 0$

+) Nếu $a > 0; 4ac - b^2 < 0; r = 0 \Rightarrow (2): F(x; y)$ phân tích được tích của hai nhân tử, giúp ta giải được các bài toán khác.

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 5$

b. $B = 2x^2 - 2y^2 + 5y^2 + 5$

Lời giải

a) Ta có $A(x) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 5 = (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 4y + 4) + 1 = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1$

$$\Rightarrow A \geq 1 \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow "=" \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$$

Vậy $\min A = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$

b) Ta có $B = 2x^2 - 2y^2 + 5y^2 + 5 = (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + 5 = (x - 2y)^2 + (x + y)^2 + 5 \geq 5$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

Bài 2: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A(x) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$

b. $B(x) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

c. $C(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy - 8x - 2y + 18$

d. $D(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2(x + y + z) + 2$

e. $E(x) = 2x^2 + 8xy + 11y^2 - 4x - 2y + 6$

f. $F(x) = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 6xy + 8yz - 2xz + 2y + 4z + 2$

g. $G(x) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y$

h. $H(x) = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$

Lời giải

a. $A(x) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow x = y = 1$

b. Ta có $B(x) = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + x(y - 1) - (y - 1) - 3 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1) - 3$

$$= (x - 1)^2 + 2(x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (y - 1) + \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y - 1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 - 3 = \left[x - 1 + \frac{y - 1}{2}\right]^2 - \frac{y^2 - 2y + 1}{4} + y^2 - 2y + 1 - 3$$

$$= \left[x - 1 + \frac{y - 1}{2}\right]^2 + \frac{3(y - 1)^2}{4} - 3 \geq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + \frac{y - 1}{2} = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

c. Ta có $C(x) = 2x^2 + 4xy + 2y^2 + y^2 - 8x - 2y + 18 = 2[(x + y)^2 - 2(x + y) + 4] + (y^2 + 6y + 9) + 1$

$$= 2(x + y - 2)^2 + (y + 3)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \min A = 1 \Leftrightarrow y = -3; x = 5$$

d. Ta có $D(x) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2(x + y + z) + 2 = 2(x^2 - x) + (3y^2 - 2y) + (4z^2 - 2z) + 2$

$$= 2(x^2 - x + \frac{1}{4}) + 3(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}) + \left[(2z)^2 - 2z + \frac{1}{4} \right] + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= 2(x - \frac{1}{2})^2 + 3(y - \frac{1}{3})^2 + (2z - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{2} \geq \frac{11}{2} \Rightarrow (x, y, z) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4})$$

e. Ta có $E(x) = 2(x^2 + 4xy + 4y^2) + 3y^2 - 4x - 2y + 6 = [2(x + 2y)^2 - 4(x + 2y) + 2] + 3y^2 + 6y + 4$

$$= 2(x + 2y - 1)^2 + 3(y + 1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

f. Ta có $F(x) = 2x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 6xy + 8yz - 2xz + 2y + 4z + 2$ (kho)

$$F(x) = 2x^2 - 2x(3y + z) + 2(\frac{3y + z}{2})^2 + 6y^2 + 5z^2 + 8yz - (\frac{3y + z}{2})^2 + 2y + 4z + 2$$

$$= 2(x - \frac{3y + z}{2})^2 + \frac{3}{2}(y^2 + \frac{10}{3}yz + \frac{25}{9}z^2) + \frac{1}{3}z^2 + 2y + 4z + 2$$

$$= 2(x - \frac{3y + z}{2})^2 + \left[\frac{3}{2}(y + \frac{5}{3}z)^2 + 2(y + \frac{5}{3}z) + \frac{2}{3} \right] + (\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}) + 1$$

$$= 2(...) + \frac{3}{2}(y + \frac{5}{3}z + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}(x + 1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3y + z}{2} = 0 \\ y + \frac{5}{3}z + \frac{2}{3} = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \min A = 1$$

g. Ta có $G(x) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 4y = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (x + y - z)^2 - 5 \geq -5$

$$\Leftrightarrow x = 1; y = 2; z = 3$$

h. Ta có $H(x) = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1 \Rightarrow 4H(x) = (2x)^2 - 2.2x.y + y^2 + 3y^2 - 4x + 4y + 4$

$$= (2x - y)^2 - 2(2x - y) + 3y^2 + 2y + 3 + 1 = (2x - y - 1) + 3(y^2 + \frac{2}{3}y + 1) = (2x - y - 1) + 3(y + \frac{1}{2})^2 + \frac{8}{3} \geq \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \min 4A = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = \frac{-1}{3} \Rightarrow \min A = \frac{2}{3}$$

Bài 3: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A = -4x^2 - 5y^2 + 8xy + 10y + 12$

b. $-x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Lời giải

a. $A = -4x^2 - 5y^2 + 8xy + 10y + 12 = -4x^2 + 8xy - 4y^2 - y^2 + 10y - 25 + 37 = -4(x - y)^2 - (y - 5)^2 + 37 \leq 37$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$$

$$b. A = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y \Rightarrow 4A = -4x^2 - 4y^2 + 4xy + 8x + 8y$$

$$A = -4x^2 + 4x(y+2) - (y+2)^2 + (y+2)^2 - 4y^2 + 8y$$

$$= -(2x - y - 2)^2 - 3(y^2 - 4y) + 4 = -(2x - y - 2)^2 - 3(y - 2)^2 + 16 \leq 16 \Rightarrow A \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Bài 4: Tìm GTNN của các biểu thức sau

$$a. A = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82$$

$$b. B = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + 5xy - 3yz - 3xz - 2x - 2y + 3$$

Lời giải

$$a. \text{Ta có } A = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 82 = 9y^2 - 12y(x+4) + 4(x+4)^2 - 4(x+4)^2 + 5x^2 + 24x + 82$$

$$= [3y - 2(x+4)]^2 + (x-4)^2 + 2 \geq 2 \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 4; y = \frac{16}{3}$$

$$b. \text{Ta có } B = \left[z - \frac{3}{2}(x+y) \right]^2 + \frac{3}{4} \left(x + \frac{y}{3} - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{2}{3}(y-2)^2 + 1 \geq 1$$

Bài 5:

$$\text{Tìm GTLN của } A = x + y + z - (x^2 + 2y^2 + 4z^2)$$

Lời giải

$$\text{Ta có } -A = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2z - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{16} \geq -\frac{7}{16} \Rightarrow A \leq \frac{7}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{8}$$

Bài 6: Học sinh giỏi Yên Dũng Bắc Giang

$$\text{Tìm GTNN của } A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013 = x^2 + 2x(y+1) + (y+1)^2 + (y-3)^2 + 2003 \geq 2003 \Leftrightarrow x = -4; y = 3$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

$$\text{Tìm GTNN của: } A = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } A = x^2 - 2x(y-1) + 2y^2 - 10y + 17 = x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 + [2y^2 - 10y + 17 - (y-1)^2]$$

$$= (x - y + 1)^2 + (y^2 - 8y + 16)$$

Bài 2:

Tìm min của $B = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } B = x^2 - x(y + 2) + y^2 - 2y = \left[x^2 - 2x \cdot \frac{y+2}{2} + \frac{y^2 + 4y + 4}{4} \right] + y^2 - 2y - \frac{y^2}{4} - y - 1$$

$$4B = (x - y - 2)^2 + 4y^2 - 8y - y^2 - 4y - 4$$

Bài 3:

Tìm min của: $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } C = x^2 + x(y - 3) + y^2 - 3y = \left[x^2 + 2x \cdot \frac{y-3}{2} + \frac{y^2 - 6y + 9}{4} \right] + y^2 - 3y - \frac{y^2 - 6y + 9}{4}$$

$$4C = (x + y - 3)^2 + [4y^2 - 12y - y^2 + 6y - 9]$$

Bài 4:

Tìm min của: $D = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } D = x^2 - 2x(y + 6) + 6y^2 + 2y + 45 = x^2 - 2x \cdot (y + 6) + (y + 6)^2 + 6y^2 + 2y + 45 - (y^2 + 12y + 36)$$

$$= (x - y - 6)^2 + 5y^2 - 10y + 9$$

Bài 5:

Tìm min của: $E = x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } E = x^2 - x(y - 2) + 3y^2 - 10y + 20 = x^2 - 2x \cdot \frac{y-2}{2} + \frac{y^2 - 4y + 4}{4} + 3y^2 - 10y + 20 - \frac{y^2 - 4y + 4}{4}$$

$$4E = (x - y + 2)^2 + (12y^2 - 40y + 80) - (y^2 - 4y + 4) = (x - y + 2)^2 + (11y^2 - 36y + 76)$$

Bài 6:

Tìm max của: $F = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 10y - 3$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } -F = x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - 10y + 3 = x^2 - 2x(y+1) + 4y^2 - 10y + 3$$

$$-F = x^2 - 2x(y+1) + (y+1)^2 + 4y^2 - 10y + 3 - (y+1)^2$$

Bài 7:

$$\text{Tìm min của: } G = (x-ay)^2 + 6(x-ay) + x^2 + 16y^2 - 8ay + 2x - 8y + 10$$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } G = \left[(x-ay)^2 + 6(x-ay) + 9 \right] + (x^2 + 2x + 1) + 16y^2 - 8ay - 8y$$

$$G = (x-ay+3)^2 + (x+1)^2 + 16y^2 - 8y(a+1) + (a+1)^2 - (a+1)^2$$

$$G = (x-ay+3)^2 + (x+1)^2 + (4y-a-1)^2 - (a+1)^2 \geq -(a+1)^2$$

Bài 8:

$$\text{Tìm max của: } H = -x^2 + xy - y^2 - 2x + 4y + 11$$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } -H = x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y - 11 = x^2 - x(y-2) + y^2 - 4y - 11$$

$$-H = x^2 - 2x \cdot \frac{y-2}{2} + \frac{y^2 - 4y + 4}{4} + y^2 - 4y - 11 - \frac{(y-2)^2}{4}$$

$$\Rightarrow -4H = (x-y+2)^2 + 4y^2 - 16y - 44 - (y^2 - 4y + 4)$$

Bài 9:

$$\text{Tìm min của: } I = x^2 + 4xy + 5y^2 - 6y + 11$$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } I = (x^2 + 4xy + 4y^2) + y^2 - 6y + 11$$

Bài 10:

$$\text{Tìm min của: } K = x^2 + y^2 - xy + 3x + 3y + 20$$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } 4K = 4x^2 + 4y^2 - 4xy + 12x + 12y + 80 = \left[4x^2 - 4x(y-3) + (y-3)^2 \right] + \left[4y^2 + 12y + 80 - (y-3)^2 \right]$$

$$4K = (2x-y+3)^2 + 3y^2 + 18y + 71$$

Bài 11:

Tìm min của: $M = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y + 1$

Hướng dẫn

Ta có $M = (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2y + 1)$

Bài 12:

Tìm min của: $N = x^2 - 2xy + 2y^2 - x$

Hướng dẫn

Ta có $N = x^2 - x(2y+1) + 2y^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{2y+1}{2} + \frac{(2y+1)^2}{4} + 2y^2 - \frac{(2y+1)^2}{4}$

$4N = (x - 2y - 1)^2 + 8y^2 - (4y^2 + 4y + 1)$

Bài 13:

Tìm min của: $A = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x + 1997$

Hướng dẫn

Ta có $A = x^2 - 2x(y+1) + 3y^2 + 1997 = x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 + 3y^2 + 1997 - (y^2 + 2y + 1)$

Bài 14:

Tìm min của: $Q = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y$

Hướng dẫn

Ta có $Q = x^2 - 2x(y-1) + 2y^2 - 10y = x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 + 2y^2 - 10y - (y^2 - 2y + 1)$

Bài 15:

Tìm min của: $R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y$

Hướng dẫn

Ta có $R = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = (x+y)^2 + (y-1)^2 - 1 \geq -1$

Bài 16:

Tìm min của: $A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32$

Hướng dẫn

Ta có $A = 4x^2 + 5y^2 - 4xy - 16y + 32 = (4x^2 - 4xy + y^2) + (4y^2 - 16y + 32)$

Bài 17:

Tìm min của: $B = x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 4z + 12$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= (x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4yz + 4z^2) + (z^2 - 4z + 4) + 8 \\ &= (x - 2y)^2 + (y - 2z)^2 + (z - 2)^2 + 8 \geq 8 \end{aligned}$$

Bài 18:

Tìm min của: $C = 5x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x + 4$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } C = (4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + 9y^2) + (x^2 - 4x + 4) = (2x - 3y)^2 + (x - 2)^2 \geq 0$$

Bài 19:

Tìm max của: $D = -x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } -D = x^2 + y^2 - xy - 2x - 2y = x^2 - x(y + 2) + y^2 - 2y$$

$$-D = x^2 - 2x \cdot \frac{y+2}{2} + \frac{(y+2)^2}{4} + y^2 - 2y - \frac{y^2 + 4y + 4}{4}$$

Bài 20:

Tìm min của: $E = x^2 + 5y^2 - 4xy + 2y - 3$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } E = x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 + 2y + 1 - 4 = (x - 2y)^2 + (y + 1)^2 - 4 \geq -4$$

Bài 21:

Tìm GTNN của $A = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có Ta có: } 4P = a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2) + 4 + 2ab - 4a - 4b = (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 \geq 0$$

Bài 22:

Tìm min của: $G = x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 3$

Hướng dẫn

Ta có $4G = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12x - 12y + 12$

$$4G = 4x^2 + 4x(y-3) + (y-3)^2 + (4y^2 - 12y + 12) - (y^2 - 6y + 9)$$

$$4G = (2x + y - 3)^2 + 3y^2 - 6y + 3 = (2x + y - 3)^2 + 3(y-1)^2 \geq 0$$

Bài 23:

CMR không có giá trị x, y, z thỏa mãn: $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x + 8y - 6z + 15 = 0$

Hướng dẫn

Ta có $(x^2 - 2x + 1) + (4y^2 + 8y + 4) + (z^2 - 6z + 9) + 1 \geq 1$

Bài 24:

Tìm min của: $A = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3$

Hướng dẫn

Ta có $A = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 2 \geq 2$

Bài 25:

Tìm min của: $B = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 10y + 17$

Hướng dẫn

Ta có $B = x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2 + 2y^2 - 10y + 17 - (y^2 - 2y + 1) = (x - y + 1)^2 + (y^2 - 8y + 16)$

Bài 26:

Tìm min của: $D = 2x^2 + 2xy + 5y^2 - 8x - 22y$

Hướng dẫn

Ta có $2D = 4x^2 + 4xy + 10y^2 - 16x - 44y = 4x^2 + 4x(y-4) + 10y^2 - 44y$

$$2D = 4x^2 + 2.2x(y-4) + (y-4)^2 + 10y^2 - 44y - y^2 + 8y - 16$$

Bài 27:

