

CD9_361-389_TỈ LỆ THỨC VÀ TÍNH CHẤT CỦA DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU_NHUNG

Người làm: LÊ THỊ NHUNG

Zalo: Nhung - số đt zalo: 0967686719

Email: lenhunganhung@gmail.com

Dạng 1: Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức, tính chất của dãy tỉ số bằng nhau**A. Trắc nghiệm (nếu có)****B. Tự luận****Câu 1. (HSG 7 huyện BÁT XÁT 2022 - 2023)**

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{y} = \frac{7}{20}$; $\frac{y}{z} = \frac{5}{8}$ và $2x + 5y - 2z = 100$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{x}{y} = \frac{7}{20} &\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{20}; \\ \frac{y}{z} = \frac{5}{8} &\Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{8} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{32}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \frac{x}{7} = \frac{y}{20} = \frac{z}{32}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{7} = \frac{y}{20} = \frac{z}{32} = \frac{2x + 5y - 2z}{2 \cdot 7 + 5 \cdot 20 - 2 \cdot 32} = \frac{100}{50} = 2$
 Suy ra: $x = 14$, $y = 40$, $z = 64$.

Câu 2. (HSG 7 TP NINH BÌNH 2022 - 2023)

Tìm x, y biết: $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$ và $5x + 4y = 120$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Do } \frac{x}{y} = \frac{8}{5} &\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{5} \\ \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{5x + 4y}{5 \cdot 8 + 4 \cdot 5} &= \frac{120}{60} = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 8 \cdot 2 = 16; y = 5 \cdot 2 = 10$$

Vậy $x = 16$; $y = 10$

Câu 3. (HSG 7 VĂN BÀN 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{6}$ và $5z - 3x - 4y = 50$.

Lời giải

Ta

có

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{6} &= \frac{5(z-5) - 3(x-1) - 4(y-3)}{2} = \frac{(5z - 3x - 4y) - 34}{8} = \frac{50 - 34}{8} = 2 \\ \Rightarrow \frac{x-1}{2} = 2 &\Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5 \\ \frac{y-3}{4} = 2 &\Rightarrow y-3=8 \Rightarrow y=11 \\ \frac{z-5}{6} = 2 &\Rightarrow z-5=12 \Rightarrow z=17 \end{aligned}$$

$$\frac{z-5}{6}=2 \Rightarrow z-5=12 \Rightarrow z=17$$

Vậy $(x, y, z) = (5; 5; 17)$.

Câu 4. (HSG 7 SÓC SƠN 2022 - 2023)

Tìm x, y, z khác 0 biết rằng
$$\frac{y+z+4}{x} = \frac{x+z+5}{y} = \frac{x+y-9}{z} = \frac{2023}{x+y+z}$$

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\begin{aligned} \frac{y+z+4}{x} &= \frac{x+z+5}{y} = \frac{x+y-9}{z} = \frac{2023}{x+y+z} \\ &= \frac{(y+z+4) + (x+z+5) + (x+y-9)}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{2023}{x+y+z} = 2 \Leftrightarrow x+y+z = 1011,5$$

$$\text{Do đó } \frac{1011,5-x+4}{x} = \frac{1011,5-y+5}{y} = \frac{1011,5-z-9}{z} = 2$$

$$\text{Hay } \frac{1015,5-x}{x} = \frac{1016,5-y}{y} = \frac{1002,5-z}{z} = 2$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{677}{2}; y = \frac{2033}{6}; z = \frac{2005}{6}$$

Câu 5. (HSG 7 NHO QUAN 2022 - 2023)

Tìm các số x, y, z biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x+y+z=92$.

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \quad (1)$$

$$\text{Từ } \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x+y+z}{46} = \frac{92}{46} = 2$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{10} = 2 \Rightarrow x = 20$$

$$\frac{y}{15} = 2 \Rightarrow y = 30$$

$$\frac{z}{21} = 2 \Rightarrow z = 42$$

Vậy $x=20, y=30, z=42$.

Câu 6. (HSG 7 HUYỆN BẢO THẮNG 2022 - 2023)

Tìm các cặp số (x, y) biết: $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} (x \neq 0)$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+3y+1+5y+1+7y}{12+5x+4x} = \frac{3+15y}{12+9x} = \frac{1+5y}{4+3x}$$

$$\Rightarrow 5x = 4 + 3x \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (t/m)}$$

$$\frac{1+5y}{10} = \frac{1+7y}{8} \Rightarrow 8 + 40y = 10 + 70y \Leftrightarrow 30y = -2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{15}$$

$$(x, y) = \left(2; -\frac{1}{15} \right)$$

Vậy

Câu 7. (HSG 7 HUYỆN LÂM THAO 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết $6x = 4y = 3z$ và $xy - yz + xz = 50$

Lời giải

Từ $6x = 4y = 3z$ và $xy - yz + xz = 50$ suy ra

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{xy}{\frac{1}{24}} = \frac{yz}{\frac{1}{12}} = \frac{xz}{\frac{1}{18}} = \frac{xy - yz + xz}{\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{18}} = \frac{xy - yz + xz}{\frac{1}{72}} = \frac{50}{\frac{1}{72}} = 3600$$

$$\Rightarrow xy = 150, yz = 300, xz = 200$$

$$\frac{x}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{3}} = k \Rightarrow x = \frac{1}{6}k, y = \frac{1}{4}k, z = \frac{1}{3}k$$

Đặt

$$\Rightarrow \frac{1}{6}k \cdot \frac{1}{4}k = 150 \Rightarrow k^2 = 3600 \Rightarrow k = \pm 60$$

$$\Rightarrow x = \pm 10, y = \pm 15, z = \pm 20$$

Vì $6x = 4y = 3z$ nên x, y, z cùng dấu.

