

Phần HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương IX. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

Bài 1. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

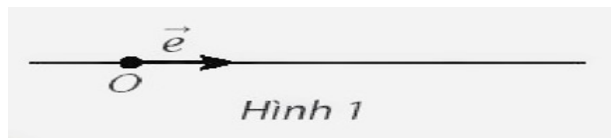
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tọa độ của vectơ đối với một hệ trục tọa độ

Trục tọa độ

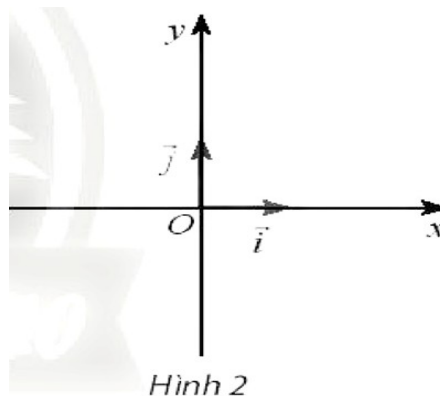
Trục tọa độ (gọi tắt là **trục**) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O (gọi là điểm gốc) và một vectơ e có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị của trục.

Ta kí hiệu trục đó là $(O; e)$.



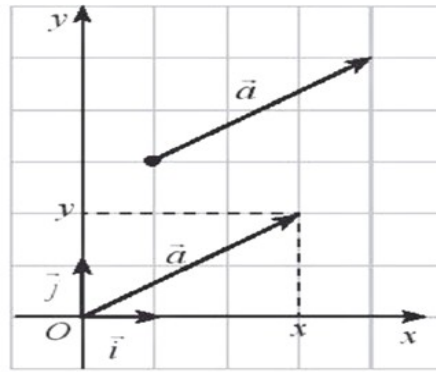
Hệ trục tọa độ

Hệ trục tọa độ $(O; i, j)$ gồm hai trục $(O; i)$ và $(O; j)$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là **gốc tọa độ**. Trục $(O; i)$ được gọi là **trục hoành** và kí hiệu là Ox , trục $(O; j)$ được gọi là **trục tung** và kí hiệu là Oy . Các vectơ i và j là các vectơ đơn vị trên Ox và Oy . Hệ trục tọa độ $(O; i, j)$ còn được kí hiệu là Oxy .



Tọa độ của một vectơ

Trong mặt phẳng Oxy , cặp số $(x; y)$ trong biểu diễn $a = xi + yj$ được gọi là tọa độ của vectơ a , kí hiệu $a = (x; y)$, x gọi là **hoành độ**, y gọi là **tung độ** của vectơ a .



Hình 3

Chú ý: $a = (x; y) \Leftrightarrow a = xi + yj$.

Nếu cho $a = (x; y)$ và $b = (x'; y')$ thì $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

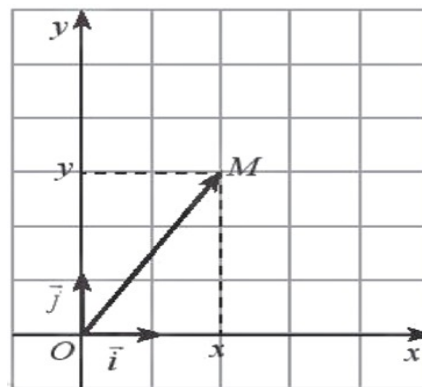
Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ, cho một điểm M tùy ý. Tọa độ của vectơ $\vec{OM}$ được gọi là **tọa độ của điểm** M .

Nhận xét:

Nếu $\vec{OM} = (x; y)$ thì cặp số $(x; y)$ là tọa độ của điểm M , kí hiệu $M(x; y)$, x gọi là **hoành độ**, y gọi là **tung độ** của điểm M .

$M(x; y) \Leftrightarrow \vec{OM} = xi + yj$.



Hình 4

Hình 4

Chú ý: Hoành độ của điểm M còn được kí hiệu là x_M tung độ của điểm M còn được kí hiệu là y_M .

Khi đó ta viết $M(x_M; y_M)$.