Tìm min của: $E = 2x^2 + 9y^2 - 6xy - 6x - 12y + 2004$

Hướng dẫn

Ta có $2E = 4x^2 + 18y^2 - 12xy - 6x - 24y + 4008$

$$2E = 4x^2 - 12x(y+1) + 9(y+1)^2 + 18y^2 - 24y + 4008 - 9(y^2 + 2y + 1)$$

Ta có $2E = (2x - y - 1)^2 + 9y^2 - 42y + 3999$

Bài 28:

Tìm min của: $F = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 12y + 45$

Hướng dẫn

Ta có $F = x^2 - 2x(y+6) + (y+6)^2 + 6y^2 + 12y + 45 - (y^2 + 12y + 36) = (x - y - 6)^2 + 5y^2 + 9 \geq 9$

Bài 29:

Tìm GTNN của biểu thức : $a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3$

Hướng dẫn

Ta có $P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3 \Rightarrow 4P = (a - b)^2 + 3(a + b - 2)^2 \geq 0$

Bài 30:

Tìm min của: $A = x^2 + 6y^2 + 14z^2 - 8yz + 6zx - 4xy$

Hướng dẫn

Ta có $A = x^2 - 2x(2y + 3z) + 6y^2 - 14z^2$

$\Rightarrow A = x^2 - 2x(2y + 3z) + (2y + 3z)^2 + 6y^2 - 14z^2 - (4y^2 + 12yz + 9z^2)$

$\Rightarrow A = (x - 2y - 3z)^2 + 2y^2 - 12yz - 23z^2$

Bài 31:

Tìm min của: $B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$

Hướng dẫn

Ta có $B = x^2 - 2x(y - z + 1) + 2y^2 + 3z^2 - 2y - 8z + 2000$

$= x^2 - 2x(y - z + 1) + (y - z + 1)^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2y - 2z + 2000 - (y^2 + z^2 + 1 - 2yz - 2z + 2y)$

$= (x - y + z - 1)^2 + (y^2 + 2z^2 - 4y + 2yz + 1999)$

$= (x - y + z - 1)^2 + [y^2 - 2y(z + 2) + (z + 2)^2] + 2z^2 - (z^2 + 4z + 4) + 1999$

$= (x - y + z - 1)^2 + (y - z - 2)^2 + (z^2 - 4z + 1995)$

Dạng 4: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức có quan hệ ràng buộc giữa các biến

Phương pháp:

Cách 1: Biểu thị ẩn này qua ẩn kia, rồi đưa về một tam thức bậc hai

Cách 2: Sử dụng điều kiện đã cho, làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa biểu thức cần tìm cực trị

Cách 3: Sử dụng các bất đẳng thức đã biết và một số bất đẳng thức phụ

*) Hệ quả của bất đẳng thức Cosy

$$+ a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{Dấu} = \text{khi } a = b, \text{ với } a, b \text{ không âm})$$

$$+ a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (\text{Dấu} = \text{khi } a = b)$$

$$+ a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (\text{Dấu} = \text{khi } a = 1)$$

$$+ (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$+ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

*) Bất đẳng thức Bunhiacopski

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2$$

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = x^3 + y^3 + xy$ với $x + y = 1$

b. $B = 5x^2 + y^2$ với $x + y = 1$

c. $C = x^2 + 2y^2$ với $x + 2y = 1$

d. $D = 2x^2 + 5y^2$ với $4x - 3y = 7$

Lời giải

a. Ta có $A = (x+y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$

$$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y \Rightarrow A = (1 - y)^2 + y^2 = 2y^2 - 2y + 1 = 2\left(y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right) + 1 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$

b. Ta có

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow B = 5x^2 + (1 - x)^2 = 6x^2 - 2x + 1 = 6\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right) + \frac{5}{6} = 6\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} \geq \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}; y = \frac{5}{6}$$

c. Ta có $C = x^2 + 2y^2 = 6y^2 - 4y + 1 \Rightarrow \min C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = x = \frac{1}{3}$

d. Ta có

$$4x - 3y = 7 \Rightarrow y = \frac{4x-7}{3} \Rightarrow D = 2x^2 + 5\left(\frac{4x-7}{3}\right)^2 \Rightarrow 9D = 98x^2 - 280x + 245 = 2(7x-10)^2 + 45 \geq 45$$

$$\Rightarrow \min D = 5 \Leftrightarrow x = \frac{10}{7}; y = \frac{-3}{7}$$

Bài 2: Học sinh giỏi Bắc Giang, năm học 2011

Cho $a+b=1$. Tìm GTNN của $A = a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a)$

Lời giải

Ta có $a+b=1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b=1-a \Rightarrow A &= a(a^2 + 2b) + b(b^2 - a) = a^3 + 2ab + b^3 - ab = a^3 + b^3 + ab = a^3 + (1-a)^3 + a(1-a) = 2a^2 - 2a + 1 \\ &= 2\left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right) = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \forall a \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 3: Học sinh giỏi Hà Nội, năm học 2006 - 2007

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y=2$. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + 2xy$

Lời giải

$$A = x^3 + y^3 + 2xy = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 2xy$$

Theo giả thiết

$$x+y=2 \Rightarrow y=2-x \Rightarrow A = 2^3 - 6x(2-x) + 2x(2-x) = 4x^2 - 8x + 8 = 4(x-1)^2 + 4 \geq 4 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x=y=1$$

Bài 4:

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y+4=0$. Tìm GTLN của $A = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy = 2(x+y)^3 - 6xy(x+y) + 3(x+y)^2 - 6xy + 10xy \\ &= 28xy - 80 = 28x(-4-x) - 80 = -28(x^2 + 4x + 4) + 32 \Rightarrow A = -28(x+2)^2 + 32 \leq 32 \Leftrightarrow x = -2 \rightarrow y = -2 \end{aligned}$$

Bài 5: Học sinh giỏi Hà Nội, năm học 1996 - 1997

Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 - xy = 4$. Tìm GTLN, GTNN của $P = x^2 + y^2$

Lời giải

Ta có:

$$x^2 + y^2 - xy = 4 \Rightarrow 8 = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2xy = x^2 + y^2 + (x - y)^2 \geq x^2 + y^2 \Rightarrow P \leq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \pm 2$$

Vậy GTLN của $P = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases}$

Mặt khác:

$$8 = 2(x^2 + y^2) - 2xy = 3(x^2 + y^2) - (x - y)^2 \leq 3(x^2 + y^2) \Rightarrow P \geq \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ x = -y = \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vậy GTNN của $P = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}}; y = \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ x = \frac{-2}{\sqrt{3}}; y = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Bài 6:

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $2x + 2y + z = 4$. Tìm GTLN của biểu thức $A = 2xy + yz + zx$

Lời giải

Từ giả thiết: $2x + 2y + z = 4 \Rightarrow z = 4 - 2x - 2y \Rightarrow A = 2xy + y(4 - 2x - 2y) + x(4 - 2x - 2y)$

$$= -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x + 4y \Rightarrow 2A = -4x^2 - 4y^2 - 4xy + 8x + 8y = -4x^2 - 4x(y + 2) - (y - 2)^2 + (y - 2)^2 - 4y^2 + 8y$$

$$= -(2x + y - 2) - 3(y^2 - \frac{4}{3}y) + 4 = -(2x + y - 2) - 3(y - \frac{2}{3})^2 + \frac{16}{3} \leq \frac{16}{3} \Rightarrow A \leq \frac{16}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{4}{3}$$

Bài 7:

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm GTLN của $A = xy + 2yz + 3xz$

Lời giải

Từ giả thiết

$$\Rightarrow z = 6 - x - y \Rightarrow A = xy + z(2y + 3x) = xy + (6 - x - y)(2y + 3x) = -3x^2 - 2y^2 - 4xy + 18x + 12y$$

$$\Rightarrow 3A = -9x^2 - 6y^2 - 12xy + 54x + 36y = -9x^2 - 6x(2y - 9) - 6y^2 + 36y = -(3x + 2y - 9)^2 - 2y^2 + 81 \leq 81$$

$$\Rightarrow A \leq 27 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 3$$

Bài 8:

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$. Tìm GTNN $A = x + y + 3$

Lời giải

Từ giả thiết

$$x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 8y^2 + 40 = 0 \Leftrightarrow (2x + 2y + 7)^2 + 4y^2 = 9$$

$$\Rightarrow (2x + 2y + 7)^2 \leq 9 \Rightarrow |2x + 2y + 7| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq 2x + 2y + 7 \leq 3 \Leftrightarrow -5 \leq x + y \leq -2 \Leftrightarrow -2 \leq A \leq 1$$

$$+) A = 1 \Leftrightarrow x = -2; y = 0$$

$$+) A = -2 \Leftrightarrow x = -5; y = 0$$

Bài 9:

Tìm GTLN, GTNN của $S = ab + 2009$, với a, b là hai số thực khác 0 và $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 4 = a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 + a^2 + \frac{b^2}{4} - ab + ab - 2 = (a - \frac{1}{a})^2 + (a - \frac{b}{2})^2 + ab + a \geq ab + 2 \Rightarrow ab \leq 2 \Rightarrow S \leq 2011$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1; b = -2 \\ a = 1; b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta lại có: } 4 = (a - \frac{1}{a})^2 + (a + \frac{b}{2})^2 - ab + 2 \geq -ab + 2 \Rightarrow ab \geq -2 \Rightarrow S \geq 2007 \Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{1}{a} = 0 \\ a + \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1; b = -2 \\ a = -1; b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy GTNN của } S = 2007 \Leftrightarrow (a, b) = (\pm 1; \pm 2)$$

Bài 10: Tuyển sinh vào 10 Thanh Hóa, năm học 2009 - 2010

Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$. Tìm GTNN, GTLN của $A = m + n + p$

Lời giải

Theo giả thiết có:

$$n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2} \Rightarrow 2n^2 + 2np + 2p^2 + 3m^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2mp + m^2 - 2mn + n^2 + m^2 - 2np + p^2 = 2 \Leftrightarrow (m+n+p)^2 + (m-n)^2 + (m-p)^2 = 2 \Rightarrow (m+n+p)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m+n+p \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m+n+p \leq \sqrt{2}$$

$$+) A = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n=0 \\ m-p=0 \\ m+n+p=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=n=p=\frac{-\sqrt{2}}{3}$$

$$+) A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n=0 \\ m-p=0 \\ m+n+p=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=n=p=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Bài 11:

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTLN, GTNN $A = x + y + 2z$

Lời giải

$$\text{Từ } x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 18 \Leftrightarrow (x+y+2z)^2 + (x-y)^2 + (2x-z)^2 + (2y-z)^2 = 18$$

$$\Rightarrow x+y+2z \leq 18 \Rightarrow -3\sqrt{2} \leq A \leq 3\sqrt{2}$$

$$+) A = -3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-z=0 \\ 2y-z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{-\sqrt{2}}{2} \\ z=-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$+) A = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}; z=\sqrt{2}$$

Bài 12:

Cho các số thực m, n, p thỏa mãn $2m^2 + 2n^2 + 4p^2 + 3mn + mp + 2np = \frac{3}{2}$ (1)

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = m + n + p$

Lời giải

$$(1) \Leftrightarrow 4m^2 + 4n^2 + 8p^2 + 6mn + 2mp + 4np = 3 \Leftrightarrow 3(m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2pm) + (m^2 - 4mp + 4p^2) + (n^2 - 2np + p^2) = 3 \Leftrightarrow 3(m+n+p)^2 + (m-2p)^2 + (n-p)^2 = 3 \Rightarrow 3(m+n+p)^2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq m+n+p \leq 1$$

$$+) A = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-2p=0 \\ n-p=0 \\ m+n+p=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{-1}{2}; n=p=\frac{-1}{4}$$

$$+) A=1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-2p=0 \\ n-p=0 \\ m+n+p=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}; n=p=\frac{1}{4}$$

Bài 13:

Cho $x+y+z=3; A=x^2+y^2+z^2; B=xy+yz+zx$

a. Chứng minh $A \geq B$

b. Tìm GTNN của A

c. Tìm GTLN của B

d. Tìm GTNN của $A+B$

Lời giải

a. Xét hiệu $A-B = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2] \geq 0 \Rightarrow A \geq B \Leftrightarrow x=y=z$

b. $(x+y+z)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=9 \\ x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \end{cases} \Rightarrow 9 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \leq 3(x^2+y^2+z^2)$

$$\Leftrightarrow 9 \leq 3A \Rightarrow A \geq 3 \Leftrightarrow x=y=z=1$$

c. $9 = (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx) = 3B \Rightarrow B \leq 3 \Leftrightarrow x=y=z=1$

d. Có: $\begin{cases} A+2B=9 \\ B \leq 3 \end{cases} \Rightarrow A+B=9-B \geq 6 \Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 14:

Cho $a, b, c \in [-1; 2]$ thỏa mãn $a+b+c=0$. Tìm GTLN của $P=a^2+b^2+c^2$

Lời giải

Với $x \in [-1, 2]$, ta có: $x \geq -1; x \leq 2 \Rightarrow (x+1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq x + 2$

Áp dụng: $P = a^2 + b^2 + c^2 \leq a + 2 + b + 2 + c + 2 = a + b + c + 6 = 6 \Rightarrow (a, b, c) = (-1, -1, 2) \Rightarrow GTLN = 6$

Bài 15:

Cho $a, b, c \in [-1; 2]$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm GTLN của $P=a^2+b^2+c^2$

Lời giải

Ta có: $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 0 \Rightarrow abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \geq 0$

$$(2-a)(2-b)(2-c) \geq 0 \Rightarrow 8 - 4(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) - abc \geq 0 \Rightarrow 3(ab+bc+ca) + 9 - 3(a+b+c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca) \geq -6 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq -2 \Rightarrow P = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 1 - 2(ab+bc+ca) \leq 5$$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c) = (-1, 0, 2) \Rightarrow Max P = 5$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11:

Tìm min của: $A = 3x^2 + y^2$ biết $3x + y = 1$

Hướng dẫn

$$\text{Từ } 3x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 3x \Rightarrow A = 3x^2 + (1 - 3x)^2 = 12x^2 - 6x + 1$$

Bài 2:

Tìm min của: $A = xy$, biết $3x + y = 1$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có } 3x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 3x \Rightarrow A = x(1 - 3x) = -3x^2 + x$$

Bài 3:

Tìm min của: $A = a^3 - b^3 - ab$ biết: $a - b = 1$

Hướng dẫn

$$a = b + 1 \Rightarrow A = (b + 1)^3 - b^3 - (b + 1)b = 2b^2 + 2b + 1$$

Bài 4:

Tìm max của: $B = ab$, biết: $3a + 5b = 12$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt ta có: } a = \frac{12 - 5b}{3}, \text{ thay vào } B = b \left(\frac{12 - 5b}{3} \right) = \frac{-5}{3}b^2 + \frac{12}{3}b$$