$$\text{Vậy } (x, y, z) = (10; 15; 20), (-10; -15; -20)$$

Câu 8. (HSG 7 HUYỆN THANH MIỆN 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết: $3x = 4y = 5z - 3x - 4y$ và $2x + y = z - 19$

Lời giải

$$3x = 4y = 5z - 3x - 4y = t \Rightarrow x = \frac{t}{3}; y = \frac{t}{4}; z = \frac{3t}{5}$$

Đặt

$$2x + y = z - 19 \text{ suy ra } 2 \cdot \frac{t}{3} + \frac{t}{4} = \frac{3t}{5} - 19$$

Thay vào

$$2 \cdot \frac{t}{3} + \frac{t}{4} - \frac{3t}{5} = -19$$

$$t \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{5} \right) = -19$$

$$t \cdot \frac{19}{60} = -19$$

$$t = -60$$

$$\Rightarrow x = -20; y = -15; z = -36$$

Vậy $x = -20; y = -15; z = -36$.

Câu 9. (HSG 7 HUYỆN NGUYỆT AN-TP VINH 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $2x = 3y = 5z$ và $x + 3y - 2z = 66$

Lời giải

Ta có: $2x = 3y = 5z \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{3y}{30} = \frac{2z}{12} = \frac{x + 3y - 2z}{15 + 30 - 12} = \frac{66}{33} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = 2 \Rightarrow x = 30$$

$$\Rightarrow \frac{y}{10} = 2 \Rightarrow y = 20$$

$$\Rightarrow \frac{z}{6} = 2 \Rightarrow z = 12$$

Vậy $x = 30; y = 20; z = 6$

Câu 10. (HSG 7 TP THANH HÓA 2022 - 2023)

Tìm x, y biết $\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x} \quad (x \neq 0)$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = \frac{3x-4y-5}{2x} = \frac{3x-3}{6} = \frac{4y+2}{10}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{3x-4y-5}{2x} = \frac{3x-3}{6} = \frac{4y+2}{10} = \frac{3x-4y-5}{-4}$$

TH1: $3x - 4y - 5 = 0$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{5} = 0$$

Khi đó

$$+) \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$+) \frac{2y+1}{5} = 0 \Rightarrow 2y+1=0 \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

TH2: $3x - 4y - 5 \neq 0$

$$\frac{3x-4y-5}{2x} = \frac{3x-4y-5}{-4} \neq 0$$

Khi đó

$$\Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow \frac{2y+1}{5} = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow 2(2y+1) = -15 \Rightarrow 4y+2 = -15 \Rightarrow 4y = -17 \Rightarrow y = -\frac{17}{4}$$

Vậy $x=1; y=-\frac{1}{2}$ và $x=-2; y=-\frac{17}{4}$

Câu 11. (HSG HUYỆN NAM ĐÀN, TỈNH NGHỆ AN 2022 - 2023)

Tìm $x; y$ biết $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$

Lời giải

Ta có: $\frac{1+6y}{3x} = \frac{1+9y}{2x}$

$$\Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3x}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+6y}{1+9y} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (1+6y) = 3 \cdot (1+9y)$$

$$\Rightarrow 2+12y = 3+27y$$

$$\Rightarrow -1 = 15y$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{15}$$

Thay $y = \frac{-1}{15}$ vào $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+6y}{3x}$ ta được

$$\frac{1+3 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{12} = \frac{1+6 \cdot \left(\frac{-1}{15}\right)}{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{5}{3x}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$x = 3, y = \frac{-1}{15}$$

Vậy

Câu 12. (HSG TP LÀO CAI 2022 - 2023)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$ và $4x^3 - 3 = 29$. Tính giá trị biểu thức $A = x - 2y + 3z$.

Lời giải

Ta có: $4x^3 - 3 = 29 \Rightarrow 4x^3 = 32 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

Thay $x = 2$ vào

$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \text{ ta được: } \frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow 2 = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{y-25}{-16} = 2 \Rightarrow y-25 = -32 \Rightarrow y = -7; \frac{z+49}{25} = 2 \Rightarrow z+49 = 50 \Rightarrow z = 1$$

Thay $x = 2; y = -7; z = 1$ vào A ta được: $A = 2 - 2(-7) + 3 \cdot 1 = 19$

Vậy giá trị của biểu thức $A = 19$.

Câu 13. (HSG TP. THỦ ĐỨC 2022 - 2023)

Tìm $x; y; z$ biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$

Lời giải

Ta có $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \Rightarrow \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$
 $\Rightarrow \frac{2x}{18} = 3 \Rightarrow x = 27$;
 $\frac{3y}{36} = 3 \Rightarrow y = 36$;
 $\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$

Câu 14. (HSG HUYỆN VŨ THU'-TỈNH THÁI BÌNH- 2022 - 2023)

Tìm ba số a,b,c biết: $\frac{3a - 2b}{5} = \frac{2c - 5a}{3} = \frac{5b - 3c}{2}$ và $a + b + c = -50$.

Lời giải

$$\frac{3a - 2b}{5} = \frac{2c - 5a}{3} = \frac{5b - 3c}{2} \Rightarrow \frac{15a - 10b}{25} = \frac{6c - 15a}{9} = \frac{10b - 6c}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{15a - 10b}{25} = \frac{6c - 15a}{9} = \frac{10b - 6c}{4} = \frac{15a - 10b + 6c - 15a + 10b - 6c}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15a - 10b = 0 \\ 6c - 15a = 0 \\ 10b - 6c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 2c = 5a \\ 5b = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \\ \frac{a}{2} = \frac{c}{5} \\ \frac{c}{5} = \frac{b}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$$

. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a + b + c}{10} = \frac{-50}{10} = -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = -15 \\ c = -25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -10 \\ b = -15 \\ c = -25 \end{cases}$$

Vậy

Câu 15. (HSG HUYỆN BÌNH LỤC-TỈNH HÀ NAM- 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $4x = 3y; 7y = 5z$ và $2x + 3y - z = -62$

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

$$\left. \begin{aligned} 4x = 3y &\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} \\ 7y = 5z &\Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{28} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{2x+3y-z}{30+60-28} = \frac{-62}{62} = -1$$

Suy ra: $x = -15; y = -20; z = -28$

Vậy $x = -15; y = -20; z = -28$

Câu 16. (HSG HUYỆN BÌNH LONG- 2022 - 2023)

Tìm ba số $a; b; c$ biết: $\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2}$ và $a+b+c = -50$.

Lời giải

$$\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2} \Rightarrow \frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4}$$

Ta có:

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 15a = 10b \\ 6c = 15a \\ 10b = 6c \end{cases} \Rightarrow 15a = 10b = 6c \Rightarrow \frac{15a}{90} = \frac{10b}{90} = \frac{6c}{90} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{15}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{6+9+15} = \frac{-50}{30} = -\frac{5}{3}$

$$\text{Suy ra: } a = 6 \cdot -\frac{5}{3} = -10; \quad b = 9 \cdot -\frac{5}{3} = -15; \quad c = 15 \cdot -\frac{5}{3} = -25$$

Vậy $a = -10; b = -15; c = -25$.

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện BÁT XÁT 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2} = \frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} &= \frac{7a^2}{7c^2} = \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} = \frac{b}{d} \cdot \frac{a}{c} = \frac{ab}{dc} = \frac{3ab}{3cd} = \frac{7a^2+3ab}{7c^2+3cd} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{11a^2}{11c^2} = \frac{8b^2}{8d^2} = \frac{11a^2-8b^2}{11c^2-8d^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow \frac{7a^2+3ab}{7c^2+3cd} = \frac{11a^2-8b^2}{11c^2-8d^2} \Rightarrow \frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2} = \frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 2. (HSG 7 TP NINH BÌNH 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{2a-3b}{2a+3b} = \frac{2c-3d}{2c+3d}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Cho } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} &\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ \Rightarrow \frac{2a}{2c} = \frac{3b}{3d} &= \frac{2a-3b}{2c-3d} = \frac{2a+3b}{2c+3d} \\ \Rightarrow \frac{2a-3b}{2a+3b} &= \frac{2c-3d}{2c+3d} \end{aligned}$$

Vậy $\frac{2a-3b}{2a+3b} = \frac{2c-3d}{2c+3d}$

Câu 3. (HSG 7 SƠN ĐỘNG 2022 - 2023)

Cho $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t}$. Chứng minh: $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$.

Lời giải

Đặt: $\frac{7x+5y}{3x-7y} = \frac{7z+5t}{3z-7t} = k$, ta có:

$$7x+5y = k(3x-7y) \Rightarrow (3k-7)x = (7k+5)y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7k+5}{3k-7} \quad (1)$$

$$7z+5t = k(3z-7t) \Rightarrow (3k-7)z = (7k+5)t \Rightarrow \frac{z}{t} = \frac{7k+5}{3k-7} \quad (2)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$. Đây là điều phải chứng minh.

Câu 4. (HSG 7 HUYỆN BẢO THẮNG 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, chứng minh rằng: $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{b} (b, c \neq 0)$

Lời giải

Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab$

Ta có: $\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+ab}{b^2+ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

Câu 5. (HSG 7 HUYỆN LÂM THAO 2022 - 2023)

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2021} = \frac{b}{2022} = \frac{c}{2023}$. Chứng minh rằng

$$(a-c)^3 = 8(a-b)^2 \cdot (b-c)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{a}{2021} = \frac{b}{2022} = \frac{c}{2023} &\Rightarrow \frac{a-c}{2021-2023} = \frac{a-b}{2021-2022} = \frac{b-c}{2022-2023} \\ \Rightarrow \frac{a-c}{-2} &= \frac{a-b}{-1} = \frac{b-c}{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a-c}{-2} \right)^3 = \left(\frac{a-b}{-1} \right)^2 \cdot \left(\frac{b-c}{-1} \right) \Rightarrow \frac{(a-c)^3}{(-2)^3} = \frac{(a-b)^2}{(-1)^2} \cdot \left(\frac{b-c}{-1} \right)$$

$$\Rightarrow (a-c)^3 = 8(a-b)^2(b-c)$$

Câu 6. (HSG 7 HUYỆN NGUYỆT AN-TP VINH 2022 - 2023)

Cho $b^2 = ac; c^2 = bd$ (a, b, c, d và $12b + 3c - 5d \neq 0$). Chứng minh: $\left(\frac{12a + 3b - 5c}{12b + 3c - 5d} \right)^3 = \frac{a}{d}$

Lời giải

Ta có $b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (1) và $c^2 = bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{12a + 3b - 5c}{12b + 3c - 5d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^3 = \left(\frac{12a + 3b - 5c}{12b + 3c - 5d} \right)^3 \quad (3)$$

Mặt khác: $\Rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra: $\left(\frac{12a + 3b - 5c}{12b + 3c - 5d} \right)^3 = \frac{a}{d}$ (đpcm)

Câu 7. (HSG 7 HUYỆN NAM ĐÀN-NGHỆ AN 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ (với a, b, c khác 0). Chứng minh rằng: $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab$

Suy ra $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{(a+b)(b-a)}{a^2 + ab} = \frac{(a+b) \cdot (b-a)}{a \cdot (a+b)} = \frac{b-a}{a}$

Câu 8. (HSG 7 HUYỆN TAM ĐƯƠNG 2022 - 2023)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$.

Với giả thiết các tỉ số trên đều có nghĩa, chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Lời giải

Ta có $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$

$$= \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2baz}{4b^2} = \frac{3cay - 6cbx}{9c^2}$$

$$= \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2baz + 3cay - 6cbx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2)$$

Tương tự ta có

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$$

Từ (1) và (2) ta có

Câu 9. (HSG TP LÀO CAI 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với $b, d \neq 0; c \neq -d$. Chứng minh $\frac{a^{2022} + b^{2022}}{c^{2022} + d^{2022}} = \frac{(a+b)^{2022}}{(c+d)^{2022}}$

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow \frac{a^{2022}}{c^{2022}} = \frac{b^{2022}}{d^{2022}} = \frac{(a+b)^{2022}}{(c+d)^{2022}} \quad (1)$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^{2022}}{c^{2022}} = \frac{b^{2022}}{d^{2022}} = \frac{a^{2022} + b^{2022}}{c^{2022} + d^{2022}} \quad (2)$

$\frac{a^{2022} + b^{2022}}{c^{2022} + d^{2022}} = \frac{(a+b)^{2022}}{(c+d)^{2022}}$ điều phải chứng minh.

Câu 10. (HSG MŨI NHƠN- 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, chứng minh rằng: $\frac{a.c}{b.d} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$

Lời giải

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{2022a^2}{2022b^2} = \frac{2023c^2}{2023d^2} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$
 $\Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{2022a^2 + 2023c^2}{2022b^2 + 2023d^2}$

Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 SƠN ĐỘNG 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $4\angle A = 6\angle B = 3\angle C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AC > AB > BC$. **B.** $AC > BC > AB$. **C.** $AB > BC > AC$. **D.** $AB > AC > BC$.

Lời giải

Vì $3\angle C = 4\angle A = 6\angle B$ nên $\angle C > \angle A > \angle B$.

Do đó: $AB > BC > AC$ (mối quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong $\triangle ABC$).

Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện THANH SƠN 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{5a + 2b + 8c}{-7a - 4b + 6c}$ với $a:b:c = 1:2:3$ vậy A bằng:

A. 13

B. - 5

C. 11
Lời giải

D. 9

$$a:b:c=1:2:3 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow a=k; b=2k; c=3k$$

$$A = \frac{5a+2b+8c}{-7a-4b+6c} = \frac{5k+4k+24k}{-7k-8k+18k} = \frac{33k}{3k} = 11$$

Câu 2. (HSG 7 huyện THANH SƠN 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a+b+c \neq 0$ giá trị của $A = \frac{a^{19}b^4c^{2023}}{a^{2046}}$ là:

A. 1

B. - 1

C. 0

D. 3

Lời giải

Vì $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a=b=c$$

$$\Rightarrow A = \frac{a^{19}b^4c^{2023}}{a^{2046}} = \frac{a^{19}a^4a^{2023}}{a^{2046}} = \frac{a^{2046}}{a^{2046}} = 1$$

Câu 3. (HSG 7 huyện LÂM THAO 2022 - 2023)

Cho $5x=3y$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{8x^2+3y^2-2xy}{10x^2-3y^2}$ là.

A. $\frac{9}{7}$.B. $\frac{39}{25}$.C. $\frac{197}{223}$.D. $\frac{39}{5}$.

Lời giải

$$5x=3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{5}$$

Ta có

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = k \Rightarrow x=3k; y=5k$$

Đặt

$$A = \frac{8x^2+3y^2-2xy}{10x^2-3y^2} = \frac{8.9k^2+3.25k^2-2.3k.5k}{10.9k^2-3.25k^2} = \frac{117k^2}{15k^2} = \frac{117}{15} = \frac{39}{5}$$

Suy ra

B.

Câu 4. (HSG 7 huyện LÂM THAO 2022 - 2023)

Cho ΔABC có độ dài các cạnh là a, b, c tỉ lệ thuận với ba số $6; 8; 11$ và $c^2 - a^2 = 340$. Chu vi của ΔABC là.

A. 20 cm.

B. 25 cm.

C. 40 cm.

D. 50 cm.

Lời giải

Theo bài ta có :

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{11} \text{ và } c^2 - a^2 = 340$$

$$\text{Từ } \frac{a}{6} = \frac{b}{8} = \frac{c}{11} \Rightarrow \frac{a^2}{36} = \frac{b^2}{64} = \frac{c^2}{121}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a^2}{36} = \frac{b^2}{64} = \frac{c^2}{121} = \frac{c^2 - a^2}{121 - 36} = \frac{340}{85} = 4$$

$$\text{Suy ra } a^2 = 4.36 = 144; b^2 = 4.64 = 256; c^2 = 4.121 = 484 \\ \Rightarrow a = 12; b = 16; c = 22$$

Do đó chu vi ΔABC là : $12 + 16 + 22 = 50$ cm.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện KRÔNG - ANA 2022 - 2023)

Bạn Vuông nhờ bạn Tròn tìm hai số khác 0 . Biết tổng, hiệu, tích của hai số đó tỉ lệ với $3; \frac{1}{3}; \frac{200}{3}$; em hãy giúp bạn Tròn tìm hai số đó.

Lời giải

Gọi hai số cần tìm là a, b ta có:

$$\frac{a+b}{3} = \frac{a-b}{\frac{1}{3}} = \frac{a.b}{\frac{200}{3}}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b}{3} = \frac{a-b}{\frac{1}{3}} = \frac{a.b}{\frac{200}{3}} = \frac{a+b+a-b}{3+\frac{1}{3}} = \frac{3a}{5} = k \quad (k \neq 0)$$

$$\Rightarrow a = \frac{5k}{3}; b = 3k - a = 3k - \frac{5k}{3} = \frac{4k}{3}$$

$$\Rightarrow a.b = \frac{5k}{3} \cdot \frac{4k}{3} = \frac{20k^2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{20k^2}{9} = \frac{200.k}{3}$$

$$\Rightarrow 20k^2 - 600k = 0 \Rightarrow k = 30$$

(vì $k \neq 0$)

$$\text{Do đó: } a = \frac{5.30}{3} = 50; b = \frac{4.30}{3} = 40$$

Vậy $a = 50; b = 40$

Câu 2. (HSG 7 huyện NGỌC LẶC, Trường THCS Nguyệt Ấn 2022 - 2023)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện.

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$$

$$M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức

Lời giải

+ Nếu $a + b + c \neq 0$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, Ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

$$M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$$

Vậy:

+ Nếu $a+b+c=0$

Ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = -2$$

$$\text{mà } \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = -1$$

$$M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = -1$$

Vậy

Câu 3. (HSG 7 huyện NGỌC LẶC, Trường THCS Nguyệt Ấn 2022 - 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với 5:6:7 nhưng sau đó chia theo tỉ lệ 4:5:6 nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói.

a) Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

b) Nếu mỗi gói tăm là 5000 đồng thì số tiền ba lớp đã mua ủng hộ từ thiện là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp 7A, 7B, 7C cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là: a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Nên } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy: 3 lớp đã mua là 360 gói tăm.

b) Số tiền đã mua ủng hộ là $360.5000 = 1800000$ đồng.

Câu 4. (HSG 7 huyện VĂN BÀN 2022 - 2023)

Ba lớp $7A_1, 7A_2, 7A_3$ có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh lớp $7A_1$, $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp $7A_2$ và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp $7A_3$ đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính tổng số học sinh của mỗi lớp.

Lời giải

Gọi tổng số học sinh của lớp $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là $a, b, c (a, b, c \in \mathbb{N}^*)$

Theo bài ra ta có: $a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c$ (*) và $a + b + c = 147$.

Từ (*) $\Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{12a}{18} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{15} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3$$

$$\Rightarrow a = 54, b = 48, c = 45$$

Vậy tổng số học sinh của lớp $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là 54; 48; 45.

Câu 5. (HSG 7 huyện SÓC SƠN 2022 - 2023)

Một bể chứa có dạng hình hộp chữ nhật và không có nước. Biết rằng chiều rộng, chiều dài và chiều cao của bể tỉ lệ với 3; 4; 5 và diện tích xung quanh 4 mặt của bể (không kể đáy) là $280m^2$. Người ta tiến hành bơm nước cho bể. Hỏi sau bao lâu thì đầy? Biết cứ mỗi phút máy bơm được vào bể 400 lít nước.

Lời giải

Gọi chiều rộng, chiều dài và chiều cao của bể nước lần lượt là x, y, z (m; $x, y, z > 0$).

Theo đề bài ta có $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$.

Vì diện tích xung quanh của bể nước là $280m^2$ nên ta có $2(x+y)z = 280 \Leftrightarrow xz + yz = 140$ (*)

Đặt $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k > 0 \Rightarrow x = 3k; y = 4k; z = 5k$, thay vào (*) suy ra

$$3k.5k + 4k.5k = 140 \Leftrightarrow 35k^2 = 140 \Leftrightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow x = 6; y = 8; z = 10 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy thể tích của bể nước là: $6.8.10 = 480m^3 = 480\,000$ lít.

Thời gian bể bơi được bơm đầy nước là: $480\,000 : 400 = 1\,200$ (phút) = 20 (giờ).

Vậy sau 20 giờ thì bể được bơm đầy nước.

Câu 6. (HSG 7 huyện SƠN ĐỘNG 2022 - 2023)

Nhà trường thành lập 3 nhóm học sinh khối 7 tham gia chăm sóc di tích lịch sử. Trong đó, $\frac{2}{3}$ số học sinh của nhóm I bằng $\frac{8}{11}$ số học sinh của nhóm II và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh nhóm III.

Biết rằng số học sinh của nhóm I ít hơn tổng số học sinh của nhóm II và nhóm III là 18 học sinh. Tính số học sinh của mỗi nhóm.

Lời giải

Gọi số học sinh của nhóm I, II, III lần lượt là x, y, z (x, y, z nguyên dương).

Theo bài ra ta có: $\frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z$ và $y + z - x = 18$.

$$\text{Từ } \frac{2}{3}x = \frac{8}{11}y = \frac{4}{5}z \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{3 \cdot 8} = \frac{8 \cdot y}{11 \cdot 8} = \frac{4 \cdot z}{5 \cdot 8} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10}.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta được:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10} = \frac{y + z - x}{11 + 10 - 12} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow x = 12 \cdot 2 = 24; y = 11 \cdot 2 = 22; z = 10 \cdot 2 = 20 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy: nhóm I có 24 học sinh; nhóm II có 22 học sinh, nhóm III có 20 học sinh.

Câu 7. (HSG 7 huyện BẢO THẮNG 2022 - 2023)

Bốn túi đường có tổng cộng 156 kg. Lần thứ nhất người ta lấy đi 1 kg ở túi thứ nhất, 2 kg ở túi thứ hai, 3 kg ở túi thứ ba, 4 kg ở túi thứ tư. Lần thứ hai người ta lấy đi $\frac{1}{5}$ số đường còn lại ở túi thứ nhất, $\frac{1}{4}$ số đường còn lại ở túi thứ hai, $\frac{1}{3}$ số đường còn lại ở túi thứ ba, $\frac{1}{2}$ số đường còn lại ở túi thứ tư thì số kg đường còn lại sau lần lấy thứ hai của bốn túi bằng nhau. Tính số kg đường mỗi túi lúc đầu.

Lời giải

Gọi $x+1; y+2; z+3; t+4$ là số kg đường ở túi thứ nhất, túi thứ hai, túi thứ ba, túi thứ tư.

Sau lần thứ nhất tổng số đường ở 4 túi còn là: $156 - (1+2+3+4) = 146$ kg. Hay $x+y+z+t = 146$.

Sau lần thứ hai số đường ở túi thứ nhất, túi thứ hai, túi thứ ba, túi thứ tư lần lượt là: $\frac{4}{5}x$; $\frac{3}{4}y$; $\frac{2}{3}z$; $\frac{1}{2}t$.

$$\text{Theo bài ra ta có: } \frac{4}{5}x = \frac{3}{4}y = \frac{2}{3}z = \frac{1}{2}t$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{4}{5}x = \frac{3}{4}y = \frac{2}{3}z = \frac{1}{2}t = \frac{12}{15}x = \frac{12}{16}y = \frac{12}{18}z = \frac{12}{24}t = \frac{12(x+y+z+t)}{15+16+18+24} = \frac{12 \cdot 146}{73} = 24$$

$$\frac{4}{5}x = 24 \Rightarrow x = 30$$

$$\frac{3}{4}y = 24 \Rightarrow y = 32$$

$$\frac{2}{3}z = 24 \Rightarrow z = 36$$

Vậy số đường mỗi túi ban đầu là:

$$\text{Túi 1: } 30 + 1 = 31 \text{ kg}$$

$$\text{Túi 2: } 32 + 2 = 34 \text{ kg}$$

Túi 3: $36 + 3 = 39$ kg

Túi 4: $48 + 4 = 52$ kg

Câu 8. (HSG 7 huyện TÂY HỒ 2022 - 2023)

Tính giá trị biểu thức $C = \frac{2x - 3y + 4z}{x + y - 3z}$ biết rằng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$; $4z = 3y$

Lời giải

Ta có

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 4z = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{z}{3} = \frac{y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{8} = \frac{y}{12} \\ \frac{z}{9} = \frac{y}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{9}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{12} = \frac{z}{9} = \frac{2x - 3y + 4z}{16} = \frac{x + y - 3z}{-7}$$

$$\Rightarrow C = \frac{-16}{7}$$

Câu 9. (HSG 7 huyện THANH THỦY 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn $\frac{a+b-2023c}{c} = \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b}$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

TH1: Nếu $a+b+c \neq 0$ thì:

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a+b-2023c}{c} &= \frac{b+c-2023a}{a} = \frac{c+a-2023b}{b} = \frac{a+b-2023c+b+c-2023a+c+a-2023b}{a+b+c} \\ &= \frac{-2021a-2021b-2021c}{a+b+c} = \frac{-2021(a+b+c)}{a+b+c} = -2021. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-2023c = -2021c \\ b+c-2023a = -2021a \\ c+a-2023b = -2021b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ b+c=2a \\ c+a=2b \end{cases}$$

Suy ra $M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = \frac{2c}{a} \cdot \frac{2b}{c} \cdot \frac{2a}{b} = 8$

TH2: Nếu $a+b+c = 0$ thì suy ra: $\begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ c+a=-b \end{cases}$

Suy ra $M = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-a}{b} = -1$

Câu 10. (HSG 7 huyện TRỰC NINH 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ac+bc}{4}$ và $a+b+c=46$.
 Tìm các số a, b, c ?

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ac+bc}{4} = \frac{ab+ac-bc-ba+ac+bc}{2-3+4} = \frac{2ac}{3} \quad (1)$$

$$\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ac+bc}{4} = \frac{ab+ac+bc+ba-ac-bc}{2+3-4} = 2ab \quad (2)$$

$$\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ac+bc}{4} = \frac{-ab-ac+bc+ba+ac+bc}{-2+3+4} = \frac{2bc}{5} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{2ac}{3} = 2ab = \frac{2bc}{5}$

Do $a, b, c \neq 0 \Rightarrow \frac{c}{3} = b; \frac{c}{5} = a$

$$\Rightarrow \frac{c}{3 \cdot 5} = \frac{b}{5}; \frac{c}{5 \cdot 3} = \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{3+5+15} = \frac{46}{23} = 2$$

Suy ra $a=6; b=10; c=30$

Vậy $a=6; b=10; c=30$

Câu 11. (HSG 7 NGUYỄN AN-TP VINH 2022 – 2023)

Một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài, chiều rộng và chiều cao tỉ lệ với $1:2:4$.
 Tổng diện tích sáu mặt của bể nước là $112m^2$. Tính thể tích bể nước.

Lời giải

Gọi chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể nước dạng hình hộp chữ nhật lần lượt là x, y, z (m)

Điều kiện: $x > 0; y > 0; z > 0$

Theo bài ra ta có: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$ và

Tổng diện tích 6 mặt của bể nước hình hộp chữ nhật là:

$$2(xy + yz + zx) = 112$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx = 56 \quad (1)$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} = k \ (k > 0) \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = 4k \end{cases} \quad (2)$$

Đặt:

Thay (2) vào (1) ta được:

$$xy + yz + zx = 56$$

$$\Leftrightarrow k \cdot 2k + 2k \cdot 4k + 4k \cdot k = 56$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 + 8k^2 + 4k^2 = 56$$

$$\Leftrightarrow 14k^2 = 56$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } k > 0 \text{ nên } k = 2. \text{ Khi đó ta có } \begin{cases} x = k = 2 \\ y = 2k = 4 \\ z = 4k = 8 \end{cases} \text{ (thoả mãn điều kiện)}$$

$$\text{Thể tích của bể là: } V = x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64 \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\text{Vậy thể tích của bể là: } V = 64 \text{ m}^3.$$

Câu 12. (HSG 7 TP THANH HÓA 2022 - 2023)

Nhà trường dự định chia vở viết cho 3 lớp $7A; 7B; 7C$ theo tỉ lệ số học sinh là $7:6:5$. Nhưng sau đó vì có học sinh chuyển trường giữa 3 lớp nên phải chia lại theo tỉ lệ $6:5:4$. Như vậy có lớp đã nhận ít hơn theo dự định 12 quyển vở. Tính số vở mỗi lớp nhận được.

Lời giải

Gọi tổng số vở chia cho 3 lớp là $x (x \in \mathbb{N}^*)$.

Gọi số vở dự định chia cho 3 lớp $7A, 7B, 7C$ lúc đầu lần lượt là $a, b, c (a, b, c \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Gọi số vở sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là $a', b', c' (a', b', c' \in \mathbb{N}^*)$, ta có:

$$\frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a'; b = b'; c > c'$ nên lớp 7C nhận ít hơn lúc đầu.

$$\text{Vì lớp 7C nhận ít hơn 12 quyển nên } c - c' = 12 \Rightarrow \frac{5x}{18} - \frac{4x}{15} = 12 \Rightarrow x = 1080$$

$$+ \text{ Số vở lớp } 7A \text{ nhận được là: } a' = \frac{6 \cdot 1080}{15} = 432 \text{ (quyển vở)}$$

$$+ \text{ Số vở lớp } 7B \text{ nhận được là: } b' = \frac{5 \cdot 1080}{15} = 360 \text{ (quyển vở)}$$

$$+ \text{ Số vở lớp } 7C \text{ nhận được là: } c' = \frac{4 \cdot 1080}{15} = 288 \text{ (quyển vở)}$$

Câu 13. (HSG 7 HUYỆN TRIỆU HÓA 2022 - 2023)

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh thứ nhất vật chuyển động với vận tốc 4 m/s , trên cạnh thứ hai với vận tốc 3 m/s và trên hai cạnh còn lại vật chuyển động với vận tốc 5 m/s . Tính cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian chuyển động trên cạnh thứ nhất và thứ hai hơn tổng thời gian chuyển động trên hai cạnh còn lại là 44 s .

Lời giải

Gọi thời gian vật chuyển động lần lượt trên cạnh thứ nhất, thứ hai, thứ ba (thứ tư) là a, b, c (s) (ĐK: $a; b; c > 0$)

Vì độ dài quãng đường bằng nhau nên thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch

Ta có: $4a = 3b = 5c; a + b + 2c = 44$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+2c}{4+3+2 \cdot 5} = \frac{44}{11} = 4$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\text{Do đó } a = 4 \cdot 4 = 16$$

Vậy cạnh hình vuông là $4 \cdot 16 = 64$ m

Câu 14. (HSG 7 HUỖNH TAM DƯƠNG 2022 - 2023)

Tổng số quyển vở học sinh lớp 7A quyên góp được để tặng cho học sinh vùng cao là một số tự nhiên có ba chữ số. Biết rằng số đó là bội của 18 , các chữ số của nó tỉ lệ theo $1:2:3$ và chữ số hàng trăm là số nhỏ nhất. Tìm số quyển vở mà lớp 7A quyên góp được.

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cần tìm, ta có $1 \leq a + b + c \leq 27$

mặt khác số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9 do đó.

$$a + b + c = 9; a + b + c = 18; a + b + c = 27$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{1+2+3} = \frac{a+b+c}{6}$$

Theo đề bài ta có $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$

Như vậy $a + b + c$ chia hết cho 6 nên $a + b + c = 18$ do đó $a = 3; b = 6; c = 9$

Do số cần tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị phải là số chẵn và chữ số hàng trăm là chữ số nhỏ nhất nên số cần tìm là 963

Câu 15. (HSG 7 TP LÀO CAI 2022 - 2023)

Nghỉ hè, Nam được mẹ cho đi du lịch SaPa. Trên đường thăm quan, mua sắm các đặc sản, Nam gặp một bác bán đào. Quan sát bác bán đào có 3 loại, bạn có hỏi giá để mua.

Bác bán đào nói: “ 3 lần giá loại I bằng 2 lần giá loại II; 4 lần giá loại I bằng 2 lần giá loại III; 4 lần giá loại II bằng 3 lần giá loại III. Nếu mua 3 kg đào, mỗi loại một kg thì hết 180000 đồng”.

Em hãy giúp Nam tính xem 1 kg đào mỗi loại giá bao nhiêu tiền?

Lời giải

Gọi số tiền mua đào có 3 loại lần lượt là x, y, z

Do 3 lần giá loại I bằng 2 lần giá loại II; 4 lần giá loại I bằng 2 lần giá loại III; 4 lần giá loại II bằng 3 lần giá loại III nên

$$3x = 2y; 4x = 2z; 4y = 3z \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Do mua 3 kg đào, mỗi loại một kg thì hết 180000 nên $x + y + z = 180000$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{180000}{9} = 20000$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau nên:

$$\text{Suy ra: } x = 40000; y = 60000; z = 80000$$

Câu 16. (HSG 7 TAM DƯƠNG 2022 – 2023)

Tổng số quyển vở học sinh lớp 7A quyên góp được được để tặng cho học sinh vùng cao là một số tự nhiên có ba chữ số. Biết rằng số đó là bội của 18 , các chữ số của nó tỉ lệ theo $1:2:3$ và chữ số hàng trăm là số nhỏ nhất. Tìm số quyển vở mà lớp 7A quyên góp được.

Lời giải

Gọi a, b, c là các chữ số của số có ba chữ số cần tìm, ta có $1 \leq a+b+c \leq 27$

mặt khác số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9 do đó.

$$a+b+c=9; a+b+c=18; a+b+c=27$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{1+2+3} = \frac{a+b+c}{6}$$

Như vậy $a+b+c$ chia hết cho 6 nên $a+b+c=18$ do đó $a=3; b=6; c=9$

Do số cần tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị phải là số chẵn và chữ số hàng trăm là chữ số nhỏ nhất nên số cần tìm là 963

Câu 17. (HSG HUYỆN BÌNH LỘC-TỈNH HÀ NAM- 2022 - 2023)

Ba lớp $7A, 7B, 7C$ cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với $5:6:7$ nhưng sau đó chia theo tỉ lệ $4:5:6$ nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp $7A, 7B, 7C$ lúc đầu lần lượt là: a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{5+6+7} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{4+5+6} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp $7C$ nhận nhiều hơn lúc đầu

$$\text{Vậy: } c' - c = 4 \text{ hay } \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360(TM)$$

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 18. (HSG HUYỆN BÌNH LỘC-TỈNH HÀ NAM- 2022 - 2023)

$$\text{Cho dãy tỉ số bằng nhau: } \frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

$$\text{Tính giá trị biểu thức } Q, \text{ biết } Q = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$$

Lời giải

Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2a+b+c+d}{a} &= \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d} \\ \Rightarrow \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 &= \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1 \\ &= \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d} \end{aligned}$$

+ Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì lúc đó $a=b=c=d$

$$\Rightarrow M = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Nếu $a + b + c + d = 0$ thì $a + b = -(c + d); b + c = -(d + a); c + d = -(a + b); d + a = -(b + c)$

$$\Rightarrow M = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4.$$

Câu 19. (HSG HUYỆN KIM THÀNH-TỈNH HẢI DƯƠNG- 2022 - 2023)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+a}{a+b} = \frac{b+c}{c+a}$. Chứng minh rằng giá trị biểu

thức sau là một số nguyên: $Q = \frac{2021a^3b^2c + 2022b^3c^2a + 2023c^3a^2b}{1010a^5b + 1011b^5c + 1012c^5a}$

Lời giải

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{c+a}{a+b} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{a+b+c+a+b+c}{b+c+a+b+c+a} = \frac{2(a+b+c)}{2(a+b+c)} = 1$$

(do a, b, c là các số thực dương nên $a+b+c \neq 0$)

$$\frac{a+b}{b+c} = 1 \Rightarrow a+b = b+c \Rightarrow a=c$$

$$b=c$$

Tương tự ta có

$$a=b=c$$

Do đó

$$Q = \frac{2021a^3a^2a + 2022a^3a^2a + 2023a^3a^2a}{1010a^5a + 1011a^5a + 1012a^5a}$$

$$Q = \frac{2021a^6 + 2022a^6 + 2023a^6}{1010a^6 + 1011a^6 + 1012a^6}$$

$$Q = \frac{(2021+2022+2023)a^6}{(1010+1011+1012)a^6}$$

$$Q = \frac{6066}{3033}$$

$$Q = 2$$

là một số nguyên (đpcm)

Câu 20. (HSG MŨI NHƠN- 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

Hãy tính giá trị của biểu thức sau: $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$.

Lời giải

Nếu $a+b+c=0$ hay $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$ thì:

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = \frac{(-c) \cdot (-a) \cdot (-b)}{abc} = -1$$

Nếu $a+b+c \neq 0$ thì

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-c}{c} = 1$$

$$\Rightarrow a+b=2c$$

Tương tự: $b+c=2a$; $c+a=2b$. Khi đó:

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{c+a}{c} \cdot \frac{b+c}{b} = \frac{2c \cdot 2b \cdot 2a}{abc} = 8$$

Câu 21. (HSG HUYỆN BÌNH LONG- 2022 - 2023)

Trong đợt thi đua chào mừng ngày Quốc khánh 2-9, ba đội xe được giao vận chuyển ít nhất là 3030 tấn hàng. Cuối đợt đội I vượt mức 26%, đội II vượt mức 5% và đội III vượt mức 8% định mức của mỗi đội nên khối lượng mà ba đội đã vận chuyển được bằng nhau. Tính định mức vận chuyển của mỗi đội xe.

Lời giải

Gọi định mức vận chuyển của các đội I, II, III lần lượt là a, b, c (tấn, $a, b, c > 0$).

Ta có: $a+b+c=3030$.

Cuối đợt đội I vượt mức 26%, đội II vượt mức 5% và đội III vượt mức 8% định mức của mỗi đội nên khối lượng mà ba đội đã vận chuyển được bằng nhau nên ta có:

$$\Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$$

$$126\%a = 105\%b = 108\%c \Rightarrow 126a = 105b = 108c$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{126} + \frac{1}{105} + \frac{1}{108}} = \frac{3030}{\frac{101}{3780}} = 113400$$

$$\text{Suy ra: } a = \frac{1}{126} \cdot 113400 = 900; b = \frac{1}{105} \cdot 113400 = 1080; c = \frac{1}{108} \cdot 113400 = 1050$$

Vậy định mức vận chuyển của các đội I, II, II lần lượt là 900; 1080; 1050 (tấn hàng).

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>