2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $a = (a_1; a_2), b = (b_1; b_2)$ và số thực k . Ta có các công thức sau:

$$a + b = (a_1 + b_1; a_2 + b_2); \quad a - b = (a_1 - b_1; a_2 - b_2);$$

$$ka = (ka_1; ka_2); \quad a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

3. Áp dụng của tọa độ vectơ

Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Tọa độ trung điểm $M(x_M; y_M)$ của đoạn thẳng AB là:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$. Tọa độ trọng tâm $G(x_G; y_G)$ của tam giác ABC là:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $a = (a_1; a_2), b = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Ta có:

$$a \perp b \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

- a và b cùng phương $\Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$;
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$;
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} (a, b \text{ khác } 0)$.

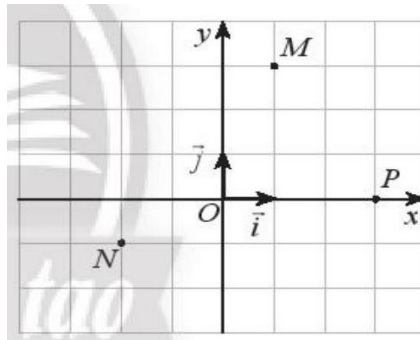
B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm M, N, P được biểu diễn như Hình 5.

a) Tìm tọa độ của các điểm M, N, P .

b) Hãy biểu thị các vectơ $\vec{OM}, \vec{ON}, \vec{OP}$ qua hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$.

c) Tìm tọa độ các vectơ $\vec{PM}, \vec{PN}, \vec{PO}, \vec{NM}$.



Hình 5

Giải

a) Theo Hình 5 ta có tọa độ các điểm M, N, P lần lượt là: $M(1; 3), P(3; 0), N(-2; -1)$.

b) Ta có: $\vec{OM} = \vec{i} + 3\vec{j}; \vec{ON} = -2\vec{i} - \vec{j}; \vec{OP} = 3\vec{i} + 0\vec{j}$.

c) Ta có: $\vec{PM} = (x_M - x_P; y_M - y_P) = (1 - 3; 3 - 0) = (-2; 3);$

$$\vec{PN} = (x_N - x_P; y_N - y_P) = (-2 - 3; -1 - 0) = (-5; -1);$$

$$\vec{PO} = (x_O - x_P; y_O - y_P) = (0 - 3; 0 - 0) = (-3; 0)$$

$$\vec{NM} = (x_M - x_N; y_M - y_N) = (1 - (-2); 3 - (-1)) = (3; 4).$$

Bài 2. Cho hai vectơ $a = (3; 4), b = (-1; 5)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ: $a + b, a - b, 10a, -2b$.

b) Tính tích vô hướng: $a.b, (-2a).(5b)$.

Giải

a) Ta có:

$$a + b = (3 + (-1); 4 + 5) = (2; 9)$$

$$a - b = (3 - (-1); 4 - 5) = (4; -1)$$

$$10a = (10 \cdot 3; 10 \cdot 4) = (30; 40)$$

$$-2b = (-2 \cdot (-1); -2 \cdot 5) = (2; -10)$$

b) Ta có:

$$a \cdot b = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 = -3 + 20 = 17$$

$$-2a = (-6; -8) \text{ và } 5b = (-5; 25) \text{ nên } (-2a) \cdot (5b) = (-6) \cdot (-5) + (-8) \cdot 25 = 30 - 200 = -170$$

Bài 3. Cho ba vectơ $m = (-6; 1), n = (0; 2), p = (1; 1)$. Tìm tọa độ của các vectơ:

a) $m + n - p$.

b) $(m \cdot n)p$.

Giải

a) Ta có: $m + n - p = (-6 + 0 - 1; 1 + 2 - 1) = (-7; 2)$.

b) Ta có: $(m \cdot n)p = (-6 \cdot 0 + 1 \cdot 2)p = 2p = (2; 2)$.

Bài 4. Cho tam giác DEF có tọa độ $D(2; 2), E(6; 2)$ và $F(2; 6)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm M của cạnh EF .

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác DEF .

Giải

a) Ta có: $x_M = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{6 + 2}{2} = 4, y_M = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4$.

Vậy tọa độ trung điểm M của cạnh EF là $M(4; 4)$.

b) Ta có: $x_G = \frac{x_D + x_E + x_F}{3} = \frac{2 + 6 + 2}{3} = \frac{10}{3}, y_G = \frac{y_D + y_E + y_F}{3} = \frac{2 + 2 + 6}{3} = \frac{10}{3}$.

Vậy tọa độ trọng tâm G của tam giác DEF là $G\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(2; 2), B(6; 3)$ và $C(5; 5)$.

a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A .

b) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC và số đo của góc C .

Giải

a) Xét điểm $H(x; y)$, ta có $AH = (x - 2; y - 2), BH = (x - 6; y - 3), BC = (-1; 2)$

H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A nên ta có:

$$AH \perp BC \Leftrightarrow (x-2).(-1) + (y-2).2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Hai vectơ } \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow (x-6) \cdot 2 - (y-3) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình

$$\text{Vậy } H\left(\frac{28}{5}; \frac{19}{5}\right).$$

$$\text{b) Ta có: } \overrightarrow{AB} = (4; 1), \overrightarrow{CB} = (1; -2), \overrightarrow{CA} = (-3; -3)$$

$$\text{Suy ra: } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}, CB = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}, AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \hat{C} = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB} = \frac{(-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (-2)}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad \text{Vậy } \hat{C} = 71^\circ 34'.$$

C. BÀI TẬP:

Các bài toán sau đây xét trong mặt phẳng Oxy .

$$1. \text{ Cho hai vectơ } \vec{a} = (1; 2), \vec{b} = (3; 0).$$

$$\text{a) Tìm tọa độ của vectơ: } 2\vec{a} + 3\vec{b}.$$

$$\text{b) Tính các tích vô hướng: } \vec{a} \cdot \vec{b}, (3\vec{a}) \cdot (2\vec{b}).$$

$$2. \text{ Cho ba vectơ } \vec{m} = (1; 1), \vec{n} = (2; 2), \vec{p} = (-1; -1). \text{ Tìm tọa độ của các vectơ:}$$

$$\text{a) } \vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p} \quad \text{b) } (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{m}.$$

$$\text{Câu 3. Cho tam giác } MNP \text{ có tọa độ các đỉnh là } M(3; 3), N(7; 3) \text{ và } P(3; 7).$$

$$\text{a) Tìm tọa độ trung điểm } E \text{ của cạnh } MN.$$

$$\text{b) Tìm tọa độ trọng tâm } G \text{ của tam giác } MNP.$$

$$\text{Câu 4. Cho tam giác } ABC \text{ có tọa độ các đỉnh là } A(1; 3), B(3; 1) \text{ và } C(6; 4).$$

$$\text{a) Tính độ dài ba cạnh của tam giác } ABC \text{ và số đo của góc } B.$$

b) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 5. Cho năm điểm $A(2; 0)$, $B(0; -2)$, $C(3; 3)$, $D(-2; 2)$, $E(1; -1)$. Trong các điểm đã cho, hãy tìm điểm:

- a) Thuộc trục hoành;
- b) Thuộc trục tung;
- c) Thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Câu 6. Cho điểm $M(4; 5)$. Tìm tọa độ:

- a) Điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox ;
- b) Điểm M' đối xứng với M qua trục Ox ;
- c) Điểm K là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy ;
- d) Điểm M'' đối xứng với M qua trục Oy ;
- e) Điểm C đối xứng với M qua gốc O .

Câu 7. Cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(2; 4)$, $C(4; 4)$.

- a) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là một hình bình hành.
- b) Tìm tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

Câu 8. Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(1; 1)$, $B(7; 3)$, $C(4; 7)$ và cho các điểm $M(2; 3)$, $N(3; 5)$.

- a) Chứng minh rằng bốn điểm A , M , N , C thẳng hàng.
- b) Chứng minh trọng tâm của tam giác ABC và MNB trùng nhau.

Câu 9. Cho bốn điểm $M(6; -4)$, $N(7; 3)$, $P(0; 4)$, $Q(-1; -3)$. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Câu 10. Tính góc giữa hai vectơ a và b trong các trường hợp sau:

- a) $a = (1; -4)$, $b = (5; 3)$;
- b) $a = (4; 3)$, $b = (6; 0)$;
- c) $a = (2; 2\sqrt{3})$, $b = (-3; \sqrt{3})$.

Câu 11. Cho điểm $A(1;4)$. Gọi B là điểm đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O . Tìm tọa độ của điểm C có tung độ bằng 3, sao cho tam giác ABC vuông tại C .

Câu 12. Cho vector $a = (2;2)$. Hãy tìm tọa độ một vector đơn vị e cùng hướng với vector a .