Bài 5:

Tìm min của: $C = x^3 + y^3 + xy$, biết: $x + y = 1$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt } \Rightarrow y = 1 - x \text{ thay vào C ta được: } C = x^3 + (1 - x)^3 + xy = 2x^2 - 2x + 1$$

Bài 6:

Tìm min của: $D = x^2 + 2y^2$ biết: $x + 2y = 1$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt } \Rightarrow x = 1 - 2y \text{ thay vào } D = (1 - 2y)^2 + 2y^2$$

Bài 7:

Tìm min của: $E = 2x^2 + 5y^2$ biết: $4x - 3y = 7$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow y = \frac{4x-7}{3}$ thay vào E và làm tiếp

Bài 8:

Cho $a, b > 0$ và $a + b = 4$, tìm GTLN của $P = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)$

Hướng dẫn

Ta có: $P = 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{4}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{3}{ab}$

Do $a, b > 0 \Rightarrow a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow ab \leq 4$

Khi đó: $\frac{3}{ab} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - \frac{3}{ab} \leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, dấu = xảy ra khi $\begin{cases} a+b=4 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$

Bài 9:

Tìm min của: $F = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$, biết $a + b = 1$ và $a, b > 0$

Hướng dẫn

Cách 1:

Ta có: $\left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2 = \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2 = 8 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$

$$\geq 8 + 4 \cdot 2 + 2 = 18$$

Cách 2:

Ta có: $F = \left(1 + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(1 + \frac{2}{b} + \frac{1}{b^2}\right) = 2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 2 + 2\left(\frac{a+b}{ab}\right) + \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)$

$$F = 2 + \frac{2}{ab} + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \quad (1)$$

Mà $a+b=1 \Rightarrow a^2+b^2=1-2ab$ thay vào (1) ta được $F = 2 + \frac{2}{ab} + \frac{1-2ab}{a^2b^2} = 2 + \frac{1}{a^2b^2}$

Lại có: $a+b=1 \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow a^2b^2 \leq \frac{1}{16}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2b^2} \geq \frac{16}{1} \Rightarrow F = 2 + \frac{1}{a^2b^2} \geq 2+16=18$

Dấu = khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Bài 10:

Cho x, y thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$. Tìm GTLN của $A = xy$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy + 2 \Rightarrow 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy + 2$

$\Rightarrow xy + 2 \leq 4 \Rightarrow xy \leq 2$

Bài 11:

Cho hai số thực $a, b \neq 0$, thỏa mãn $2a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{1}{a^2} = 4$, Tìm min, max của $S = ab + 2017$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $4 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} - ab\right) + ab + 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + ab + 2$

$\Rightarrow ab + 2 \leq 4 \Rightarrow ab + 2017 \leq 2019 \Rightarrow S \leq 2019$

Mặt khác: $4 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2\right) + \left(a^2 + \frac{b^2}{4} + ab\right) - ab + 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 - ab + 2$

$\Rightarrow -ab + 2 \leq 4 \Rightarrow ab \geq -2 \Rightarrow ab + 2017 \geq 2015 \Rightarrow S \geq 2015$

Bài 12:

Cho hai số x, y khác 0 thỏa mãn $x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} = 8$. Tìm min, max của $A = xy + 2024$

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có: $8 = x^2 + \frac{8}{x^2} + \frac{y^2}{8} \Rightarrow 16 = 2x^2 + \frac{16}{x^2} + \frac{y^2}{4} = \left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + xy\right) - xy + 8$

$$\Rightarrow 8 = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - xy + 8 \Rightarrow -xy + 8 \leq 16 \Rightarrow xy \geq -8 \Rightarrow A = xy + 2024 \geq 2016$$

Mặt khác: $16 = \left(x^2 + \frac{16}{x^2} - 8\right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy\right) + xy + 8 = \left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + xy - 8$

$$\Rightarrow xy - 8 \leq 16 \Rightarrow xy \leq 8 \Rightarrow S = xy + 2024 \leq 2032$$

Bài 13:

Cho $x, y \in \mathbb{R}$ khác 0 biết $8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4$. Tìm x, y để $B = x.y$ đạt min và đạt max

Hướng dẫn

Ta có: $4 = 8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = \left(4x^2 + \frac{1}{4x^2} - 2\right) + (4x^2 + y^2 - 4xy) + 4xy + 2$

$$4 = \left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + (2x - y)^2 + 4xy + 2 \Rightarrow 4xy + 2 \leq 4 \Rightarrow B = xy \leq \frac{1}{2}$$

Mặt khác: $4 = \left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + (2x + y)^2 - 4xy + 2 \Rightarrow -4xy + 2 \leq 4 \Rightarrow B = xy \geq -\frac{1}{2}$

Bài 14:

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm min của $A = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$

Hướng dẫn

Ta có: $A = 16(xy)^2 + 12x^3 + 12y^3 + 9xy + 25xy = 6x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$

Vì $x + y = 1$ nên $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2 - 3xy = 1 - 3xy$, thay vào A

$A = 6x^2y^2 + 12(1 - 3xy) + 34xy$, Đặt $xy = t$ khi đó $A = 6t^2 - 2t + 12$

Bài 15:

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm min của biểu thức $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$

Hướng dẫn

Ta có: $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy = x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 + 16xy + 8xy = x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) + 24xy$

Do $x + y = 1 \Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy$ thay vào C ta được:

$$C = x^2y^2 + 4(1 - 3xy) + 24xy = x^2y^2 + 12xy + 4 = (x^2y^2 + 2xy \cdot 6 + 36) - 32 = (xy + 6)^2 - 32 \geq -32$$

$$\text{Min} C = -32, \text{ Dấu} = \text{xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

Bài 16:

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x+2y=3$. Tìm min của $A=x^2+2y^2$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $x=3-2y$ thay vào $A=(3-2y)^2+2y^2=6y^2-12y+9$

Bài 17:

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2+y^2-xy=4$. Tìm min và max của $A=x^2+y^2$

Hướng dẫn

Ta có: $x^2+y^2-xy=4 \Rightarrow 2x^2+2y^2-2xy=8 \Rightarrow (x-y)^2+x^2+y^2=8$

$$\Rightarrow x^2+y^2 \leq 8 \text{ hay } A \leq 8$$

mặt khác: $8=2x^2+2y^2-2xy \Rightarrow 2x^2+2y^2=8+2xy \Rightarrow 3x^2+3y^2=8+(x+y)^2 \geq 8 \Rightarrow x^2+y^2 \geq \frac{8}{3}$

$$\text{hay } A \geq \frac{8}{3}$$

Bài 18:

Cho x, y thỏa mãn $x+y=2$. Tìm min của $A=x^3+y^3+2xy$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $y=2-x$ thay vào A ta được: $A=x^3+(2-x)^3+2x(2-x)$

Bài 19:

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x+y+4=0$. Tìm max của $A=2(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)+10xy$

Hướng dẫn

Ta có: $x+y=-4$, nên $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=-64+12xy$,

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16-2xy$ thay vào $A=2(-64+12xy)+3(16-2xy)+10xy$

Bài 20:

Cho $x, y, z \in R$, thỏa mãn $2x+2y+z=4$. Tìm max của $A=2xy+yz+zx$

Hướng dẫn

Từ giả thiết $\Rightarrow z = 4 - 2x - 2y$ thay vào A ta được :

$$A = 2xy + y(4 - 2x - 2y) + x(4 - 2x - 2y) = -2x^2 - 2y^2 - 2xy + 4x + 4y$$

Bài 21:

Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm max của $A = xy + 2yz + 3zx$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow z = 6 - x - y$ thay vào $A = xy + 2y(6 - x - y) + 3x(6 - x - y)$

Bài 22:

Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$. Tìm min và max của $S = x + y + 3$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $x^2 + 2xy + 7x + 7y + 2y^2 + 10 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 2x\left(\frac{2y+7}{2}\right) + \frac{(2y+7)^2}{4} + 2y^2 + 7y + 10 - \frac{(2y+7)^2}{4} = 0 \Rightarrow \left(x + y + \frac{7}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x + y + \frac{7}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -5 \leq x + y \leq -2 \Rightarrow -2 \leq x + y + 3 \leq 1$$

Bài 23:

Cho các số thực m, n, p thỏa mãn $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$. Tìm min, max của $A = m + n + p$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $2n^2 + 2np + 2p^2 = 2 - 3m^2 \Rightarrow 3m^2 + 2n^2 + 2p^2 + 2np = 2$

$$\Rightarrow (m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2mp) + (2m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp) = 2$$

$$\Rightarrow (m + n + p)^2 + (m - p)^2 + (m - n)^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq m + n + p \leq \sqrt{2}$$

Bài 24:

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, Tìm min, max của $P = x + y + 2z$

Hướng dẫn

Ta có: $P^2 = (x + y + 2z)^2 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4xz$, nên ta nhân 6 vào giả thiết:

$$18 = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = (x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4yz + 4zx) + (5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4yz - 4zx)$$

$$18 = (x + y + 2z)^2 + (x - y)^2 + (2x - z)^2 + (2y - z)^2 \Rightarrow (x + y + 2z)^2 \leq 18$$

$$-\sqrt{18} \leq x + y + 2z \leq \sqrt{18}$$

Bài 25:

Cho các số thực m, n, p thỏa mãn: $2m^2 + 2n^2 + 4p^2 + 3mn + mp + 2np = \frac{3}{2}$,

Tìm min, max của $B = m + n + p$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $4m^2 + 4n^2 + 8p^2 + 6mn + 2mp + 4np = 3$

$$\Rightarrow 3(m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np) + (m^2 + n^2 + 5p^2 - 4mp - 2np) = 3$$

$$\Rightarrow 3(m + n + p)^2 + (2p - m)^2 + (n - p)^2 = 3 \Rightarrow 3(m + n + p)^2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq m + n + p \leq 1$$

Bài 26:

Cho x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$, Tìm min, max của $A = xy + yz + zx$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow z = 3 - x - y$ thay vào $A = xy + y(3 - x - y) + x(3 - x - y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y$

Bài 27:

Cho x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$, Tìm min max của $B = -xy + 3yz + 4zx$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $z = 3 - x - y \Rightarrow B = -xy + 3y(3 - x - y) + 4x(3 - x - y)$

$$\Rightarrow B = -4x^2 - 3y^2 - 16xy + 9y + 12x$$

Bài 28:

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $2x + 3y - z = 4$. Tìm min max của $A = -xy + yz + zx$

Hướng dẫn

Từ giả thiết $\Rightarrow z = 2x + 3y - 4$ thay vào $A = -xy + y(2x + 3y - 4) + x(2x + 3y - 4)$

Bài 29:

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $2x + 3y - z = 4$, tìm min max của $B = 12xy - 3yz - 4zx$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $z = 2x + 3y - 4$ thay vào $B = 12xy - 3y(2x + 3y - 4) - 4x(2x + 3y - 4)$

Bài 30:

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x + y = -2$, tìm min của $A = 2(x^3 + y^3) - 15xy + 7$

Hướng dẫn

Từ $x + y = -2$, ta có: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -8 + 6xy$

Thay vào $A = 2(-8 + 6xy) - 15xy + 7 = -3xy - 9$ và $y = -x - 2$ thay vào $A = -3x(-2 - x) - 9$

Bài 31:

Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x + y = -2$.

Tìm min của $B = x^4 + y^4 - x^3 - y^3 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 13xy$

Hướng dẫn

$$B = x^4 + y^4 - x^3 - y^3 + 2x^2y^2 + 2xy(x^2 + y^2) + 13xy$$

Từ $x + y = -2$, ta có: $x^4 + y^4 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = (4 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$

$$x^3 + y^3 = 6xy - 8, \quad x^2 + y^2 = 4 - 2xy$$

Thay vào B ta được: $B = (4 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - (6xy - 8) + 2x^2y^2 + 2xy(4 - 2xy) + 13xy$

$$B = -xy + 24, \text{ thay } y = -2 - x \Rightarrow B = x^2 + 2x$$

Bài 32:

Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $x + y = 5$, tìm max của: $A = x^3 + y^3 - 8(x^2 + y^2) + xy + 2$

Hướng dẫn

Vì $x + y = 5$ nên $x^3 + y^3 = 125 - 15xy$ và $x^2 + y^2 = 25 - 2xy$

thay vào $A = 125 - 15xy - 8(25 - 2xy) + xy + 2$

Bài 33:

Cho hai số x, y thỏa mãn $x + y = 5$. Tìm max của $B = x^4 + y^4 - 4(x^3 + y^3) - 20(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 + xy$

Hướng dẫn

$$B = x^4 + y^4 - 4(x^3 + y^3) - 20(x^2 + y^2) - 2x^2y^2 + xy$$

Vì $x + y = 5$ nên $x^4 + y^4 = (25 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$, $x^3 + y^3 = 125 - 15xy$, $x^2 + y^2 = 25 - 2xy$

$$B = (25 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - 4(125 - 15xy) - 20(25 - 2xy) - 2x^2y^2 + xy$$

Bài 34:

Cho hai số x, y thỏa mãn $x^4 + y^4 - 7 = xy(3 - 2xy)$. Tìm min max của $P = xy$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt} \Rightarrow x^4 + y^4 - 3xy + 2x^2y^2 = 7 \Rightarrow (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + 4x^2y^2 - 3xy = 7 \Rightarrow (x^2 - y^2)^2 + \left(2xy - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}$$

$$\Rightarrow \left(2xy - \frac{3}{4}\right)^2 \leq \frac{121}{16}$$

Bài 35:

Cho các số thực x, y thỏa mãn $7x^2 + 9y^2 + 12xy - 4x - 6y - 15 = 0$. Tìm min max của $A = 2x + 3y + 5$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt} \Rightarrow (2x)^2 + (3y)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y - 2 \cdot 2x - 2 \cdot 3y + 1 + 3x^2 = 16 \Rightarrow (2x + 3y + 1)^2 + 3x^2 = 16$$

Bài 36:

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $3x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 2yz = 5$, Tìm min max của: $P = x + y$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt ta có: } (x^2 + y^2 + 2xy) + (2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy - 2xz + 2yz) = 5$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 + (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + (4z^2 - 4xz + x^2) = 5$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq x + y \leq \sqrt{5}$$

Bài 37:

Cho các số x, y, z thỏa mãn: $3x + y + 2z = 1$. Tìm min max của: $p = x^2 + y^2 + z^2$

Hướng dẫn

$$\text{Từ gt ta có: } y = 1 - 3x - 2z \Rightarrow y^2 = 1 + 9x^2 + 4z^2 - 6x + 12xz - 4z$$

$$\text{khi đó } P = 10x^2 + 5z^2 + 12xz - 6x - 4z + 1$$

Bài 38:

Cho các số x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm max của $A = 2xy + 3yz + 4zx$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow z = 1 - x - y$ thay vào $A = 2xy + 3y(1 - x - y) + 4x(1 - x - y)$

Bài 39:

Cho $x, y \in \mathbb{R}$, thỏa mãn $x + 2y = 1$. Tìm max của $P = xy$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow x = 1 - 2y$ thay vào $P = y(1 - 2y)$

Bài 40:

Cho $x, y \geq 0; x + y = 1$. Tìm min, max của $A = x^2 + y^2$

Hướng dẫn

Từ giả thiết $\Rightarrow y = 1 - x$ thay vào $A = x^2 + (1 - x)^2$

Bài 41:

Tìm min max của $P = x + y + z$, biết $y^2 + z^2 + yz = 1 - \frac{3}{2}x^2$

Hướng dẫn

Từ giả thiết $\Rightarrow 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 2 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 2$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + (2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2zx) = 2$

$\Rightarrow (x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (x - z)^2 = 2 \Rightarrow (x + y + z)^2 \leq 2$

Bài 42:

Cho $x^2 + 3y^2 + 2xy - 10x - 14y + 18 = 0$. Tìm min, max của $S = x + y$

Hướng dẫn

Từ gt $\Rightarrow x^2 + 2x(y - 5) + (y - 5)^2 + 3y^2 - 14y + 18 - y^2 + 10y - 25 = 0$

$\Rightarrow (x + y - 5)^2 + 2(y^2 - 2y + 1) = 9 \Rightarrow (x + y - 5)^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x + y - 5 \leq 3$

Bài 43:

Cho a, b, c không âm thỏa mãn $3a + 2c = 51; c + 5b = 21$. Tìm max của $A = a + b + c$

Hướng dẫn

Cộng theo vế giả thiết ta được $3a + 3c + 5b = 72 \Rightarrow 3(a + b + c) = 72 - 2b \leq 72$

Do $b \geq 0 \Rightarrow a+b+c \leq \frac{72}{3} = 24$

Bài 44:

Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $2a+b=6-3c$ và $3a+4b=3c+4$

Tìm min $E = 2a+3b-4c$

Hướng dẫn

Cộng theo vế ta được: $a+b=2 \Rightarrow \begin{cases} a=4-3c \\ b=3c-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \leq \frac{4}{3} \\ c \geq \frac{2}{3} \end{cases}$, do $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

Khi đó $E = 2(4-3c) + 3(3c-2) - 4c = 2 - c$

Bài 45:

Cho $x, y, z \geq 0, 2x+7y=2014, 3x+5z=3031$. Tìm GTLN của biểu thức $A = x+y+z$

Hướng dẫn

Cộng theo vế của gt ta có $5x+5y+5z=5045-2y \leq 5045$ do $y \geq 0$

nên $5(x+y+z) \leq 5045 \Rightarrow x+y+z \leq 1009$

Bài 46:

Cho $a+b=2$, Tìm max của: $A = ab(a^2+b^2)$

Hướng dẫn

Ta có: $a+b=2 \Rightarrow a^2+b^2=4-2ab \Rightarrow A = ab(4-2ab) = -2a^2b^2 + 4ab$

$A = -(a^2b^2 - 2ab + 1) + 2 \leq 2$, Max $A = 2$

Bài 47:

Cho x, y thỏa mãn: $(11x+6y+2015)(x-y+3)=0$. Tìm min của $P = xy - 5x + 2016$

Hướng dẫn

Từ gt ta có: $11x+6y+2015=0$ hoặc $x-y+3=0$

TH1: Ta có: $11x+6y+2015=0 \Rightarrow y = \frac{11x+2015}{6}$ thay vào P

TH2: ta có: $x-y+3=0 \Rightarrow y = x+3$ thay vào P

Bài 48:

Cho 3 số x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm GTLN của $B = xy + yz + zx$

Hướng dẫn

Ta có: $B = xy + z(x + y) = xy + [3 - (x + y)](x + y)$

$$= xy + 3(x + y) - (x + y)^2 = -x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y = -\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{-3}{4}(y-1)^2 + 3 \leq 3$$

Bài 49:

Cho $x^2 + xy + 3y^2 = 5$. Tìm Min hoặc max của biểu thức $P = x^2 - 2xy + 2y^2$

Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } \frac{P}{5} = \frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{x^2 + xy + 3y^2}$$

Dạng 5: Phương pháp đổi biến số

Phương pháp:

- Phân tích thành các biểu thức tương đồng để đặt ẩn phụ.
- Sử dụng phương pháp nhóm hợp lý làm xuất hiện nhân tử để đặt ẩn phụ.
- Sử dụng các hằng đẳng thức $(a \pm b)^2, (a+b+c)^2$.

Bài 1:

Tìm GTNN của biểu thức $A = (x-1)^2 + (x-3)^2$

Lời giải

$$\text{Đặt } y = x - 2 \Rightarrow A = (y+1)^2 + (y-1)^2 = 2y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2$$

Bài 2:

Tìm GTNN của $A = (x-1)(x-4)(x-5)(x-8)$

Lời giải

$$A = (x-1)(x-4)(x-5)(x-8) = (x^2 - 9x + 8)(x^2 - 9x + 20)$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - 9x + 8 \Rightarrow A = t(t+12) = t^2 + 12t = (t+6)^2 - 36 \geq -36 \Leftrightarrow t = 6 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$$

Bài 3:

Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2} (x \neq 0)$

Lời giải

$$A = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 - 4y + y^2 \left(y = \frac{1}{x} \right) \Rightarrow A = (y-2)^2 - 3 \geq -3 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bài 4:

Tìm GTNN của: $D = (x+8)^4 + (x+6)^4$

Lời giải

$$A = x(x-7)(x-3)(x-4) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12), \text{ đặt } x^2 - 7x + 6 = t, \text{ khi đó:}$$

$$A = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36, \text{ dấu “=” khi } t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

Vậy $\min A = -36$ khi $x = 1$ hoặc $x = 6$

Bài 5:

Tìm GTNN của $B = (x-1)(x-3)(x^2-4x+5)$

Lời giải

$$B = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 5), \text{ đặt } x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Khi đó $B = (t-1)(t+1) = t^2 - 1 \geq -1$, dấu “=” khi $t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Bài 6:

Tìm min của $A = x(x+2)(x+4)(x+6) + 8$

Lời giải

$$A = x(x+6)(x+2)(x+4) + 8 = (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 8, \text{ đặt } x^2 + 6x + 4 = t.$$

Khi đó $A = (t-4)(t+4) + 8 = t^2 - 16 + 8 = t^2 - 8 \geq -8$, dấu “=” xảy ra khi $t^2 = 0$

$$x^2 + 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + \sqrt{5} \\ x = -3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Bài 7:

Tìm GTNN của: $B = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

Lời giải

$$B = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6), \text{ Đặt } x^2 + 5x + 5 = t, \text{ Khi đó:}$$

$$B = (t-1)(t+1) = t^2 - 1 \geq -1, \text{ Dấu “=” khi } t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Bài 8:

Tìm GTNN của $A = (x^2 + x - 6)(x^2 + x + 2)$

Lời giải

$$\text{Đặt } x^2 + x - 2 = t. \text{ Khi đó } A = (t-4)(t+4) = t^2 - 16 \geq -16$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } t = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bài 9:

Tìm GTNN của $C = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

Lời giải

$$C = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6), \text{ đặt } x^2 + 5x = t.$$

$$\text{Khi đó } C = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36, \text{ dấu “=” khi } t=0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases}$$

Bài 10:

$$\text{Tìm GTNN của } D = (2x-1)(x+2)(x+3)(2x+1)$$

Lời giải

$$D = (2x-1)(x+3)(x+2)(2x+1) = (2x^2 + 5x - 3)(2x^2 + 5x + 2), \text{ đặt } 2x^2 + 5x = t$$

$$\text{khi đó } D = (t-3)(t+2) = t^2 - t - 6 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \geq -\frac{25}{4}, \text{ dấu “=” khi } t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{4}$$

Bài 11:

$$\text{Tìm min của } C = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2011$$

Lời giải

$$C = (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) + 2011 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 2011, \text{ đặt } x^2 + 5x + 5 = t$$

$$\text{Khi đó } C = (t-1)(t+1) + 2011 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Bài 12:

$$\text{Tìm max của } E = 5 + (1-x)(x+2)(x+3)(x+6)$$

Lời giải

$$E = 5 - (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = -(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) + 5, \text{ đặt } x^2 + 5x = t.$$

$$\text{Khi đó } E = -(t-6)(t+6) + 5 = -(t^2 - 36) + 5 = -t^2 + 41 \leq 41$$

$$\text{Dấu “=” Khi } t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases}$$

Bài 13:

$$\text{Tìm GTNN của } M = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$$

Lời giải

$$M = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2+5x-6)(x^2+5x+6), \text{ đặt } x^2+5x=t.$$

$$\text{Khi đó } M = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36, \text{ dấu “=” khi } t=0 \Leftrightarrow x^2+5x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases}$$

Bài 14:

$$\text{Tìm min của } D = (x+1)(x^2-4)(x+5) + 2014$$

Lời giải

$$D = (x+1)(x+2)(x-2)(x+5) + 2014 = (x^2+3x-10)(x^2+3x+2) + 2014, \text{ đặt } x^2+3x-4=t$$

$$\text{Khi đó } D = (t-6)(t+6) + 2014 = t^2 + 1978, \text{ dấu “=” xảy ra khi } t^2=0 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Bài 15:

$$\text{Tìm GTNN của } C = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$$

Lời giải

$$C = (x^4 - 2.3x^2.x + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9) = (x^2 - 3x)^2 + (x-3)^2 \geq 0$$

Bài 16:

$$\text{Tìm GTNN của } D = (x+8)^4 + (x+6)^4$$

Lời giải

$$\text{Đặt: } x+7=y \Rightarrow D = (y+1)^4 + (y-1)^4 = 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2$$

Bài 17:

$$\text{Tìm max của } F = 2 - 3(x+1)^4 - 3(x-5)^4$$

Lời giải

$$\text{Đặt } x-2=t \Rightarrow F = 2 - 3(t+3)^4 - 3(t-3)^4$$

$$-F = 3(t^2+6t+9)^2 + 3(t^2-6t+9)^2 - 2 = 6t^4 + 324t^2 + 484 = 6(t^4 + 54t^2) + 484$$

$$F = -6(t^2+27)^2 + 3890 \leq 3890$$

Bài 18:

Tìm min của $G = (x+3)^4 + (x-7)^4$

Lời giải

$$\text{Đặt } x-2=t \Rightarrow G = (t+5)^4 + (t-5)^4 = (t^2+10t+25)^2 + (t^2-10t+25)^2$$

$$G = 2t^4 + 300t^2 + 1250 = 2(t^4 + 2.75t^2 + 5625) - 10^4 = 2(t^2 + 75)^2 - 10^4 \geq -10^4$$

Bài 19:

Tìm min của $I = x^4 - 6x^3 + 11x^2 + 12x + 20$

Lời giải

$$I = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 12x + 20 = x^2(x^2 - 6x + 9) + 2x^2 - 12x + 20$$

$$I = x^2(x-3)^2 + 2(x^2 - 6x + 9) + 2 = x^2(x-3)^2 + 2(x-3)^2 + 2 \geq 2$$

Bài 20:

Tìm số nguyên m lớn nhất sao cho BĐT luôn đúng với mọi x : $(x+1)(x+2)^2(x+3) \geq m$

Lời giải

$$VT = (x+1)(x+3)(x+2)^2 = (x^2+4x+3)(x^2+4x+4), \text{ đặt } x^2+4x=t, \text{ Khi đó:}$$

$$VT = (t+3)(t+4) = t^2 + 7t + 12 = t^2 + 2t \cdot \frac{7}{2} + \frac{49}{4} + 12 - \frac{49}{4} = \left(t + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{-1}{4}$$

Dạng 6 : Sử dụng bất đẳng thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối

a. Định nghĩa:
$$\begin{cases} |A| = A \Leftrightarrow A \geq 0 \\ |A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0 \end{cases}$$

b. Tính chất

+) $\forall A \in \mathbb{R} \Rightarrow |A| \geq 0; |A| \geq A$

+) $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x+y| \leq |x|+|y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

+) $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x-y| \geq |x|-|y| \Leftrightarrow (x-y).y \geq 0$

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = |x-3| + |x-7|$

b. $B = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

c. $C = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

d. $D = |x+5| + |x+2| + |x-7| + |x-8|$

e. $E = |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| + |x+6|$

Lời giải

a. $A = |x-3| + |x-7| = |x-3| + |7-x| \geq |x-3+7-x| = |4| = 4 \Rightarrow A \geq 4 \Leftrightarrow (x-3)(7-x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$

b. $B = |x-1| + |x-2| + |x-3|$

Ta có $B = |x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq 2(1) \Leftrightarrow (x-1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

Mà $|x-2| \geq 0 \Leftrightarrow x = 2(2) \Rightarrow C \geq 2 \Leftrightarrow x = 2$

c. $C = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Ta có $|x-1| + |x-3| = |x-1| + |3-x| \geq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3; |x-2| + |x-4| = |x-2| + |4-x| \geq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

$\Rightarrow C \geq 4 \Rightarrow \min C = 4 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

d. $D = |x+5| + |x+2| + |x-7| + |x-8|$

Áp dụng bất đẳng thức $|M| \geq M \forall M \in \mathbb{R}$

Ta có : $D = |x+5| + |x+2| + |7-x| + |8-x| \geq x+5+x+2+7-x+8-x = 22 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \min D = 22 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -2 \\ x \leq 7 \\ x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 7$$

$$e. E = |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| + |x+5| + |x+6| = |-x-1| + |-x-2| + |-x-3| + |x+4| + |x+5| + |x+6|$$

$$\Rightarrow E \geq -x-1-x-2-x-3+x+4+x+5+x+6=9 \forall x \in R \Rightarrow \min E = 9 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -3$$

Bài 2:

Cho số thực x . Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = |x+3| + |x-2| + |x-5|$

b. $B = |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| + |x-6|$

Lời giải

a. $A = |x+3| + |x-2| + |x-5| = |x+3| + |x-2| + |x-5| \geq |x+3| + |5-x| \geq x+3+5-x=8 \forall x \in R$

Dấu '=' $\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-2=0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x=2 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

b. $B = |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5| + |x-6| = |x-2| + |x-3| + |x-4| + |5-x| + |6-x|$

$$\geq |x-2| + |x-3| + |5-x| + |6-x| \geq x-2+x-3+5-x+6-x=6 \forall x \in R \Leftrightarrow x=4$$

Bài 3:

Cho số thực x . Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A = |x+5| - |x-2|$

b. $B = |x-2| - 3|x-5| - |x-4|$

Lời giải

a. $A = |x+5| - |x-2|$

Áp dụng bất đẳng thức: $|x| - |y| \leq |x-y| \forall x, y \in R \Leftrightarrow y(x-y) \geq 0$

$$A = |x+5| - |x-2| \leq |x+5-(x-2)| = 7 \forall x \in R \Rightarrow \max A = 7 \Leftrightarrow (x-2)(x+5-x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

b. $B = |x-2| - 3|x-5| - |x-4|$

$$\text{Vì } -|x-5| \leq 0 \Rightarrow B \leq |x-2| - |x-4| \leq |x-2-x+4| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ (x-4)(x-2-x+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

Bài 4: Chuyên Lê Hồng Phong, năm học 2003

Cho số thực x . Tìm GTNN của $A = \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x+2}}$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-2} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x-2 \Rightarrow x = t^2 - 2 \Rightarrow A = \sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = \sqrt{(t-1)^2} + \sqrt{(t-3)^2}$$

$$=|t-1|+|3-t|\geq t-1+3-t=2 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1\geq 0 \\ 3-t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq t\leq 3 \Leftrightarrow 1\leq \sqrt{x-2}\leq 3 \Leftrightarrow 3\leq x\leq 11$$

Bài 5:

Cho số thực x . Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \sqrt{x-4} + 2\sqrt{x-5} + \sqrt{x-1-4\sqrt{x-5}} (x \geq 5)$

b. $B = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + 5\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} (x \geq 1)$

Lời giải

a. Đặt $t = \sqrt{x-5} (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 + 5 \Rightarrow A = \sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(2-t)^2} = |t+1| + |2-t| = t+1 + |2-t| \geq t+1+2-t = 3$

$$A=3 \Leftrightarrow 2-t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-5} \leq 2 \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 9$$

b. Đặt $t = \sqrt{x-1} (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 + 1 \Rightarrow A = \sqrt{(t-1)^2} + 5\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = |t-1| + 5|t-2| + |3-t|$

$$\geq |t-1| + |3-t| \geq t-1+3-t=2 \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 \geq 0 \\ t=2 \\ t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow \min A=2 \Leftrightarrow x=5$$

Bài 6: HSG Sóc Trăng, năm học 2014 - 2015

Tìm GTNN của $A = |x+3| + |x-2| + 2012$

Lời giải

Ta có $A = |x+3| + |x-2| + 2012 = |x+3| + |2-x| + 2012$

Lại có : $|x+3| \geq x+3 \Leftrightarrow x \geq -3$

Mà $|2-x| \geq 2-x \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow A = |x+3| + |2-x| + 2012 \geq x+3+2-x+2012 = 2017$

Vậy $\min A = 2017 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$

Bài 7: HSG Quảng Ngãi, năm học 2015 - 2016

Tìm GTNN của $A = |x+3| + |x-1| + |x-4| - 3$

Lời giải

Ta có $A = |x+3| + |x-1| + |x-4| - 3 = |x+3| + |x-1| + |4-x| - 3$

Lại có $|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow x=1; |x+3| \geq x+3 \Leftrightarrow x \geq -3; |4-x| \geq 4-x \Leftrightarrow x \leq 4 \Rightarrow A \geq x+3+0+4-x-3 = 4$

Vậy $\min A = 4 \Leftrightarrow x=1$

Bài 8:

Tìm GTNN của $A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n| + 2017 (a_1 < a_2 < \dots < a_n)$

Lời giải

- Trường hợp $n = 2k \Rightarrow A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_k| + |a_{k+1} - x| + |a_{k+2} - x| + \dots + |a_{2k} - x| + 2017$

Ta có $|x - a_i| \geq x - a_i \Leftrightarrow x \geq a_i \forall i = \overline{1, k}; |a_{k+1} - x| \geq a_{k+1} - x \Leftrightarrow x \leq a_{k+1} \forall j = \overline{1, k}$

$\Rightarrow A \geq x - a_1 + x - a_2 + \dots + x - a_k + a_{k+1} - x + a_{k+2} - x + \dots + a_{2k} - x + 2017 = (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{2k}) -$

$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + 2017 \Leftrightarrow a_k \leq x \leq a_{k+1}$

- Trường hợp

$n = 2k + 1 \Rightarrow A = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_k| + |x - a_{k+1}| + |a_{k+2} - x| + |a_{k+3} - x| + \dots + |a_{2k+1} - x| + 2017$

Ta có: $|x - a_{k+1}| \geq 0 \Leftrightarrow x = a_{k+1}; |a_{k+j} - x| \geq a_{k+j} - x \Leftrightarrow x \leq a_{k+j} \forall j = \overline{1, k}$

Lại có $|x - a_i| \geq x - a_i \Leftrightarrow x \geq a_i \forall i = \overline{1, k}; |a_{k+j} - x| \geq a_{k+j} - x \Leftrightarrow x \leq a_{k+j} \forall j = \overline{1, k}$

$\Rightarrow A = x - a_1 + x - a_2 + \dots + x - a_k + 0 + a_{k+2} - x + \dots + a_{2k+1} - x + 2017 = (a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_{2k+1}) -$

$(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + 2017 \Rightarrow \text{Min} B = (a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_{2k+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_k) + 2017 \Leftrightarrow x = a_{k+1}$

Bài 9: HSG Yên Bái, năm học 2015 - 2016

Tìm GTNN của $A = |5x + 3| + |2x - 3| - x + 1$

Lời giải

Ta có $A = |5x + 3| + |2x - 3| - x + 1 = 2 \left| x + \frac{3}{5} \right| + 3 \left| x + \frac{3}{5} \right| + |2x - 3| - x + 1$

Mặt khác $2 \left| x + \frac{3}{5} \right| \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{5}; 3 \left| x + \frac{3}{5} \right| \geq 3 \left(x + \frac{3}{5} \right) \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{5}$

Lại có $|3 - 2x| \geq 3 - 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow B \geq 0 + 3 \left(x + \frac{3}{5} \right) + 3 - 2x + 1 = \frac{29}{5} \Rightarrow \text{Min} B = \frac{29}{5} \Leftrightarrow x = \frac{-3}{5}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Chuyên Toán Quảng Ngãi, năm học 2014 - 2015

Tìm GTNN của $A = |4x + 3| + |5x - 7| + |2x - 9| - 15$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = \frac{-1}{5} \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$

Bài 2:

Tìm GTNN của $A = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = 4 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

Bài 3:

Tìm GTNN của $A = (2x-1)^2 - 3|2x-1| + 2$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ hay $x = \frac{-1}{4}$

Bài 4:

Tìm GTNN của $A = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-1998|$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = 999^2 \Leftrightarrow 999 \leq x \leq 1000$ hay $x = \frac{-1}{4}$

Bài 5: Chuyên Toán Quảng Ngãi, năm học 2015 - 2016

Tìm GTNN của $A = |x\sqrt{3}+2| + |x\sqrt{5}-7| + |x\sqrt{11}-9|$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = \frac{9}{\sqrt{11}}(\sqrt{11}-\sqrt{5}+\sqrt{3}) \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{11}}$ hay $x = \frac{-1}{4}$

Bài 6: Chuyên Toán Quảng Trị, năm học 2015 - 2016

Tìm GTNN của $A = |x\sqrt{5}-6| + |x\sqrt{2}+1| + 2x + 2017$

Lời giải

Ta có $\text{Min}A = \frac{2018\sqrt{2}+\sqrt{5}-2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ hay $x = \frac{-1}{4}$

Dạng 7: Dạng phân thức

A. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Phương pháp: Biểu thức dạng này đạt giá trị nhỏ nhất khi mẫu đạt giá trị lớn nhất

$$A = \frac{m}{ax^2 + bc + c} \Rightarrow A_{\min} \Leftrightarrow (ax^2 + bc + c)_{\max}$$

Bài 1: Tìm GTLN hoặc GTNN của các biểu thức sau

a) $A = \frac{1}{9x^2 - 12x + 10}$

b) $B = \frac{2}{x^2 + x + 4}$

c) $C = \frac{y^2}{9x^2 - 12xy + 5y^2} (x \neq 0)$

Lời giải

a. Ta có: $9x^2 - 12x + 10 = (3x - 2)^2 + 6 \geq 6 \forall x \Rightarrow \frac{1}{(3x - 2)^2 + 6} \leq \frac{1}{6} \Rightarrow A_{\max} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

b. $B = \frac{2}{x^2 + x + 4} = \frac{2}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} \leq \frac{2}{\frac{15}{4}} = \frac{8}{15} \Rightarrow B_{\max} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

c. $C = \frac{y^2}{9x^2 - 12xy + 5y^2} (x \neq 0)$

+) $y = 0 \Rightarrow A = 0$

+) $y \neq 0 \Rightarrow A = \frac{1}{9\frac{x^2}{y^2} - 12\frac{x}{y} + 5} = \frac{1}{9t^2 - 12t + 5} (t = \frac{x}{y}) \Rightarrow A = \frac{1}{(3t - 2)^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y$

Bài 2: Tìm GTLN hoặc GTNN của các biểu thức sau

a) $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

b) $y = \frac{2}{6x - 5 - 9x^2}$

c) $A = \frac{3y^2}{-25x^2 + 20xy - 5y^2} (x \neq 0)$

Lời giải

a) Ta có thể viết: $y = \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

$$\text{Vì } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow y \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

Vậy GTLN của $y = \frac{4}{3}$ tại $x = \frac{-1}{2}$

$$\text{b) } y = \frac{2}{6x-5-9x^2} = \frac{-2}{(3x-1)^2+4}; (3x-1)^2+4 \geq 4 \forall x \Rightarrow \frac{1}{(3x-1)^2+4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-2}{(3x-1)^2+4} \geq \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{c) } y = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\text{+) } y \neq 0 \Rightarrow A = \frac{3}{-25\frac{x^2}{y^2} + 20\frac{x}{y} - 5} = \frac{3}{-25t^2 + 20t - 5} = \frac{-3}{(5t-2)^2+1}$$

$$\text{Vì } (5t-2)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{(5t-2)^2+1} \leq 1 \Rightarrow A \geq -3 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y$$

Bài 3:

Tìm GTLN của biểu thức sau: $A = \frac{5}{x^2 - 2x - 5}$

Lời giải

Ta có:

$$x^2 - 2x - 5 = (x-1)^2 - 6 = -6 + (x-1)^2 \geq -6 \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2 - 6} \leq \frac{-1}{6} \Rightarrow \frac{5}{(x-1)^2 - 6} \leq \frac{-5}{6} \Rightarrow \max A = \frac{-5}{6} \Leftrightarrow x = 1$$

Bài 4:

Tìm min của: $B = \frac{1}{x^2 - 4x + 9}$

Lời giải

$$\text{Ta có : } x^2 - 4x + 9 = (x-2)^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow B = \frac{1}{x^2 - 4x + 9} = \frac{1}{(x-2)^2 + 5} \leq \frac{1}{5}, \text{ Dấu “=” khi } x = 2$$

Bài 5:

Tìm max của: $C = \frac{-3}{x^2 - 5x + 1}$??????? min

Lời giải

$$\text{Ta có : } x^2 - 5x + 1 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} \geq \frac{-21}{4} \Rightarrow C = \frac{-3}{x^2 - 5x + 1} \leq \frac{12}{21} = \frac{4}{7}, \text{ dấu “=” khi } x = \frac{5}{2}$$

Bài 6:

Tìm min hoặc max của: $A = \frac{6}{-x^2 + 2x - 3}$

Lời giải

Ta có $-x^2 + 2x - 3 = -(x^2 - 2x + 3) = -(x-1)^2 - 2 \leq -2 \Rightarrow \frac{6}{-x^2 + 2x - 3} \geq \frac{6}{-2} = -3 \Rightarrow A \geq -3 \Leftrightarrow x = -1$.

Bài 7:

Tìm min hoặc max của: $A = \frac{2}{x^2 + 8}$

Lời giải

Ta có $x^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow \frac{2}{x^2 + 8} \leq \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow A \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 0$.

Bài 8:

Tìm min hoặc max của: $A = \frac{4}{x^2 + x + 1}$

Lời giải

Ta có: $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{x^2 + x + 1} \leq \frac{16}{3} \Rightarrow A \leq \frac{16}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$.

B. Phân thức có mẫu là bình phương của 1 nhị thức

Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

$\Rightarrow$ Ta đưa về dạng: $A = m + \frac{C}{D} \left(\frac{C}{D} \geq 0 \right)$

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1)$

c. $C = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-2)^2} (x \neq 2)$

d. $D = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22} (x \in \mathbb{R})$

e. $E = \frac{4x^4 - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$

f. $F = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5}$

Lời giải

a. $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$

$$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1) = \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} + \frac{(x^2 - 4x + 4)}{(x-1)^2} = 2 + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \geq 2 \Leftrightarrow x = 2$$

Cách khác: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1) = \frac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x-1) + 1}{(x-1)^2} = 3 - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

Đặt $y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow A = 3 - 2y + y^2 = (y-1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1)$

$$B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1) = \frac{4x^2 - 4x + 4}{4(x-1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{4(x-1)^2} + \frac{3x^2 - 6x + 3}{4(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -1$$

c. $C = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-2)^2} (x \neq 2)$

$$t = \frac{1}{x-2} \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{t} \Rightarrow C = t^2 \left[4\left(2 + \frac{1}{t}\right)^2 - 6\left(2 + \frac{1}{t}\right) + 1 \right] = 4(2t+1)^2 - 6t(2t+1) + t^2 = 5(t+1)^2 - 1 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow x = 1$$

Cách 2. Ta có:

$$C = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-2)^2} = \frac{4(x^2 - 4x + 4) + 10x - 15}{(x-2)^2} = \frac{4(x^2 - 4x + 4) + 10(x-2) + 5}{(x-2)^2} = 4 + \frac{10}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2}$$

Đặt $\frac{1}{x-2} = t \Rightarrow C = 4 + 10t + 5t^2 = 5(t^2 + 2t + 1) - 1 = 5(t+1)^2 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = -1 \Leftrightarrow x = 1$

d. $D = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22} (x \in \mathbb{R})$

$$D = \frac{2x^2 - 16x + 41}{x^2 - 8x + 22} (x \in \mathbb{R}) = \frac{2(x^2 - 8x + 22) - 3}{x^2 - 8x + 22} = 2 - \frac{3}{(x-4)^2 + 6}$$

Vì $(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-4)^2 + 6 \geq 6 \Rightarrow \frac{3}{(x-4)^2 + 6} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$D = 2 - \frac{3}{(x-4)^2 + 6} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow A_{\min} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

e. $E = \frac{4x^4 - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$ (dễ sai lầm khi đánh giá $E = \left(2t - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} + 4 = \left(2t - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{17}{16} \geq -\frac{17}{16}$)

$$E = \frac{4x^4 - x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4(x^4 + 2x^2 + 1) - 9(x^2 + 1) + 4}{(x^2 + 1)^2} = 4 - \frac{9}{x^2 + 1} + \frac{4}{(x^2 + 1)^2} = 4t^2 - 9t + 4 \left(t = \frac{1}{x^2 + 1} \right)$$

$$\Rightarrow E = \left(2t - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{81}{16} + 4 = \left(2t - \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{17}{16}$$

Ta có: $t \leq 1 \Rightarrow 2t - \frac{9}{4} \leq 2 - \frac{9}{4} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \left(2t - \frac{9}{4} \right)^2 \geq \frac{1}{16} \Rightarrow A \geq \frac{1}{16} - \frac{17}{16} = -1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Lời giải ngắn gọn hơn

$$E + 1 = \frac{5x^4 + x^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \Rightarrow E \geq -1 \Rightarrow E_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = 0$$

f. $F = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5}$

Ta có: $F = \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 5} = 3 - \frac{5}{x^2 - 4x + 5} = 3 - \frac{5}{(x-2)^2 + 1} \geq 3 - \frac{5}{1} = -2 \Leftrightarrow x = 2$

Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} \quad (x \neq 1)$

b. $B = \frac{-x^2 + x - 11}{x^2 - 2x + 1} \quad (x \neq 1)$

c. $C = \frac{x}{x^2 + 10x + 25} \quad (x \neq -5)$

d. $D = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1} \quad (x \neq 1)$

Lời giải

a. $A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} \quad (x \neq 1)$

$$A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3(x^2 + 2x + 3)}{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2}$$

Có: $(x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A \leq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow A_{\max} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$

b. $B = \frac{-x^2 + x - 11}{x^2 - 2x + 1} \quad (x \neq 1)$

$$B = \frac{-x^2 + x - 11}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-x^2 + 2x - 1 - x + 1 - 11}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2 - (x-1) - 11}{(x-1)^2} = -1 - \frac{1}{x-1} - \frac{11}{(x-1)^2}$$

Đặt $\frac{1}{x-1} = y \Rightarrow A = -1 - y - 11y^2 = -(11y^2 + y + 1) = -\left[11\left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} + 1\right) \right]$

$$= -\left[11\left(y + \frac{1}{22}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = \frac{-3}{4} - 11\left(y + \frac{1}{22}\right)^2 \leq \frac{-3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{-1}{22} \Leftrightarrow x = -21$$

c. $C = \frac{x}{x^2 + 10x + 25} (x \neq -5)$

$$C = \frac{x}{x^2 + 10x + 25} (x \neq -5) = \frac{x}{(x+5)^2} = \frac{(x+5)-5}{(x+5)^2} = \frac{1}{x+5} - \frac{5}{(x+5)^2} = t - 5t^2 \left(t = \frac{1}{x+5}\right)$$

$$\Rightarrow -A = 5t^2 - t = 5\left(t - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{20} \geq \frac{-1}{20} \Rightarrow A \leq \frac{1}{20} \Leftrightarrow t = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 5$$

d. $D = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow A = t^2 \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 + 4\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 14 \right] = (t+1)^2 + 4t(t+1) - 14t^2 = -(3t-1)^2 + 2 \leq 2$$

$$D = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Cách khác: Ta có

$$D = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1) = \frac{x^2 - 2x + 1 + 6x - 15}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1 + 6(x-1) - 9}{x^2 - 2x + 1} = 1 + \frac{6}{x-1} - \frac{9}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{1}{x-1} \Rightarrow D = 1 + 6t - 9t^2 = -(9t^2 - 2.3t + 1) + 2 \geq 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 4.$$

Bài 3: Tìm GTLN, GTNN

Tìm GTNN, GTLN của $A = \frac{7y^2 - 4xy}{x^2 - 2xy + 2y^2}$

Lời giải

Điều kiện $(x, y) \neq (0, 0)$

$$+) A+1 = \frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{(x-y)^2 + y^2} = \frac{(x-3y)^2}{(x-y)^2 + y^2} \geq 0 \Rightarrow A \geq -1 \Leftrightarrow x = 3y \neq 0$$

$$+) A-4 = \frac{-(y^2 + 4xy - 4x^2)}{(x-y)^2 + y^2} = \frac{-(2x-y)^2}{(x-y)^2 + y^2} \leq 0 \Rightarrow A \leq 4 \Leftrightarrow x = 1; y = 2$$

Bài 4:

Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} (x \neq -1); B = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2} (x \neq 1)$

Lời giải

$$A = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2} = \frac{(x^2 + 2x + 1) - x - 1 + 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = 1 - y + y^2 \left(y = \frac{1}{x+1} \right)$$

$$A = \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow A_{\min} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

$$+) B = \frac{x^2 - 3x + 3}{(x-1)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1) - x + 1 + 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = y^2 - y + 1 \left(y = \frac{1}{x-1} \right)$$

$$B = \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3.$$

Bài 5:

Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{\frac{1}{2}[(x+y)^2 + (x-y)^2]}{(x+y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$$

Bài 6:

Tìm GTNN của biểu thức $A = \frac{2x^2 - 10x - 1}{x^2 - 2x + 1} (x \neq 1)$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{2x^2 - 10x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) - 6(x-1) - 9}{(x-1)^2} = 2 + \frac{6}{x-1} - \frac{9}{(x-1)^2} = -\left(\frac{3}{x-1} + 1 \right)^2 + 3 \leq 3$$

$$\text{Vì } -\left(\frac{3}{x-1} + 1 \right)^2 \leq 0 \forall x \neq 1 \Rightarrow \max A = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Bài 7:

Tìm min hoặc max của: $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$

Lời giải

$$A = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}, \text{ đặt } \frac{1}{x} = t \Rightarrow A = t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3 \geq -3 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Bài 8:

Tìm min hoặc max của: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

Lời giải

$$\text{Đặt } x-1=t \Rightarrow x=t+1 \Rightarrow x^2 = t^2 + 2t + 1$$

$$A = \frac{3(t^2 + 2t + 1) - 8(t+1) + 6}{t^2} = \frac{3t^2 - 2t + 1}{t^2} = 3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{t} = a \Rightarrow A = a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow A_{\min} = 2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow \frac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$$

Bài 9:

Tìm min hoặc max của: $A = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(2x+1)^2}$

Lời giải

$$\text{Đặt } 2x+1=t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{t^2 - 2t + 1}{4}, \text{ khi đó: } A = \frac{t^2 - 2t + 1 - 3(t-1) + 1}{t^2} = \frac{t^2 - 5t + 5}{t^2} = 1 - \frac{5}{t} + \frac{5}{t^2}$$

$$\text{đặt } \frac{1}{t} = a \Rightarrow F = 1 - 5a + 5a^2 = 5\left(a^2 - a + \frac{1}{5}\right) = 5\left(a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 5\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow 2x+1=2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Bài 10:

Tìm min hoặc max của: $H = \frac{x}{(x+10)^2}$

Lời giải

$$\text{Đặt } x+10=t \Rightarrow x=t-10 \Rightarrow H = \frac{t-10}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{10}{t^2}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{t} = a \Rightarrow H = -10a^2 + a = -10\left(a^2 - \frac{1}{10}a\right) = \dots$$

Cách khác: Ta có $H = \frac{x}{(x+10)^2}$.

$$\text{Đặt } y = \frac{1}{x+10} \Rightarrow x = \frac{1}{y} - 10 \Rightarrow H = \left(\frac{1}{y} - 10\right) \cdot y^2 = -10y^2 + y = -10\left(y - \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{1}{40} \leq \frac{1}{40}$$

Vậy $MaxB = \frac{1}{40} \Leftrightarrow y - \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{20} \Leftrightarrow x = 10$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1:

Tìm min hoặc max của: $I = \frac{x}{(x+2016)^2}$

Hướng dẫn giải

Đặt $x+2016=t \Rightarrow x=t-2016 \Rightarrow I = \frac{t-2016}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{2016}{t^2}$, Đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow I = a - 2016a^2 = \dots$

Bài 2:

Tìm min hoặc max của: $A = \frac{x^2 - 2x + 2000}{x^2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $A = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2000}{x^2}$

Đặt $\frac{1}{x} = a \Rightarrow D = 1 - 2a + 2000a^2 = 2000 \left(a^2 - \frac{1}{1000}a + \frac{1}{2000} \right) = \dots$

Bài 3:

Tìm min hoặc max của: $A = \frac{x^2 - 2x + 2015}{2015x^2}$

Lời giải

Ta có: $2015A = \frac{x^2 - 2x + 2015}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2015}{x^2}$. Đặt $\frac{1}{x} = a \Rightarrow 2015A = 1 - 2a + 2015a^2$

$\Rightarrow A = a^2 - \frac{2}{2015}a + \frac{1}{2015} = \dots$

Bài 14:

Tìm min hoặc max của: $F = \frac{x}{(x+2000)^2}$

Lời giải

Đặt $x+2000=t \Rightarrow F = \frac{t-2000}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{2000}{t^2}$. Đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow F = a - 2000a^2 = \dots$

Bài 5:

Tìm min hoặc max của: $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 + 2x + 1)}$

Lời giải

$$B = \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)^2}. \text{ Đặt } x+1=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow x^2 = t^2 - 2t + 1$$

$$\Rightarrow B = \frac{t^2 - 3t + 3}{t^2} = 1 - \frac{3}{t} + \frac{3}{t^2}. \text{ Đặt } \frac{1}{t} = a \Rightarrow B = 3a^2 - 3a + 1 = \dots$$

Bài 6:

Tìm min hoặc max của $A = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x^2}$

Lời giải

$$A = 2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}. \text{ Đặt } \frac{1}{x} = a \Rightarrow A = 4a^2 + 4a + 2 = \dots$$

Bài 7:

Tìm min hoặc max của $B = \frac{x^2 - 2x + 2012}{x^2}$

Lời giải

$$B = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2012}{x^2}. \text{ Đặt } \frac{1}{x} = a \Rightarrow B = 2012a^2 - 2a + 1 = \dots$$

C. Tìm GTLN, GTNN của phân thức có dạng khác

Cách giải:

Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

1. Bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{8x+12}{x^2+4}$

b. $B = \frac{4x+2}{x^2+2}$

c. $C = \frac{(x+2)(x+8)}{x} (x > 0)$

Lời giải

a. $A = \frac{8x+12}{x^2+4} = \frac{x^2+8x+16-x^2-4}{x^2+4} = -1 + \frac{(x+4)^2}{x^2+4} \geq -1 \left(\frac{(x+4)^2}{x^2+4} \geq 0 \right) \Rightarrow A_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = -4$

b. $B = \frac{4x+2}{x^2+2} = \frac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{(x+2)^2}{x^2+2} - 1 \geq -1 \Rightarrow B_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = -2$

c. $C = \frac{(x+2)(x+8)}{x} (x > 0) = \frac{x^2+10x+16}{x} = \frac{(x-4)^2}{x} + 18 \geq 18 \Rightarrow C_{\min} = 18 \Leftrightarrow x = 4.$

Bài 2: Tìm GTNN, GTLN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{3-4x}{x^2+1}$

b. $B = \frac{2x+1}{x^2+2}$

c. $C = \frac{4x+3}{x^2+1}$

d. $D = \frac{8x+3}{4x^2+1}$

e. $E = \frac{4x}{4x^2+1}$

Lời giải

a. $A = \frac{3-4x}{x^2+1} = \frac{x^2-4x+4-x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Rightarrow \min A = -1 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

+) $A = \frac{3-4x}{x^2+1} = \frac{4x^2+4-4x^2-4x-1}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2+1} \leq 4 \Rightarrow A_{\max} = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Cách khác:

Nháp để nhằm GTLN và GTNN nếu có:

$$a = \frac{3-4x}{x^2+1} = ax^2 + a = 3-4x \Rightarrow a.x^2 + 4x + a - 3 = 0.$$

$$\text{Xét } \Delta = 16 - 4a^2 + 12a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có } K = \left(\frac{3-4x}{x^2+1} + 1 \right) - 1 = \frac{x^2+4x+4}{x^2+1} - 1 \geq -1, \text{ dấu } = \text{ khi } x = -2$$

$$\text{Mặt khác } K = \left(\frac{3-4x}{x^2+1} - 4 \right) + 4 = \frac{-4x^2-4x-1}{x^2+1} + 4 \leq 4, \text{ dấu } = \text{ khi } x = \frac{-1}{2}$$

$$\text{b. } B = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{4x+2}{2(x^2+2)}$$

$$+) B = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{4x+2}{2(x^2+2)} = \frac{(x^2+4x+4)-(x^2+2)}{2(x^2+2)} = \frac{(x+2)^2}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2} \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow A_{\min} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = -2$$

$$+) B = \frac{2x+1}{x^2+2} = \frac{4x+2}{2(x^2+2)} = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+2} + \frac{x^2+2}{x^2+2} = \frac{-(x-1)^2}{x^2+2} + 1 \leq 1 \Rightarrow A_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{c. } C = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{x^2+4x+4-x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x+2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Rightarrow C_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = -2$$

$$+) C = \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{-4x^2+4x-1+4x^2+4}{x^2+1} = \frac{-(2x-1)^2}{x^2+1} + 4 \leq 4 \Rightarrow C_{\max} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{d. } D = \frac{8x+3}{4x^2+1} = \frac{(4x^2+8x+4)-(4x^2+1)}{4x^2+1} = -1 + \frac{(2x+2)^2}{4x^2+1} \geq -1 \Rightarrow D_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

$$+) D = \frac{8x+3}{4x^2+1} = \frac{16x^2+4-(16x^2-8x+1)}{4x^2+1} = 4 - \frac{(4x-1)^2}{4x^2+1} \leq 4 \Rightarrow D_{\max} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{e. } E = \frac{4x}{4x^2+1} = \frac{4x^2+1-4x^2-1+4x}{4x^2+1} = 1 - \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} \leq 1 \Rightarrow E_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$+) E = \frac{4x}{4x^2+1} = \frac{-(4x^2+1)+(4x^2+4x+1)}{4x^2+1} = -1 + \frac{(2x+1)^2}{4x^2+1} \geq -1 \Rightarrow E_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$$

Bài 3: HSG Yên Phong Bắc Ninh, năm học 2014

$$\text{Tìm GTLN của biểu thức } A = \frac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1}$$

Lời giải

$$A = \frac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3}{x^2+1} \leq 3 \Rightarrow A_{\max} = 3 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bài 4: HSG Yên Phong Bắc Ninh, năm học 2016 - 2017

Tìm GTNN của các biểu thức sau $D = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} (x \in \mathbb{R})$

Lời giải

$$D = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} (x \in \mathbb{R}) = \frac{335(6x + 8)}{x^2 + 1} = \frac{335(x^2 + 6x + 9 - x^2 - 1)}{x^2 + 1} = \frac{335(x + 3)^2}{x^2 + 1} - 335 \geq -335 \Leftrightarrow x = -3.$$

Bài 5:

Tìm GTLN của biểu thức sau $A = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

Lời giải

+) Xét $x = 0 \Rightarrow A = 0$ giá trị này không phải giá trị lớn nhất của A vì với $x \neq 0 \Rightarrow A > 0$

+) Xét $x \neq 0$ đặt $P = \frac{1}{A} \Rightarrow A_{\max} \Leftrightarrow P_{\min}$

$$\text{Ta có } P = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1; x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \text{ (Cosi)} \Rightarrow P \geq 2 + 1 = 3 \Rightarrow P_{\min} = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Bài 6:

Tìm min hoặc max của: $M = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9}$

Lời giải

Phân tích: $a = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9} \Rightarrow a.x^2 + 9a = 27 - 12x \Rightarrow a.x^2 + 12x + 9a - 27 = 0$

$$\text{Có } \Delta' = 36 - a(9a - 27) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có : } M = \left(\frac{27 - 12x}{x^2 + 9} - 4 \right) + 4 = \frac{-4x^2 - 12x - 9}{x^2 + 9} + 4 = \frac{-(2x + 3)^2}{x^2 + 9} + 4 \leq 4$$

$$\text{Mặt khác : } M = \left(\frac{27 - 12x}{x^2 + 9} + 1 \right) - 1 = \frac{x^2 - 12x + 36}{x^2 + 9} - 1 = \frac{(x - 6)^2}{x^2 + 9} - 1 \geq -1$$

Bài 7:

Tìm min hoặc max của: $P = \frac{8x + 3}{4x^2 + 1}$

Lời giải

Phân tích: $a = \frac{8x+3}{4x^2+1} \Rightarrow 4a.x^2 + a = 8x+3 \Rightarrow 4a.x^2 - 8x + a - 3 = 0$

Có $\Delta' = 16 - 4a(a-3) \Rightarrow a = 4; a = -1$

Khi đó $P = \left(\frac{8x+3}{4x^2+1} - 4 \right) + 4 = \frac{-16x^2+8x-1}{4x^2+1} + 4 = \frac{-(4x-1)^2}{4x^2+1} + 4 \leq 4$

Mặt khác $P = \left(\frac{8x+3}{4x^2+1} + 1 \right) - 1 = \frac{4x^2+8x+4}{4x^2+1} - 1 = \frac{4(x+1)^2}{4x^2+1} - 1 \geq -1$

Bài 8:

Tìm min hoặc max của $D = \frac{2x+1}{x^2+2}$

Lời giải

Phân tích: $a = \frac{2x+1}{x^2+2} \Rightarrow a.x^2 - 2x + 2a - 1 = 0$, có $\Delta' = 1 - a(2a-1) = 0 \Rightarrow a = 1; a = -\frac{1}{2}$

Khi đó $D = \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - 1 \right) + 1 = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+2} + 1 = \frac{-(x-1)^2}{x^2+2} + 1 \leq 1$

Mặt khác $D = \left(\frac{2x+1}{x^2+2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{x^2+4x+4}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$

Bài 9:

Tìm min hoặc max của $F = \frac{2x-1}{x^2+2}$

Lời giải

Phân tích: $a = \frac{2x-1}{x^2+2} \Rightarrow a.x^2 - 2x + 2a + 1 = 0$, có $\Delta' = 1 - a(2a+1) = 1 - 2a^2 - a \Rightarrow a = \frac{1}{2}; a = -1$

Khi đó $F = \left(\frac{2x-1}{x^2+2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{-x^2+4x-4}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2} = \frac{-(x-2)^2}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

Mặt khác $F = \left(\frac{2x-1}{x^2+2} + 1 \right) - 1 = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2} - 1 = \frac{(x+1)^2}{x^2+2} - 1 \geq -1$

Bài 10:

Tìm min hoặc max của $G = \frac{6x-8}{x^2+1}$

Lời giải

Phân tích: $a = \frac{6x-8}{x^2+1} \Rightarrow a.x^2 - 6x + a + 8 = 0$, có : $\Delta' = 9 - a(a+8) = -a^2 - 8a + 9 = 0 \Rightarrow a = 1; a = -9$

Khi đó $G = \left(\frac{6x-8}{x^2+1} - 1 \right) + 1 = \frac{-x^2+6x-9}{x^2+1} + 1 = \frac{-(x-3)^2}{x^2+1} + 1 \leq 1$

Mặt khác $G = \left(\frac{6x-8}{x^2+1} + 9 \right) - 9 = \frac{9x^2+6x+1}{x^2+1} - 9 = \frac{(3x+1)^2}{x^2+1} - 9 \geq -9$

Bài 11:

Tìm GTNN của biểu thức $B = \frac{-x}{(x+2017)^2} (x > 0)$

Lời giải

Đặt $A = -B \Rightarrow A_{\max} \Leftrightarrow B_{\min}$

Ta có: $A = \frac{x}{(x+2017)^2} (x > 0) \Rightarrow A > 0$

Đặt $A_1 = \frac{1}{A} > 0 (x > 0) \Rightarrow A_{1,\min} \Leftrightarrow A_{1,\max}$

Có: $A_1 = \frac{(x+2017)^2}{x} = \frac{(x-2017)^2 + 4.2017x}{x} = \frac{(x-2017)^2}{x} + 4.2017 \geq 4.2017 = 8068$

$\Rightarrow A_{1,\min} = 8068 \Leftrightarrow x = 2017 \Rightarrow A_{\max} = \frac{1}{8068} \Leftrightarrow x = 2017 \Rightarrow B_{\min} = \frac{-1}{8068} \Leftrightarrow x = 2017$

Bài 12:

Tìm min hoặc max của $P = \frac{x^2}{x^4+1}$

Lời giải

Nháp: Đặt $x^2 = t \Rightarrow a = \frac{t}{t^2+1} \Rightarrow at^2 - t + a = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$

Khi đó $P = \left(\frac{x^2}{x^4+1} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{x^4+2x^2+1}{2(x^4+1)} - \frac{1}{2} = \frac{(x^2+1)^2}{2(x^4+1)} - \frac{1}{2} \geq \frac{-1}{2}$, không xảy ra dấu bằng

Mặt khác $P = \left(\frac{x^2}{x^4+1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{-x^4+2x^2-1}{2(x^4+1)} + \frac{1}{2} = \frac{-(x^2-1)^2}{2(x^4+1)} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

Bài 13:

Tìm min $P = \frac{2(2x+1)}{x^2+2}$

Lời giải

Nháp: $a = \frac{4x+2}{x^2+2} \Rightarrow a.x^2 - 4x + 2a - 2 = 0$, có $\Delta' = 4 - a(2a-2) = 0 \Rightarrow a = 2; a = -1$

Khi đó: $P = \left(\frac{4x+2}{x^2+2} - 2 \right) + 2 = \frac{-2x^2+4x-2}{x^2+2} + 2 = \frac{-2(x-1)^2}{x^2+2} + 2 \leq 2$

Mặt khác: $P = \left(\frac{4x+2}{x^2+2} + 1 \right) - 1 = \frac{x^2+4x+4}{x^2+2} - 1 \geq -1$

Bài 14:

Tìm min hoặc max của: $G = \frac{x^2y + x^2(x^2 - y) + 1}{2x^4 + x^4y^2 + y^2 + 2}$

Lời giải

Ta có: $G = \frac{x^2y + x^4 - x^2y + 1}{2x^4 + x^4y^2 + y^2 + 2} = \frac{x^4 + 1}{2(x^4 + 1) + y^2(x^4 + 1)} = \frac{1}{y^2 + 2}$

Bài 15:

Tìm GTLN của biểu thức sau $A = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2} (x, y \in R)$

Lời giải

Ta có: $A = \frac{xy^2 + y^2(y^2 - x) + 1}{x^2y^4 + 2y^4 + x^2 + 2} (x, y \in R) = \frac{y^4 + 1}{(y^4 + 1)(x^2 + 2)}$

Vì $y^4 + 1 \neq 0 \forall x$ nên chia cả tử và mẫu cho $y^4 + 1$ ta được: $A = \frac{1}{x^2 + 2}$

Vì $x^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2 \forall x \Rightarrow A = \frac{1}{x^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0; y \in R$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1:

Tìm min hoặc max của: $M = \frac{4x+1}{x^2+3}$

Lời giải

Nháp: $a = \frac{4x+1}{x^2+3} \Rightarrow a.x^2 - 4x + 3a - 1 = 0$, có $\Delta' = 4 - a(3a-1) = 0 \Rightarrow a = -1; a = \frac{4}{3}$

Bài 2:

Tìm min hoặc max của: $P = \frac{12x+13}{x^2+2x+3}$

Lời giải

Nháp: $a = \frac{12x+13}{x^2+2x+3} \Rightarrow a.x^2 + 2a.x + 3a - 12x - 13 = 0$,

Có $\Delta' = (a-6)^2 - a(3a-13) = 0 \Rightarrow a = -4; a = \frac{9}{2}$

Bài 3:

Tìm GTLN của biểu thức: $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$, GTLN đó đạt được tại giá trị nào của x

Lời giải

Ta có: $P(x) = \frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{P(x)} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \geq 3$

Bài 4:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1}$

Lời giải

Ta có: $B = \frac{3(x+1)}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3(x+1)}{x^2(x+1)+x+1} = \frac{3(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{3}{x^2+1}$

Do $x^2+1 > 0 \Rightarrow B = \frac{3}{x^2+1} \leq 3$, Dấu bằng khi và chỉ khi $x=0$

2. Bậc của tử bằng bậc của mẫu

Bài 1: Tìm GTN N của các biểu thức sau

a. $A = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} (x \neq 0)$

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1)$

c. $C = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$

d. $D = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2}$

Lời giải

a. $A = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} (x \neq 0) = \frac{3(x^2 - 2x + 3)}{3x^2} = \frac{(x-3)^2}{3x^2} + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow A_{\min} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 3$

b. $B = \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} (x \neq 1) = \frac{4x^2 - 4x + 4}{4(x-1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{4(x-1)^2} + \frac{3x^2 - 6x + 3}{4(x-1)^2} = \frac{(x+1)^2}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = -1$

c. $C = \frac{2(x^2 + 2x + 3)}{2(x^2 + 2)} = \frac{x^2 + 4x + 4}{2(x^2 + 2)} + \frac{x^2 + 2}{2(x^2 + 2)} = \frac{1}{2} + \frac{(x+2)^2}{2(x^2 + 2)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2$

d. $D = \frac{x^2 - 2x + 2016}{x^2} = \frac{2016x^2 - 2x \cdot 2016 + 2016}{2016x^2} = \frac{(x-2016)^2}{x^2} + \frac{2015}{2016} \geq \frac{2015}{2016} \Leftrightarrow x = 2016$

Bài 2: Tìm GTLN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{6x^2 + 2x + 19}{3x^2 + x + 7}$

b. $B = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$

Lời giải

a. $A = \frac{6x^2 + 2x + 19}{3x^2 + x + 7} = \frac{2(3x^2 + x + 7) + 5}{3x^2 + x + 7} = 2 + \frac{5}{3x^2 + x + 7}$

Đặt $M = 3x^2 + x + 7 = 3(x + \frac{1}{6})^2 + \frac{83}{12} \geq \frac{83}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6} \Rightarrow A_{\max} = M_{\min} \Rightarrow A_{\max} = 2 + \frac{5}{\frac{83}{12}} = 2 \frac{60}{83} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$

b. $B = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2x^2 - x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{2(x^2 + 2) - 4 - x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \leq 2 \Leftrightarrow x = 1$

Bài 3: Tìm GTLN, GTNN của các biểu thức sau

a. $A = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$

b. $B = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1}$

Lời giải

a. $A = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) + (x+1)^2}{x^2 + 1} = 2 + \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 2 \Leftrightarrow x = -1$

$$+) A = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 4}{x^2 + 1} - \frac{(x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \leq 4 \Leftrightarrow x = 1$$

$$b. B = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1} = \frac{3x^2 - (2x^2 + 2x + 2)}{x^2 + x + 1} = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1} - 2 \leq -2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$+) \text{ Với } x \neq 0 \Rightarrow A = \frac{3x^2}{x^2 + x + 1} - 2 = \frac{3}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2$$

$$\text{Ta lại có: } 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)^2 \geq \frac{3}{4} \Rightarrow A \geq \frac{3}{\frac{3}{4}} - 2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1}{x} \Leftrightarrow x = -2$$

Bài 4:

Tìm GTLN của $A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3}$

Lời giải

$$A = 3 + \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \Rightarrow A_{\max} \Leftrightarrow \left[\frac{1}{(x+1)^2 + 2}\right]_{\max} \Leftrightarrow [(x+1)^2 + 2]_{\min} \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow A_{\max} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

Bài 5:

Tìm GTLN của biểu thức sau $A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} (x \in \mathbb{R})$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{3x^2 + 6x + 10}{x^2 + 2x + 3} = 3 + \frac{1}{(x+1)^2 + 2} \leq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = -1$$

Bài 6:

Tìm min hoặc max của: $C = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1}$

Lời giải

$$C = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1}, \text{ Nháp : } a = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow a.x^2 + a - 2x = 0, \text{ có } \Delta = 4 - 4a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\text{Khi đó : } C = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + 1\right) - 1 + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} + 1 \geq 1$$

Mặt khác : $C = \left(\frac{2x}{x^2+1} - 1 \right) + 1 + 2 = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+1} + 3 = \frac{-(x-1)^2}{x^2+1} + 3 \leq 3$

Bài 7:

Tìm min hoặc max của: $N = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

Lời giải

$$N = 1 + \frac{x}{x^2+1}$$

Nháp $a = \frac{x}{x^2+1} = a.x^2 - x + a = 0$, có $\Delta = 1 - 4a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$

Khi đó ta có $N = \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \right) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{x^2+2x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Mặt khác $N = \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \right) + 1 + \frac{1}{2} = \frac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} = \frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$

Bài 8:

Tìm min hoặc max của $Q = \frac{3x^2-6x+17}{x^2-2x+5}$

Lời giải

Ta có $Q = 3 + \frac{2}{x^2-2x+5}$

mà $x^2-2x+5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{2}{x^2-2x+5} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Bài 9:

Tìm min hoặc max của: $R = \frac{2x^2-16x+41}{x^2-8x+22}$

Lời giải

Ta có $R = \frac{2x^2-16x+44-3}{x^2-8x+22} = 2 - \frac{3}{x^2-8x+22}$

Mà $x^2-8x+22 = (x-4)^2 + 6 \geq 6 \Rightarrow \frac{3}{(x-4)^2+6} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-3}{(x-4)^2+6} \geq \frac{-1}{2}$

Bài 10:

Tìm min hoặc max của $P = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2010}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được $P = 1 + \frac{2x - 2010}{x^2 - 2x + 2010}$,

Nháp $a = \frac{2x - 2010}{x^2 - 2x + 2010} \Rightarrow a \cdot x^2 - 2a \cdot x + 2010a - 2x + 2010 = 0$

Có $\Delta' = (a+1)^2 - a(2010a+2010) = 0 \Rightarrow a = -1; a = \frac{1}{2009}$

Làm tương tự như các bài trên.

Bài 11:

Tìm min hoặc max của $Q = \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được $Q = 2 + \frac{-2x+3}{x^2-2x+1}$, đặt $x-1=t$,

khi đó ta có $Q = 2 + \frac{3-2(t+1)}{t^2} = \frac{2t^2-2t+1}{t^2} = 2 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$, đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow Q = a^2 - 2a + 2$

Bài 12:

Tìm min hoặc max của $A = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x^2}$

Lời giải

$A = 2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$, đặt $\frac{1}{x} = t \Rightarrow A = 4t^2 + 4t + 2$

Bài 13:

Tìm min hoặc max của: $H = \frac{3x^2 - 6x + 17}{x^2 - 3x + 5}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được $H = 3 + \frac{3x+2}{x^2-3x+5}$

Nháp: $a = \frac{3x+2}{x^2-3x+5} \Rightarrow a.x^2 - 3a.x - 3x + 5a - 2 = 0$, có $\Delta = 9(x+1)^2 - 4a(5a-2)$

$$= -11a^2 + 26a + 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{13 \pm 2\sqrt{67}}{11}$$

Bài 14:

Tìm min hoặc max của $K = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$

Lời giải

$$K = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}, \text{ đặt } \frac{1}{x} = t \Rightarrow K = t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3 \geq -3$$

Bài 15:

Tìm min hoặc max của $N = \frac{2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 2x + 4}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được $N = 2 + \frac{1}{x^2 + 2x + 4}$

$$\text{mà } x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$$

Bài 16:

Tìm min hoặc max của $Q = \frac{x^2 - 2x + 1999}{x^2 - 3x + 2} : \frac{x^3}{x^2 - 3x^2 + 2x}$

Lời giải

Thực hiện phép tính ta được: $Q = \frac{x^2 - 2x + 1999}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1999}{x^2}$

Đặt $\frac{1}{x} = t \Rightarrow Q = 1999t^2 - 2t + 1$

Bài 17:

Tìm min hoặc max của: $D = \frac{2x^2 + 4x + 9}{x^2 + 2x + 4}$

Lời giải

$$D = 2 + \frac{1}{x^2 + 2x + 4}, \text{ mà } x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$$

Bài 18:

Tìm min hoặc max của: $F = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$

Lời giải

$$F = 1 + \frac{-4x}{x^2 + 2x + 2}$$

Nháp: $a = \frac{-4x}{x^2 + 2x + 2} \Rightarrow a.x^2 + 2a.x + 4a + 2a = 0$

Có $\Delta' = (a+2)^2 - a.2a = 0 \Rightarrow a = 2 \pm 2\sqrt{2}$

Bài 19:

Tìm min hoặc max của $H = \frac{2x^2 - 2xy + 9y^2}{x^2 + 2xy + 5y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được:

$$H = \frac{2.\frac{x^2}{y^2} - 2.\frac{x}{y} + 9}{\frac{x^2}{y^2} + 2.\frac{x}{y} + 5}, \text{ đặt } \frac{x}{y} = t \Rightarrow H = \frac{2t^2 - 2t + 9}{t^2 + 2t + 5} = 2 - \frac{6t+1}{t^2 + 2t + 5}$$

Nháp: $a = -\frac{6t+1}{t^2 + 2t + 5} \Rightarrow at^2 + 2at + 5a + 6t + 1 = 0$,

Có: $\Delta' = (a+3)^2 - a(5a+1) = 0 \Rightarrow a = -1; a = \frac{9}{4}$, làm giống các bài trên

Bài 20:

Tìm min hoặc max của $J = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

Lời giải

Ta có: $J = 1 + \frac{x}{x^2 - x + 1}$

Nháp: $a = \frac{x}{x^2 - x + 1} \Rightarrow a.x^2 - a.x - x + a = 0$, có $\Delta = (a+1)^2 - 4a.a = 0 \Rightarrow a = 1; a = \frac{-1}{3}$

Khi đó: $J = 1 + \left(\frac{x}{x^2 - x + 1} - 1 \right) + 1 = 2 + \left(\frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 - x + 1} \right) = 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2 - x + 1} \leq 2$

Mặt khác: $J = 1 + \left(\frac{x}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{x^2 + 2x + 1}{3(x^2 - x + 1)} \geq \frac{2}{3}$

Bài 21:

Tìm min hoặc max của $Q = \frac{5y^2 - 3xy}{x^2 - 3xy + 4y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được $Q = \frac{5 - 3 \cdot \frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2} - 3 \cdot \frac{x}{y} + 4}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow Q = \frac{5 - 3t}{t^2 - 3t + 4}$

Nháp: $a = \frac{5 - 3t}{t^2 - 3t + 4} \Rightarrow at^2 - 3at + 4a + 3t - 5 = 0$, có $\Delta = 9(a - 1)^2 - 4a(4a - 5) = 0 \Rightarrow a = -1; a = \frac{9}{7}$

Bài 22:

Tìm min hoặc max của $R = \frac{x^2 - 4y^2}{3x^2 - 4xy + 5y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được $R = \frac{\frac{x^2}{y^2} - 4}{3 \cdot \frac{x^2}{y^2} - 4 \cdot \frac{x}{y} + 5}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow R = \frac{t^2 - 4}{3t^2 - 4t + 5}$

Nháp: $a = \frac{t^2 - 4}{3t^2 - 4t + 5} \Rightarrow 3at^2 - 4at + 5a - t^2 + 4 = 0$,

Có $\Delta' = 4a^2 - (3a - 1)(5a + 4) = 0 \Rightarrow a = -1; a = \frac{4}{11}$

Bài 23:

Tìm min hoặc max của $A = \frac{x^2 - 6x + 23}{x^2 - 6x + 10}$

Lời giải

Ta có $A = 1 + \frac{13}{x^2 - 6x + 10}$

Bài 24:

Tìm min hoặc max của $B = \frac{y^2}{9x^2 - 12xy + 5y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được $B = \frac{1}{9\frac{x^2}{y^2} - 12\frac{x}{y} + 5}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow B = \frac{1}{9t^2 - 12t + 5}$

Bài 25:

Tìm min hoặc max của $D = \frac{3y^2}{-25x^2 + 20xy - 5y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được $D = \frac{3}{-25\frac{x^2}{y^2} + 20\frac{x}{y} - 5}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow D = \frac{3}{-25t^2 + 20t - 5}$

Bài 26:

Tìm min hoặc max của $E = \frac{4x^2 - 6x + 1}{(x-2)^2}$

Lời giải

Đặt $x-2=t \Rightarrow x^2 = t^2 + 4t + 4$, khi đó $E = \frac{4t^2 + 10t + 5}{t^2} = 4 + \frac{10}{t} + \frac{5}{t^2}$

Đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow E = 5a^2 + 10a + 4$

Bài 27:

Tìm min hoặc max của $F = \frac{x^2 + 4x - 14}{x^2 - 2x + 1}$

Lời giải

Đặt $x-1=t \Rightarrow x^2 = t^2 + 2t + 1$, Khi đó $F = \frac{t^2 + 6t - 9}{t^2} = 1 + \frac{6}{t} - \frac{9}{t^2}$

Đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow F = -9a^2 + 6a + 1$

Bài 28:

Tìm min hoặc max của $G = \frac{4x^2 - 6x + 3}{2x^2 - 3x + 2}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được $G = 2 + \frac{-1}{2x^2 - 3x + 2}$

Bài 29:

Tìm min hoặc max của $H = \frac{3x^2 - 2xy + y^2}{9x^2 - 6xy + 2y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được $H = \frac{3\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + 1}{9\frac{x^2}{y^2} - 6\frac{x}{y} + 2}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow H = \frac{3t^2 - 2t + 1}{9t^2 - 6t + 2}$

Nháp: $a = \frac{3t^2 - 2t + 1}{9t^2 - 6t + 2} \Rightarrow 9at^2 - 6at + 2a - 3t^2 + 2t - 1 = 0$,

có: $\Delta' = (3a - 1)^2 - (9a - 3)(2a - 1) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}; a = \frac{2}{3}$

Bài 30:

Tìm min hoặc max của $I = \frac{4x^2 + 22x + 19}{x^2 + 4x + 4}$

Lời giải

$I = 4 + \frac{6x + 3}{(x + 2)^2}$, đặt $x + 2 = t \Rightarrow I = 4 + \frac{6(t - 2) + 3}{t^2} = 4 + \frac{6}{t} - \frac{9}{t^2}$

Đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow I = -9a^2 + 6a + 4$

Bài 31:

Tìm min hoặc max của $K = \frac{9x^2 + 30x - 7}{9x^2 + 6x + 1}$

Lời giải

$$K = 1 + \frac{24x-8}{(3x+1)^2}, \text{ đặt } 3x+1=t \Rightarrow 3x=t-1 \Rightarrow K = 1 + \frac{3t-3-8}{t^2} = 1 + \frac{3}{t} - \frac{11}{t^2}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{t} = a \Rightarrow K = -11a^2 + 3a + 1$$

Bài 32:

Tìm min hoặc max của $M = \frac{x^2 - 5xy + 2y^2}{2x^2 - 10xy + 7y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được $M = \frac{\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{x}{y} + 2}{2\frac{x^2}{y^2} - 10\frac{x}{y} + 7}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow M = \frac{t^2 - 5t + 2}{2t^2 - 10t + 7}$

Nháp $a = \frac{t^2 - 5t + 2}{2t^2 - 10t + 7} \Rightarrow 2at^2 - 10at + 7a - t^2 + 5t - 2 = 0$, có $\Delta = 25(2a-1)^2 - 4(2a-1)(7a-2)$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}; a = \frac{17}{22}$$

Bài 33:

Tìm min hoặc max của $N = \frac{22x^2 - 58xy + 73y^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được $N = \frac{22\frac{x^2}{y^2} - 58\frac{x}{y} + 73}{\frac{x^2}{y^2} - 4\frac{x}{y} + 4}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow N = \frac{22t^2 - 58t + 73}{t^2 - 4t + 4}$

$$N = 22 + \frac{30t-15}{(t-2)^2}, \text{ đặt } t-2=a \Rightarrow N = 22 + \frac{30(a+2)-15}{a^2} = 22 + \frac{30a+45}{a^2} = 22 + \frac{30}{a} + \frac{45}{a^2}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{a} = b \Rightarrow N = 22 + 30b + 45b^2$$

Bài 34:

Tìm min hoặc max của $P = \frac{8x^2 + 6xy}{x^2 + y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được $P = \frac{8\frac{x^2}{y^2} + 6\frac{x}{y}}{\frac{x^2}{y^2} + 1}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow P = \frac{8t^2 + 6t}{t^2 + 1} = 8 + \frac{6t - 8}{t^2 + 1}$

Nháp: $a = \frac{6t - 8}{t^2 + 1} \Rightarrow at^2 + a - 6t + 8 = 0$, có $\Delta' = 9 - a(a + 8) = 0 \Rightarrow a = 1; a = -9$

Bài 35:

Tìm min hoặc max của $Q = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x + 1}$

Lời giải

$Q = 1 + \frac{-x + 2}{(x - 1)^2}$, đặt $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$. Khi đó $Q = 1 + \frac{-t + 1}{t^2} = 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}$

Đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow Q = a^2 - a + 1$

Bài 36:

Tìm min hoặc max của $R = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho y^2 ta được $R = \frac{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1}$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow R = \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - t + 1} = 1 + \frac{2t}{t^2 - t + 1}$

Nháp: $a = \frac{2t}{t^2 - t + 1} \Rightarrow at^2 - at + a - 2t = 0$, có $\Delta = (a + 2)^2 - 4a.a = 0 \Rightarrow a = 2; a = -\frac{2}{3}$

Bài 37:

Tìm min hoặc max của $H = \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Lời giải

Đặt $x^2 + 1 = t \Rightarrow x^2 = t - 1 \Rightarrow x^4 = t^2 - 2t + 1$. khi đó $H = \frac{t^2 - 2t + 1 + 1}{t^2} = 1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}$

Đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow H = 2a^2 - 2a + 1$

Bài 38:

Tìm min hoặc max của $I = \frac{2x^2 - 16x + 71}{x^2 - 8x + 22}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được $I = 2 + \frac{27}{x^2 - 8x + 22}$, mà $x^2 - 8x + 22 = (x - 4)^2 + 6 \geq 6$

Bài 39:

Tìm min hoặc max của $G = \frac{x^4 + 1}{(x^2 + 1)^2}$

Lời giải

Đặt $x^2 + 1 = t \Rightarrow x^2 = t - 1 \Rightarrow x^4 = t^2 - 2t + 1$

Khi đó $G = \frac{t^2 - 2t + 2}{t^2} = 1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}$, đặt $\frac{1}{t} = a \Rightarrow G = 2a^2 - 2a + 1$

Bài 40:

Tìm min hoặc max của $K = \frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 2}$

Lời giải

Ta có $K = 1 - \frac{x}{x^2 + x + 2}$

Nháp: $a = \frac{-x}{x^2 + x + 2} \Rightarrow a.x^2 + a.x + x + 2a = 0$

Ta có $\Delta = (a + 1)^2 - 4a.2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$

3. Bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu

Bài 1:

Tìm GTNN của biểu thức sau $A = \frac{x^2 + 15x + 16}{3x} (x \in \mathbb{R}^+)$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{x^2 + 15x + 16}{3x} (x \in \mathbb{R}^+) = \frac{(x-4)^2}{3x} + \frac{23}{3} \geq \frac{23}{3} \Rightarrow \min A = \frac{23}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 2:

Tìm min hoặc max của: $A = \frac{x^6 + 27}{x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 9x + 9}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được $A = x^2 + 3x + 3$

Bài 3:

Tìm min hoặc max của $B = \frac{x^6 + 512}{x^2 + 8}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được $B = x^4 - 8x^2 + 64 = (x^2 - 4)^2 + 48 \geq 48$

Bài 4:

Tìm min hoặc max của $G = \frac{4x^4 + 16x^3 + 56x^2 + 80x + 356}{x^2 + 2x + 5}$

Lời giải

Hạ phép chia ta được: $G = 4(x^2 + 2x + 5) + \frac{256}{x^2 + 2x + 5}$, đặt $x^2 + 2x + 5 = t \Rightarrow G = 4t + \frac{256}{t}$

Sau đó sử dụng bất đẳng thức côsi là ra.