**CHỦ ĐỀ 3 : GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ**

**LÍ THUYẾT**

### **Định nghĩa.**

Cho hàm số  xác định trên tập 

* Số M gọi là **giá trị lớn nhất** của hàm số  trên  nếu: .
* Kí hiệu: .
* Số  gọi là **giá trị nhỏ nhất** của hàm số  trên  nếu: .
* Kí hiệu: .
* **Phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất**
  + **Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp**
* **Bước 1:** Tính  và tìm các điểm  mà tại đó  hoặc hàm số không có đạo hàm.
* **Bước 2:** Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.
  + **Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn**
* **Bước 1:**

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn 

Tìm các điểm  trên khoảng , tại đó  hoặc  không xác định.

* **Bước 2:** Tính 
* **Bước 3:** Khi đó: 



* + **Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng**
* **Bước 1:** Tính đạo hàm .
* **Bước 2:** Tìm tất cả các nghiệm  của phương trình  và tất cả các điểm  làm cho  không xác định.
* **Bước 3.** Tính , , , .
* **Bước 4.** So sánh các giá trị tính được và kết luận , .
* Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là  hoặc  thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).
* Nếu  đồng biến trên  thì .
* Nếu  nghịch biến trên  thì 
* Hàm số liên tục trên một khoảng **có thể** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.
* Bất đẳng thức trị tuyệt đối:
* Cho hai số thực  khi đó ta có: .
* Dấu “ = ” vế trái xảy ra khi  cùng dấu. Dấu “ = ” vế phải xảy ra khi  trái dấu.
* Tính chất của hàm trị tuyệt đối: .
* Phương pháp chung để giải các bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.
* **Bước 1:** Xét hàm số  trên .

Tính đạo hàm 

Giải phương trình  và tìm các nghiệm  thuộc .

* **Bước 2:** Giải phương trình  và tìm các nghiệm  thuộc .
* **Bước 3:** Tính các giá trị . So sánh và kết luận.

**VÍ DỤ MINH HỌA**

**VÍ DỤ 1:** Cho hàm số  (*m* là tham số thực khác 0). Gọi  là hai giá trị của *m* thỏa mãn **.** Giá trị bằng

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với mọi có . Ta thấy dấu của phụ thuộc vào dấu của *m*

thì đơn điệu trên 

**VÍ DỤ 2:** Cho hàm số . Tổng tất cả các giá trị của tham số  sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn  bằng  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

Từ giả thiết ta được  Vậy .

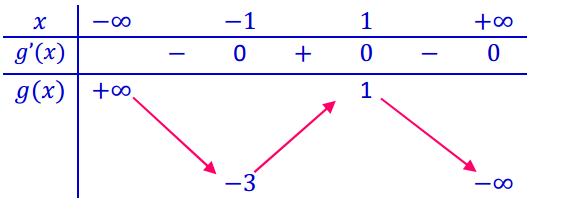
**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt  là hàm số xác định và liên tục trên đoạn .

Ta có ; .

Ta khảo sát hàm số  trên đoạn . Bảng biến thiên của 



Nếu  thì luôn tồn tại  sao cho  hay . Suy ra , tức là không tồn tại  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu  thì .

Ta có: 

**Trường hợp 1**:  tức là  

**Trường hợp 2:**  tức là 

Vậy có hai giá trị của  thỏa mãn yêu cầu bài toán: , từ đó tổng tất cả các giá trị của  là .

**VÍ DỤ 3:** Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên đoạn  bằng  (với  là tham số). Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1:**

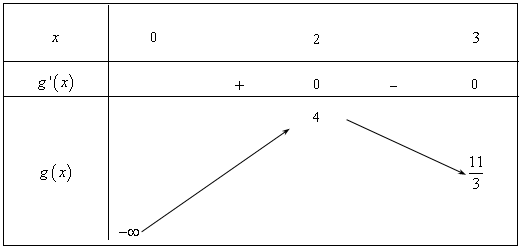
Ta có:  (\*)

(vì ).

Xét hàm số  trên .

Ta có: ; .

Bảng biến thiên:

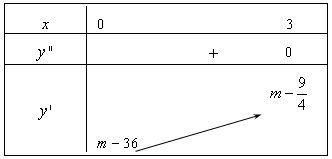


Do đó, từ  suy ra . Vậy .

**Cách 2:**

Ta có: , ; . , .

Mà . Bảng biến thiên



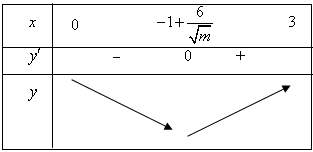
**Trường hợp 1:** . Khi đó . Suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn .

Do đó, ta có  (không thỏa mãn).

**Trường hợp 2:** . Khi đó . Suy ra hàm số đồng biến trên đoạn .

Do đó, ta có  (không thỏa mãn).

**Trường hợp 3:** . Khi đó .



Do đó, ta có .

Do đó  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy .

**VÍ DỤ 4:** Cho hàm số  với  là các số thực. Biết hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại . Giá trị nhỏ nhất có thể của  bằng bao nhiêu?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có . Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại  nên

Do hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại  nên.



 (do )



Mà  nên (\*) xảy ra khi .

.

**VÍ DỤ 5:** Cho  Gọi  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số  lớn hơn . Tính số phần tử của 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**Chọn A**

Vìnên với

Với , ta có 

Đặt  Ta có .

Do đó . Vì  (1)

Tương tự, với . Ta có . (2)

Với . Ta có  (3)

Với . Ta có 



Với  luôn đúng.

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có 

Vậy  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  thỏa mãn.

**VÍ DỤ 6:** Tìm tất cả các giá trị thực của  để giá trị lớn nhất của hàm số  không nhỏ hơn 

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: .

Đặt  với  khi đó 

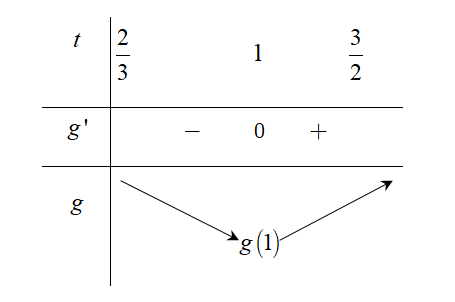
Yêu cầu bài toán tương đương với:

Tồn tại  ( điều này luôn đúng) và  có nghiệm .

Xét .

Đặt , .

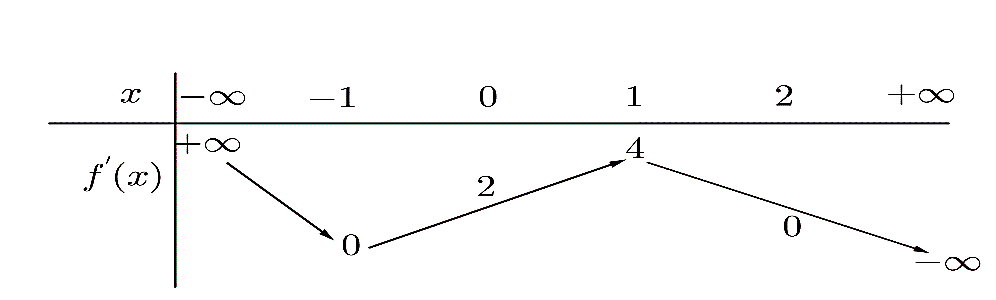
Bảng biến thiên của hàm :



Yêu cầu bài toán tương đương  có nghiệm hay  có nghiệm 



**VÍ DỤ 7:** Cho hàm số  có đạo hàm . Hàm số  liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng , . Giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên đoạn  bằng

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hàm số  trên đoạn 

, .

Từ bảng biến thiên, ta có: 

Và ,  nên  đồng biến trên 

,  nên  vô nghiệm.

Do đó,  chỉ có  nghiệm là  và .

Ta có .

. Vậy .

**Lời giải**

**VÍ DỤ 8:** Cho hàm số  nghịch biến trên . Gọi  và  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  trên đoạn . Biết rằng hàm số  và thỏa mãn . Giá trị của  bằng

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Chọn A**

Ta có: 





Với  nên  đồng biến trên .

Với  nên  nghịch biến trên .

Suy ra:  Vì  nghịch biến trên  nên 

và  Từ đây, ta suy ra: .

**VÍ DỤ 9:** Cho hàm số . Biết hàm số  có đồ thị như hình dưới đây. Trên đoạn , hàm

số  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm?



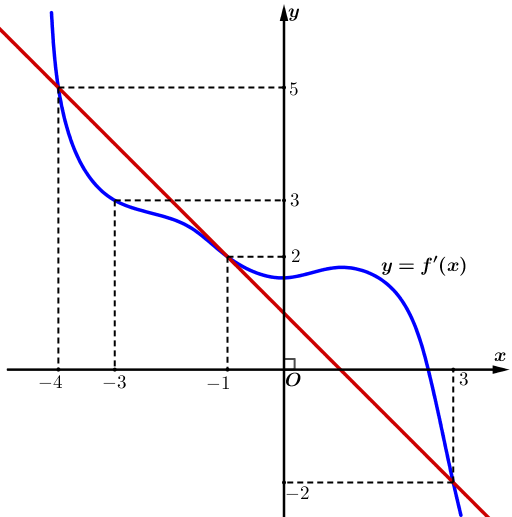
**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

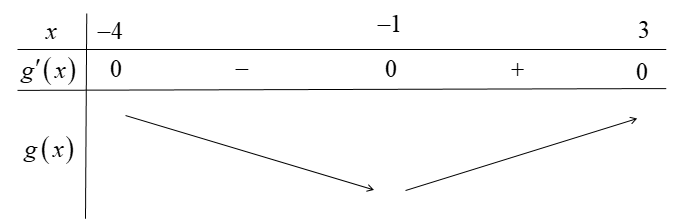
**Chọn D**

Ta có .

Giải phương trình: 



Bảng biến thiên:



Vậy trên đoạn , hàm số  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm .