

## MỤC LỤC

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| A. PHẦN MỞ ĐẦU.....                                                   | 1  |
| 1. Lí do chọn đề tài.....                                             | 1  |
| 2. Mục đích nghiên cứu.....                                           | 2  |
| 3. Nhiệm vụ nghiên cứu.....                                           | 2  |
| 4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.....                               | 2  |
| 5. Phương pháp nghiên cứu.....                                        | 2  |
| 6. Dự kiến những đóng góp của đề tài.....                             | 3  |
| 7. Điểm mới trong kết quả nghiên cứu.....                             | 3  |
| B. NỘI DUNG.....                                                      | 3  |
| 1. CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN.....                                    | 3  |
| 1.1 Cơ sở lý luận.....                                                | 3  |
| 1.1.1 Hàm hợp.....                                                    | 3  |
| 1.1.2. Tính đơn điệu của hàm số.....                                  | 3  |
| 1.1.3. Tương giao giữa hai đồ thị hàm số.....                         | 4  |
| 1.2. Cơ sở thực tiễn.....                                             | 4  |
| 1.2.1. Thực trạng.....                                                | 4  |
| 1.2.2. Nguyên nhân.....                                               | 4  |
| 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA HÀM HỢP..... | 5  |
| 2.1. Số nghiệm của phương trình với $a$ là hằng số.....               | 5  |
| 2.2. Tìm điều kiện của tham số để PT có nghiệm, có $k$ nghiệm.....    | 9  |
| 2.3. Số nghiệm của phương trình.....                                  | 16 |
| 2.4. Bài toán số nghiệm của PT có chứa hàm hợp khi cho hàm số.....    | 19 |
| C. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ.....                                       | 20 |
| TÀI LIỆU THAM KHẢO.....                                               | i  |
| PHỤ LỤC.....                                                          | i  |



## **A. PHẦN MỞ ĐẦU**

### **1. Lí do chọn đề tài**

Năm học 2019- 2020 là năm học đặc biệt, dịch Covid 19 đã ảnh hưởng lớn đến việc dạy và học của giáo viên và học sinh. Ngày 1/4/2020, ở nước ta bắt đầu thực hiện giãn cách xã hội trên quy mô toàn quốc để ngăn chặn sự lây lan của virus corona; người dân được khuyến cáo ở yên trong nhà. Tuy nhiên, ngành giáo dục không thể và không dễ bị ngăn chặn. Cùng với nhiều quốc gia khác trên thế giới, thật không dễ dàng để Việt Nam xây dựng một kịch bản chắc chắn cho ngành giáo dục, bởi tình hình đại dịch Covid 19 vẫn còn diễn biến phức tạp. Virus corona đặt ra nhiều thách thức khác nhau cho hệ thống giáo dục và đào tạo của Việt Nam. Trước tình hình các trường học đóng cửa do đại dịch virus corona, các cơ sở giáo dục và giáo viên phải đối mặt với thách thức to lớn, đó là làm thế nào để kết nối với học sinh và đảm bảo tính liên tục của hoạt động giảng dạy thông qua hình thức đào tạo trực tuyến. Đối với học sinh, sinh viên ở các thành phố lớn, đào tạo trực tuyến là cách tốt nhất để giảng dạy học sinh, sinh viên trong bối cảnh cách ly tại nhà. Tuy nhiên, nhiều học sinh vùng sâu vùng xa không có đường truyền kết nối internet ổn định, nên để đảm bảo tính liên tục của giáo dục thông qua phương thức học từ xa đã trở thành một thách thức. Để vượt qua những khó khăn này, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã hai lần thông báo điều chỉnh lịch học và thi cử. Lần gần đây nhất là vào ngày 13/03/2020. Theo đó, năm học 2019-2020 kết thúc trước ngày 15/07/2020. Kỳ thi tốt nghiệp THPT diễn ra từ ngày 8-10/08/2020, chậm hơn 1,5 tháng so với những năm trước và một tháng so với lần điều chỉnh đầu tiên. Thời lượng học kỳ II chủ yếu dạy học bằng hình thức trực tuyến nên phần lớn nội dung ở mức độ vận dụng, vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT tập trung ở học kỳ I. Vì thế mà phần hàm số lại được khai thác nhiều và được chọn là nội dung khai thác ở câu phân loại học sinh trong các đề thi thử của các Sở, các trường trong cả nước và đề chính thức của Bộ.

Trong quá trình ôn thi tốt nghiệp THPT tác giả nhận thấy phần lớn học sinh còn lúng túng và gặp không ít khó khăn trong khi giải các bài toán vận dụng và vận dụng cao về hàm hợp, đặc biệt là bài toán về tương giao của hàm hợp. Với mong muốn giúp các em học sinh hệ thống được kiến thức, hiểu được bản chất của các bài toán dạng

này, chúng tôi nghiên cứu về hàm hợp và bài toán số nghiệm của phương trình có chứa hàm hợp.

Với những lý do trên chúng tôi chọn đề tài “***Một số bài toán về số nghiệm của phương trình có chứa hàm hợp***”.

## **2. Mục đích nghiên cứu**

- Làm sáng tỏ các bài toán về tương giao hàm hợp.
- Tự bồi dưỡng nâng cao trình độ chuyên môn của bản thân.
- Đề tài nhằm nâng cao hiệu quả học tập môn Toán của học sinh đồng thời mang lại hiệu quả trong giảng dạy đặc biệt là ôn thi tốt nghiệp THPT.

## **3. Nhiệm vụ nghiên cứu**

Để đạt được mục đích nghiên cứu trên, đề tài có nhiệm vụ:

- Trình bày một số bài toán liên quan đến tương giao hàm hợp.
- Đề xuất một số hướng tiếp cận giải quyết các bài toán tương giao hàm hợp.
- Phát biểu các bài toán tương tự.
- Tổ chức thực nghiệm sư phạm để đánh giá tính khả thi và hiệu quả của đề tài.

## **4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu**

### **✓ *Đối tượng nghiên cứu***

Đề tài tập trung nghiên cứu bài toán về tương giao hàm hợp.

### **✓ *Phạm vi nghiên cứu***

Nghiên cứu các bài toán về số nghiệm của phương trình có chứa hàm hợp chuẩn bị cho kỳ thi tốt nghiệp THPT.

## **5. Phương pháp nghiên cứu**

- ✓ ***Phương pháp nghiên cứu lý luận:*** Nghiên cứu sách giáo khoa, sách tham khảo, đề thi THPT Quốc Gia 2019, đề thi tốt nghiệp THPT năm 2020, đề minh họa, đề thi thử năm 2020 về các vấn đề có liên quan đến đề tài.
- ✓ ***Phương pháp điều tra, quan sát:*** Dự giờ, quan sát, lập phiếu điều tra thực trạng việc giải bài toán vận dụng và vận dụng cao về hàm hợp.
- ✓ ***Phương pháp thực nghiệm sư phạm:*** Tổ chức thực nghiệm sư phạm để đánh giá tính khả thi và hiệu quả của đề tài.



## 6. Dự kiến những đóng góp của đề tài

- Góp phần củng cố hệ thống kiến thức về khảo sát hàm số.
- Có thể sử dụng đề tài làm tài liệu tham khảo cho giáo viên trong giảng dạy và ôn luyện cho kỳ thi tốt nghiệp THPT.
- Có thể sử dụng đề tài làm tài liệu tham khảo, tự học cho học sinh.

## 7. Điểm mới trong kết quả nghiên cứu

### ✓ Về mặt lý luận

Đã đưa ra được hệ thống các kiến thức cơ sở và cách tiếp cận các bài toán tương giao hàm hợp.

### ✓ Về mặt thực tiễn

- Giúp học sinh chủ động, hứng thú khi tiếp cận với những bài toán vận dụng và vận dụng cao về tương giao hàm hợp.
- Trình bày một số cách giải quyết các bài toán về số nghiệm của phương trình có chứa hàm hợp.

## B. NỘI DUNG

### 1. CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN

#### 1.1 Cơ sở lý luận

##### 1.1.1 Hàm hợp

1.1.1.1 Định nghĩa: Giả sử  $u = g(x)$  là hàm số của  $x$ , xác định trên khoảng  $(a; b)$  và lấy giá trị trên khoảng  $(c; d)$ ;  $y = f(u)$  là hàm số của  $u$ , xác định trên khoảng  $(c; d)$  và lấy giá trị trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó, ta lập một hàm số xác định trên khoảng  $(a; b)$  và lấy giá trị trên  $\mathbb{R}$  theo quy tắc sau:  $x \mapsto f(g(x))$ .

Ta gọi hàm số  $y = f(g(x))$  là hàm hợp của hàm số  $y = f(u)$  với  $u = g(x)$ .

##### 1.1.1.2. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số  $u = g(x)$  có đạo hàm tại  $x$  là  $u'_x$  và hàm số  $y = f(u)$  có đạo hàm tại  $u$  là  $y'_u$  thì hàm hợp  $y = f(g(x))$  có đạo hàm tại  $x$  là  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ .

##### 1.1.2. Tính đơn điệu của hàm số

1.1.2.1. Định nghĩa: Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $K$

\* Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$  thì  $f(x_1) < f(x_2)$

\* Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên  $K$  nếu  $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$  thì  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Chú ý:  $K$  là một khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng.

**1.1.2.2. Định lý:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $K$

a) Nếu  $f'(x) > 0, \forall x \in K$  thì hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $K$ .

b) Nếu  $f'(x) < 0, \forall x \in K$  thì hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $K$ .

**1.1.2.3. Định lý mở rộng:** Giả sử hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $K$

a) Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên  $K$ .

b) Nếu  $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên  $K$ .

c) Nếu  $f'(x) = 0, \forall x \in K$  thì  $f(x)$  không đổi trên  $K$ .

### **1.1.3. Tương giao giữa hai đồ thị hàm số**

Cho hai hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  có đồ thị lần lượt là  $(C_1), (C_2)$ .

Xét phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = g(x)$  (\*). Khi đó, số nghiệm của phương trình (\*) đúng bằng số giao điểm của hai đồ thị  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .

## **1.2. Cơ sở thực tiễn**

### **1.2.1. Thực trạng**

Các bài toán về tương giao hàm hợp xuất hiện trong đề tham khảo năm 2020 (cụ thể câu 46), được khai thác ở câu 49 mã đề 106 trong đề thi tốt nghiệp THPT năm 2020 và ở một số đề thi thử của các trường, các sở trong cả nước. Trong quá trình giảng dạy, tôi thấy học sinh còn lúng túng, không có hướng giải quyết khi đứng trước bài toán dạng này. Điều đó được thể hiện rõ hơn qua việc trước khi áp dụng đề tài vào giảng dạy tôi đã khảo sát chất lượng học sinh ở một số lớp về nội dung đề tài.

### **1.2.2. Nguyên nhân**

- Học sinh chưa hiểu bản chất vấn đề.

- Học sinh chưa được hướng dẫn các cách tiếp cận.

## 2. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA HÀM HỢP

### 2.1. Số nghiệm của phương trình $f(u(x)) = a$ với $a$ là hằng số

**Cách tiếp cận 1.** Sử dụng tính chất: Giả sử  $g(x)$  là hàm số của  $x$ , xác định trên khoảng  $(a; b)$  và lấy giá trị trên khoảng  $(c; d)$ ;  $y = f(u(x))$  là hàm số của  $u(x)$ , xác định trên khoảng  $(c; d)$  và lấy giá trị trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó :

$$\text{Nếu } f(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \\ \dots \\ x = x_k \end{cases} \text{ thì phương trình } f(u(x)) = a \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = x_1 \\ u(x) = x_2 \\ \dots \\ u(x) = x_k \end{cases}.$$

**Cách tiếp cận 2.** Lập bảng biến thiên cho hàm số  $y = f(u(x))$

**Ví dụ 1.** (Trích đề thi thử THPT Chuyên Hà Tĩnh năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|         |           |      |      |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $2$  | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $2$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Biết  $f(0) = 0$ , số nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}\right]$  của phương trình

$$f\left(f\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right)\right) = 1 \text{ là}$$

**A.** 4.

**B.** 3.

**C.** 2.

**D.** 5.

**Hướng dẫn giải.** Đặt  $t = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

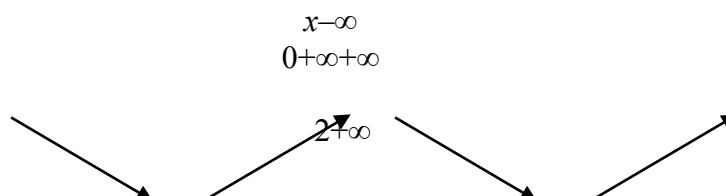
Với  $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}\right]$  thì  $x + \frac{\pi}{6} \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ . Suy ra  $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-2; 2]$

Từ đường tròn lượng giác cho ta thấy: Với mỗi  $t \in [0; 2)$  có 3 nghiệm  $x$ , mỗi  $t \in (-2; 0) \cup \{2\}$  có 2 nghiệm  $x$ ,  $t = -2$  có 1 nghiệm  $x$ . Ta có

$$f(f(\sqrt{3} \sin x + \cos x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = a > 2 \\ f(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = b \in (-2; 0) \\ f(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = c < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \sin x + \cos x = x_1 > 2 \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x = x_2 > 2 \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x = x_3 \in (0; 2) \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x = x_4 < -2 \\ \sqrt{3} \sin x + \cos x = x_5 < -2 \end{cases} \text{ Chọn B.}$$

**Ví dụ 2.** (Trích đề thi thử Chuyên Quang Trung Bình Phước lần 3 năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ



Hỏi phương trình  $2f(x^2 - |x|) = 5$  có bao nhiêu nghiệm.

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 5.

**Hướng dẫn giải.** Ta có  $2f(x^2 - |x|) = 5 \Leftrightarrow f(x^2 - |x|) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - |x| = a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \\ x^2 - |x| = b \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \\ x^2 - |x| = c \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \\ x^2 - |x| = d \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right) \end{cases}$$

Xét hàm số  $u(x) = x^2 - x$  trên  $\mathbb{R}$

Ta có  $u'(x) = 2x - 1$ . Bảng biến thiên hàm số  $y = u(|x|)$

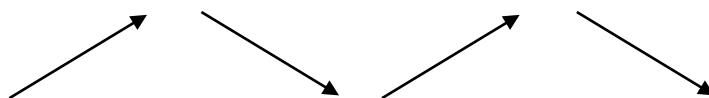
|              |           |                |               |           |
|--------------|-----------|----------------|---------------|-----------|
| $x$          | $-\infty$ | $0$            | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $u'(x)$      |           | $-$            | $0$           | $+$       |
| $y = u( x )$ | $+\infty$ | $-\frac{1}{4}$ | $0$           | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên hàm số  $y = u(|x|)$  ta suy ra PT có 8 nghiệm. Chọn C.

## BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$$x: -\infty \quad 0 \quad +\infty \quad y: +0-0+0-y33$$

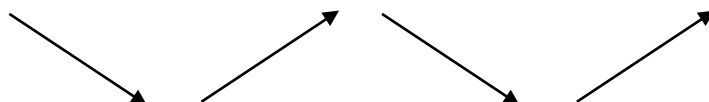


Số nghiệm thuộc đoạn  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$  của phương trình  $f(3\sqrt{3} \cos x \sin 2x) = 1$  là

- A. 4.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 8.

2. (Trích đề thi thử Sở GDĐT Nam Định năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$$x: -\infty \quad 0 \quad +\infty \quad y: -0+0-0+y+\infty+\infty$$

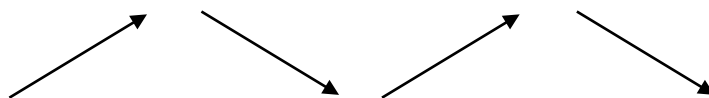


Số nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương trình  $5f(\cos^2 x - \cos x) = 1$  là

- A. 11.                      B. 10.                      C. 9.                      D. 12.

3. Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$$x \rightarrow -\infty \quad 0 + \infty \quad y \rightarrow 0 - 0 + 0 - y \quad 22$$



Số nghiệm thuộc đoạn  $[0; 4\pi]$  của phương trình  $f(\tan x) = 1$  là

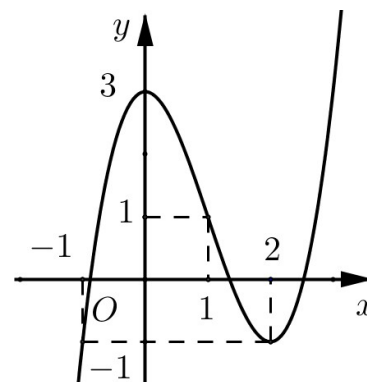
- A. 7.                      B. 5.                      C. 8.                      D. 16.

4. (Trích đề thi thử Sở GDĐT Hà Tĩnh năm 2020)

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm phân biệt của phương trình

$$\left[ f(2^{\sqrt{x}}) \right]^2 - f(2^{\sqrt{x}}) - 2 = 0 \text{ là}$$

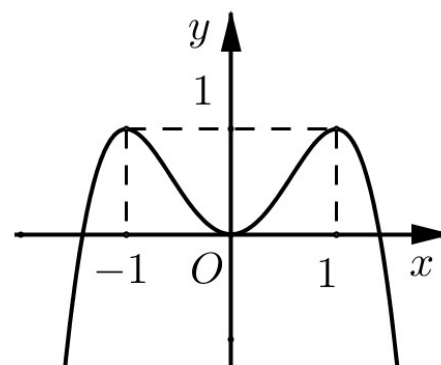
- A. 4.                      B. 3.  
C. 1.                      D. 2.



5. Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình  $f[f(\cos 2x)] = 0$ ?

- A. 1.                      B. 4.  
C. 3.                      D. Vô số.

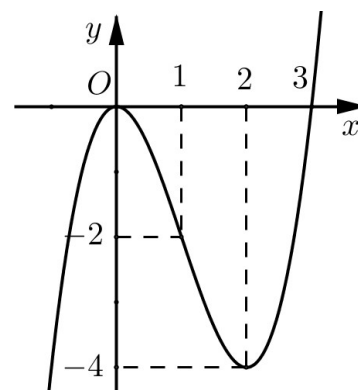


6. Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây

Tìm số nghiệm thực của phương trình

$$f(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}) = -2.$$

- A. 4.                      B. 1.  
C. 3.                      D. 5.



## 2.2. Tìm điều kiện của tham số để PT $f(u(x))=m$ có nghiệm, có $k$ nghiệm

### Cách tiếp cận

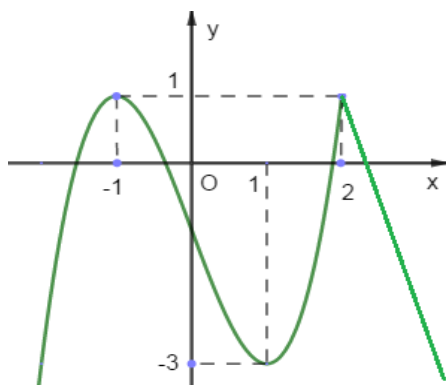
+ Đặt  $t = u(x)$ . Khảo sát hoặc đánh giá tìm miền giá trị của biến  $t$  và tìm sự tương ứng giữa  $t$  và  $x$  trong trường hợp bài toán yêu cầu có  $k$  nghiệm.

+ Lập bảng biến thiên cho hàm số  $f(u)$

+ Dựa vào bảng biến thiên kết luận.

*Chú ý.* Ngoài việc lập bảng biến thiên cho hàm số  $f(u)$  ta có thể đọc đồ thị  $f(u)$ .

**Ví dụ 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình  $f(1 - \sqrt{x^3 + x}) = a$  có nghiệm. Giả sử khi tham số  $a$  thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất  $m$  nghiệm và có ít nhất  $n$  nghiệm. Giá trị của  $m + n$  bằng

**A.** 4.

**B.** 6.

**C.** 3.

**D.** 5.

**Hướng dẫn giải. Cách 1.** Xét hàm số  $u(x) = 1 - \sqrt{x^3 + x}$  trên  $[0; +\infty)$

Ta có  $u'(x) = -\frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + x}} < 0, \forall x > 0$ . Bảng biến thiên hàm số  $u(x)$

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $u'(x)$ | - |           |
| $u(x)$  | 1 | $-\infty$ |

Như vậy cứ 1 giá trị  $u \in (-\infty; 1]$  cho 1 giá trị  $x \in [0; +\infty)$ .

Bảng biến thiên hàm số  $f(u)$

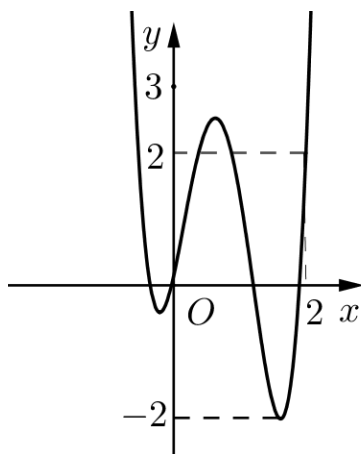
|         |           |      |      |
|---------|-----------|------|------|
| $u$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$  |
| $f'(u)$ | $+$       | $0$  | $-$  |
| $f(u)$  | $-\infty$ | $1$  | $-3$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra PT  $f(1 - \sqrt{x^3 + x}) = a$  có nhiều nhất 2 nghiệm, ít nhất 1 nghiệm. Chọn C.

**Cách 2. Trắc nghiệm** bằng cách ghép các bảng biến thiên lại với nhau tác giả Hoàng Sơn đã đưa ra cách làm trắc nghiệm và gọi nó là phương pháp ghép trực cụ thể như sau :

|                          |      |           |
|--------------------------|------|-----------|
| $x$                      | $0$  | $+\infty$ |
| $u = 1 - \sqrt{x^3 + x}$ | $1$  | $-\infty$ |
| $f(u)$                   | $-3$ | $1$       |

**Ví dụ 4.** (Trích đề thi thử Chuyên Đại học Vinh lần 2 năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương  $f(|x^3 - 3x|) = m$  có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $[-2; 2]$ ?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.



**Hướng dẫn giải.** Xét hàm số  $u(x) = x^3 - 3x$  trên  $[-2; 2]$

Ta có  $u'(x) = 3x^2 - 3$ . Bảng biến thiên hàm số  $y = |u(x)|$

|          |    |    |   |   |   |
|----------|----|----|---|---|---|
| $x$      | -2 | -1 | 1 | 2 |   |
| $u'(x)$  | +  | 0  | - | 0 | + |
| $ u(x) $ | 2  | 0  | 2 | 0 | 2 |

Như vậy cứ 1 giá trị  $|u| \in (0; 2)$  cho 6 giá trị  $x \in [-2; 2]$ ,  $|u| = 2$  cho 4 giá trị  $x \in [-2; 2]$ ,  $|u| = 0$  cho 3 giá trị  $x \in [-2; 2]$ .

Bảng biến thiên hàm số  $f(u)$

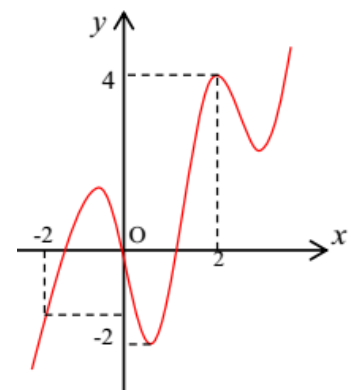
|           |   |          |       |   |   |
|-----------|---|----------|-------|---|---|
| $ u $     | 0 | $x_1$    | $x_2$ | 2 |   |
| $f'( u )$ | + | 0        | -     | 0 | + |
| $f( u )$  | 0 | $f(x_1)$ | -2    | 2 |   |

Để PT  $f(|x^3 - 3x|) = m$  có 12 nghiệm thuộc đoạn  $[-2; 2]$  thì PT  $f(|u|) = m$  có 2 nghiệm thuộc đoạn  $[0; 2]$ . Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra  $\begin{cases} -2 < m < 0 \\ 2 < m < f(x_1) < 3 \end{cases}$ . Chọn C.

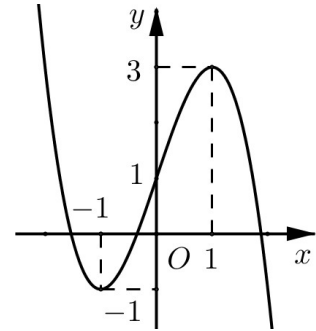
## BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để phương trình  $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m$  có nghiệm thuộc nửa khoảng  $[1; 3)$ .

- A. 4.                      B. 6.  
C. 21.                     D. 5.

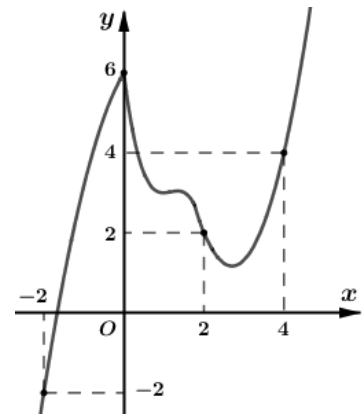


2. (Trích đề thi thử Sở GDĐT Hà Tĩnh năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(f(\cos x)) = m$  có nghiệm thuộc khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ ?



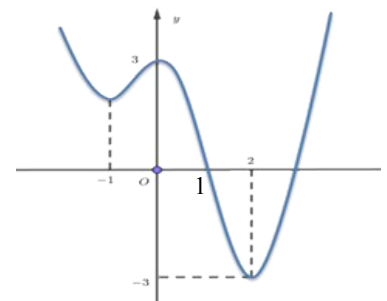
- A. 4.                      B. 2.  
C. 3.                      D. 5.

3. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(2\log_2 x) = m$  có nghiệm duy nhất trên  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ .



- A. 4.                      B. 6.  
C. 9.                      D. 5.

4. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(e^x) = m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; \ln 2)$ .



- A.  $(-3; 0)$ .                      B.  $(-3; 3)$ .  
C.  $(0; 3)$ .                      D.  $[-3; 0]$ .

5. (Trích đề thi thử Sở GDĐT Phú Thọ lần 2 năm 2019) Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $f(0) < \frac{7}{6}$  và có bảng biến thiên như sau.

$x \backslash y$



Giá trị lớn nhất của tham số  $m$  để phương trình  $e^{2f^3(x) - \frac{13}{2}f^2(x) + 7f(x) - \frac{1}{2}} = m$  có nghiệm trên đoạn  $[0; 2]$  là

A.  $e^2$ .

B.  $e^{\frac{15}{13}}$ .

C.  $e^4$ .

D.  $e^3$ .

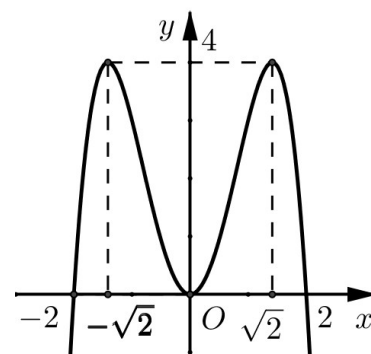
6. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sqrt{2-x^2}) = m$  có nghiệm là:

A.  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ .

B.  $(0; 4)$ .

C.  $(-2; 2)$ .

D.  $[0; 4]$ .



**Đặc biệt:** Nếu thay  $m$  bởi  $f(m)$  ta thu được một lớp bài toán

**Cách tiếp cận 1:** Sử dụng tính đơn điệu.

Nếu hàm số  $y = f(x)$  đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định của phương trình thì PT  $f(u(x)) = f(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ .

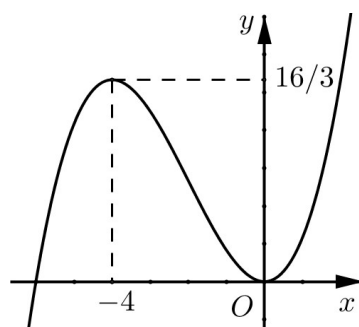
**Cách tiếp cận 2:** Đọc đồ thị.

+ Đặt  $t = u(x)$ . Khảo sát hoặc đánh giá tìm miền giá trị của biến  $t$  và tìm sự tương ứng giữa  $t$  và  $x$  nếu cần.

+ Dựa vào đồ thị (bảng biến thiên) coi  $u$  là biến tìm được điều kiện của  $f(u)$ , từ đó suy ra điều kiện của  $f(m)$ .

+ Dựa vào đồ thị (bảng biến thiên) coi  $m$  là biến tìm được điều kiện của  $m$ .

**Ví dụ 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình

$$f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4) \text{ có nghiệm?}$$

**A.** 3.

**B.** 4.

**C.** 5.

**D.** Vô số.

**Hướng dẫn giải.** Ta có  $m^2 + 4m + 4 \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ . Xét hàm số  $u(x) = \frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}$

$\Leftrightarrow (u+3)\sin x - (2u+1)\cos x = 4u+1$ . Sử dụng điều kiện có nghiệm của Pt bậc nhất đối

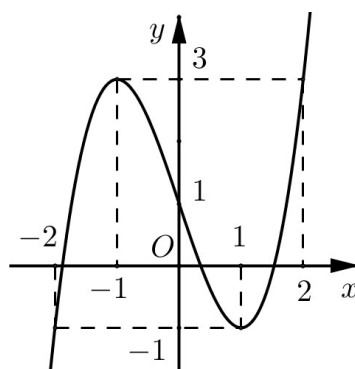
với  $\sin x$  và  $\cos x$  ta được  $-\frac{9}{11} \leq u \leq 1$ . Suy ra  $0 \leq |u| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Dễ thấy hàm số

$y = f(x)$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ . Do đó  $f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4) \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| = m^2 + 4m + 4.$$

Để Pt có nghiệm thì  $0 \leq m^2 + 4m + 4 \leq 1$ . Vì  $\frac{m^2 + 4m + 4}{2023 + \sin x + 4} \geq 0$  nên  $m \in \{-3; -2; -1\}$ . Chọn A.

**Ví dụ 6.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của  $m$  để phương trình  $f(x - \sqrt{x^2 + 1}) = f(m)$  có nghiệm là :

**A.** 3.

**B.** 0.

**C.** 2.

**D.** 1.

**Hướng dẫn giải.** Xét hàm số  $u(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$

$$\text{Ta có } u'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0,$$

Bảng biến thiên

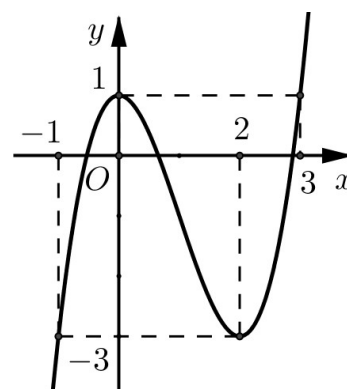
|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $u'(x)$ | +         |           |

|        |                                         |
|--------|-----------------------------------------|
| $u(x)$ | $-\infty \xrightarrow{\hspace{10em}} 0$ |
|--------|-----------------------------------------|

Từ bảng biến thiên ta có với  $x \in \mathbb{R}$  thì  $u \in (-\infty; 0)$ . Dựa vào đồ thị ta suy ra  $f(u) \leq 3$  với mọi  $u \in (-\infty; 0)$ . Kéo theo  $f(m) \leq 3$ . Từ đồ thị ta có  $m \leq 2$ . Vì  $m$  nguyên dương nên  $m \in \{1; 2\}$ . Chọn C.

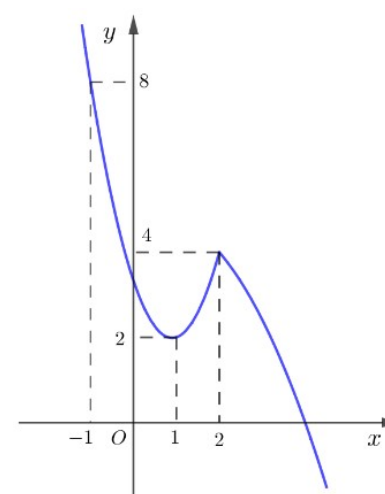
## BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(1 + \sin x) = f(m)$  có nghiệm



- A.  $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$ .      B.  $m \in \{0; 1; 2\}$ .  
C.  $m \in \emptyset$ .      D.  $m \in \{0; 1\}$ .

2. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sqrt{8+4x-4x^2}-1) = f(m)$  có nghiệm thuộc  $(-1; 1)$ ?



- A. 4.      B. 7.  
C. 3.      D. 5.

3. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

|      |           |           |
|------|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $y'$ | +         |           |
| $y$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(2\sin x - \cos x) = f(m)$  có nghiệm  $x \in \mathbb{R}$ ?

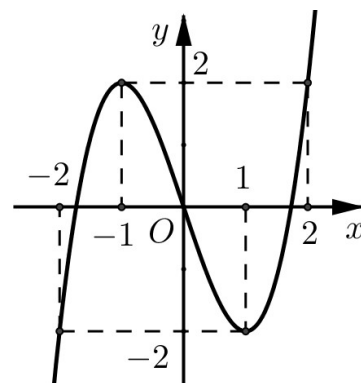
- A. 4.                                      B. 6.                                      C. 5.                                      D. 3.

4. (Trích đề thi thử Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định lần 1 năm 2020) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.

Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sqrt{f(\sin 2x) + 2}) = f\left(\frac{m}{2}\right)$  có nghiệm

thuộc nửa khoảng  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ ?

- A. 4.                                      B. 2.  
C. 3.                                      D. 1.



5. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên:

|      |           |      |     |           |   |   |    |
|------|-----------|------|-----|-----------|---|---|----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |   |   |    |
| $y'$ |           | -    |     | +         | 0 | - |    |
| $y$  | 5         |      | -2  |           | 2 |   | -1 |

Tính tổng các giá trị nguyên dương của  $m$  để phương trình

$f(|x - 1| + 2) = f(\sqrt{3 - m} + 2)$  có nghiệm.

- A. 4.                                      B. 6.                                      C. -2.                                      D. 8.

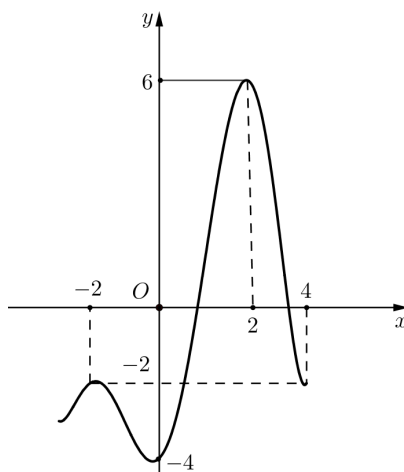
### 2.3. Số nghiệm của phương trình $f(u(x)) = g(u(x))$

**Cách tiếp cận 1:** Đặt  $t = u(x)$  và khảo sát hàm số  $h(t) = f(t) - g(t)$  trên miền biến  $t$ .

**Cách tiếp cận 2:** Đặt  $t = u(x)$  và tìm nghiệm của PT  $f(t) = g(t)$  bằng cách sử dụng tương giao của hai đồ thị  $y = f(t)$  và  $y = g(t)$ .

**Ví dụ 7.** (Trích đề thi thử Chuyên Quang Trung, Bình Phước lần 4 năm 2019-2020)

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu số nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$  có nghiệm thuộc  $[-2;2]$ ?

**A.** 7.

**B.** 6.

**C.** 8.

**D.** 5.

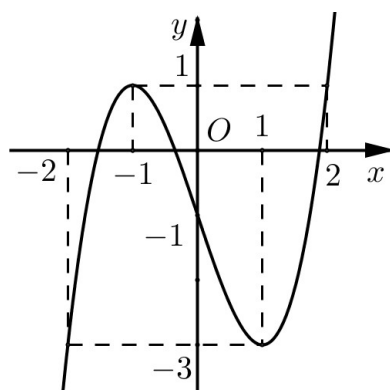
**Hướng dẫn giải.** PT được viết lại  $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+2\left(\frac{x}{2}+1\right)=m+2$ . Đặt  $t=\frac{x}{2}+1$ , Với

$x \in [-2;2]$  thì  $t \in [0;2]$ . Xét hàm số  $g(t)=\frac{1}{3}f(t)+2t$  trên đoạn  $[0;2]$ . Ta có

$g'(t)=\frac{1}{3}f'(t)+2 > 0, \forall t \in [0;2]$ . Do đó để PT đã cho có nghiệm thuộc  $[-2;2]$  thì

$g(0) \leq m+2 \leq g(2) \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 4$ . Vì  $m$  nguyên nên  $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ . Chọn C.

**Ví dụ 8.** Cho hàm số  $y=f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(f(x)+m)+1=f(x)+m$  có đúng 3 nghiệm phân biệt trên đoạn  $[-1;1]$ ?

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 4.

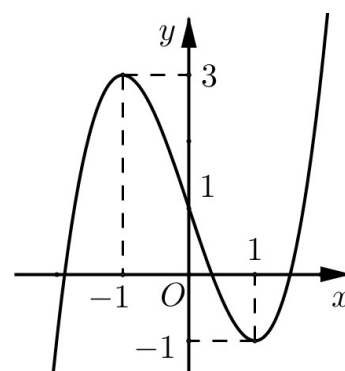
**Hướng dẫn giải.** Đặt  $t = f(x) + m$ . PT được viết lại  $f(t) = t - 1$ . Nghiệm của PT này là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  $y = f(t)$  và đường thẳng  $y = t - 1$ . Do đó

$$f(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + m = -2 \\ f(x) + m = 0 \\ f(x) + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -m - 2 \\ f(x) = -m \\ f(x) = -m + 2 \end{cases}.$$

Trên đoạn  $[-1; 1]$  hàm số  $y = f(x)$  đồng biến, cứ mỗi  $y$  cho một  $x$ . Dựa vào đồ thị ta suy ra để PT đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt trên đoạn  $[-1; 1]$  thì  $m = 1$ . Chọn A.

## BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sin x) = 3\sin x + m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$ . Tổng các phần tử của  $S$  bằng



- A. - 5.                      B. - 8.  
C. - 10.                    D. - 6.

2. Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|  |                                      |  |
|--|--------------------------------------|--|
|  | $y$                                  |  |
|  | $x \downarrow y \uparrow \downarrow$ |  |
|  | $\nearrow \searrow \nearrow$         |  |

Phương trình  $f^2(\sin x + \cos x) + 1 + \sin 2x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) f(\sin x + \cos x)$  có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ ?

- A. 1.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 6.



3. Cho hàm số  $y = f(x)$  có liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình

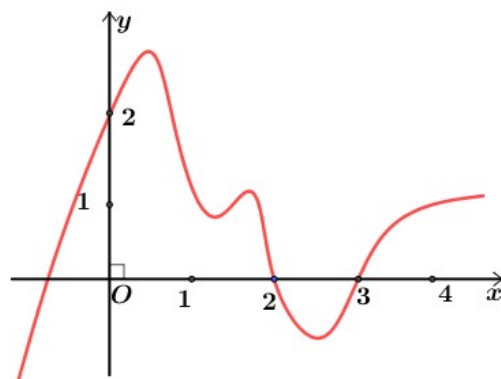
$$f(x^3 - 3x) + 3x^3 - 3x - 13 = (x^2 - 2)^3 - 3(x - 1)^2.$$

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.



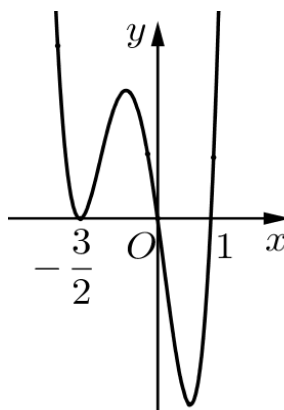
Thay vì cho đồ thị hàm số hay bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$  người ta cho đồ thị hàm số hoặc bảng biến thiên hàm số  $y = f'(x)$  lúc đó thu được bài toán sau.

#### 2.4. Bài toán số nghiệm của PT có chứa hàm hợp khi cho hàm số $y = f'(x)$

**Cách tiếp cận:** Từ đồ thị hay bảng biến thiên hàm số  $y = f'(x)$  ta lập được bảng biến thiên hàm số  $y = f(x)$  đưa về các bài toán trên.

**Ví dụ 9.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0$ ,  $f(0) = 3$ ,  $f(1) = 0$ ,  $f(2) > 3$ .

Hàm số  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Với tham số  $m \in (0; 3)$  số nghiệm thực của phương trình  $f(x^2 - 3) = m$  là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

**Hướng dẫn giải.** Đặt  $t = x^2 - 3 \geq -3$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Với  $t = -3$  có 1 nghiệm  $x$ , mỗi  $t \in (-3; +\infty)$  có 2 nghiệm  $x$ . PT được viết lại  $f(t) = m$ .

Từ đồ thị hàm số  $f'(x)$  ta suy ra bảng biến thiên hàm số  $y = f(x)$ :

|         |                                                                                    |                |     |     |           |     |     |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$                                                                          | $-\frac{3}{2}$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $f'(x)$ | $+$                                                                                | $0$            | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |
| $f(x)$  |  |                |     |     |           |     |     |

Từ đồ thị và giả thiết  $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0, f(2) > 3$  ta suy ra với tham số  $m \in (0; 3)$  thì PT

$f(t) = m$  có 3 nghiệm  $t > -3$ . Do đó PT  $f(x^2 - 3) = m$  có 6 nghiệm  $x$ . Chọn D.

### C. KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

Đề tài được ứng dụng trong công tác giảng dạy chương I lớp 12, ôn thi học sinh giỏi và ôn thi tốt nghiệp THPT. Có rất nhiều bài toán về hàm hợp, tuy nhiên trong khuôn khổ của đề tài chúng tôi chỉ tập trung nghiên cứu bài toán về số nghiệm của phương trình có chứa hàm hợp khi cho trước đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số. Thời gian tới, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu, khai thác thêm bài toán số nghiệm của phương trình có chứa hàm hợp liên quan tới hàm  $f''(x)$ , tích hợp  $f'(x)$  và  $f''(x)$ ; bài toán về tập nghiệm của bất phương trình có chứa hàm hợp... Trong đề tài, các ví dụ được chúng tôi trình bày minh họa cho cách tiếp cận. Với việc triển khai đề tài trong các buổi ôn thi tốt nghiệp THPT chúng tôi nhận thấy kết quả thu được rất khả quan, thể hiện qua việc phần lớn học sinh sau khi được tiếp thu chuyên đề hầu hết các em đã làm chủ kiến thức, hứng thú và giải nhanh các câu hỏi cùng nội dung của đề tài.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng, song vì thời gian và năng lực còn hạn chế nên đề tài không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những lời chỉ bảo, những ý kiến đóng góp của quý thầy cô và bạn đọc để đề tài có ý nghĩa thiết thực hơn trong giảng dạy và học tập.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

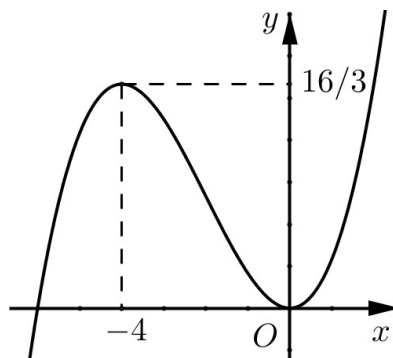
- [1]. **Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, Cấn Văn Tuất**, *Giải Tích 12*, NXB Giáo dục.
- [2]. **Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, Vũ Viết Yên**, *Đại số và giải tích 11*, NXB Giáo dục.
- [3]. **Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Đỗ Mạnh Hùng, Nguyễn Tiến Tài**, *Đại số 10*, NXB Giáo dục.
- [4]. **Đề thi THPT Quốc Gia** năm 2017, 2018, 2019.
- [5]. **Đề thi tốt nghiệp THPT** năm 2020.
- [6]. **Đề minh họa THPT Quốc Gia** năm 2017, 2018 của Bộ Giáo Dục và Đào Tạo.
- [7]. **Đề thi thử THPT Quốc Gia** năm 2017, 2018, 2019 của các trường trên toàn quốc.
- [8]. **Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**.
- [9]. <http://toanmath.com>
- [10]. <http://www.vted.vn>



## PHỤ LỤC

### Phụ lục 1. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị như hình vẽ.



Với  $m$  là tham số bất kỳ thuộc đoạn  $[0;1]$ . Phương trình  $f(x^3 - 3x^2) = 3\sqrt{m} - 4\sqrt{1-m}$  có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2.

B. 3.

C. 9.

D. 5.

2. Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị như hình vẽ. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình

$$f^2(x) - (m+7)|f(x)| + 4m + 12 = 0 \quad \text{có 7 nghiệm phân}$$

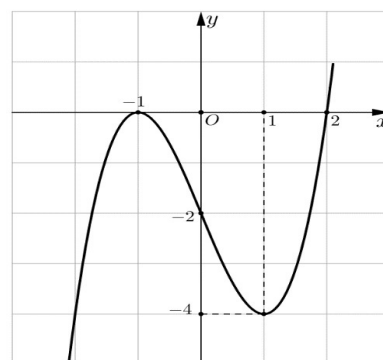
biệt là

A. 6.

B. -6.

C. 3.

D. -3.



3. (Trích đề tham khảo của Bộ GD&ĐT lần 2 năm học 2019-2020) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|  |  |                         |  |   |           |   |           |   |           |   |           |
|--|--|-------------------------|--|---|-----------|---|-----------|---|-----------|---|-----------|
|  |  | $x \rightarrow -\infty$ |  | 0 | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ | 0 | $-\infty$ |
|  |  | 22                      |  |   |           |   |           |   |           |   |           |
|  |  | ↗                       |  | ↘ |           | ↗ |           | ↘ |           |   |           |

Số nghiệm thuộc đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương trình  $f(\sin x) = 1$  là

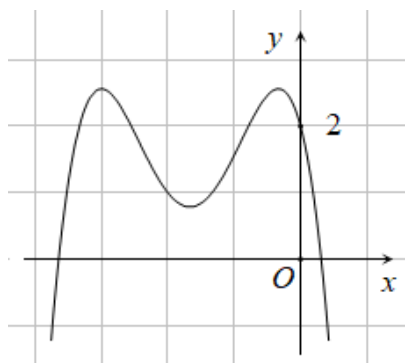
A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

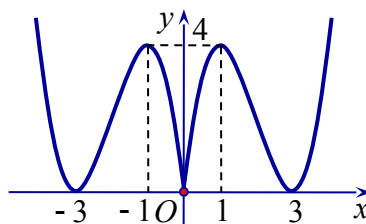
4. (Trích đề tốt nghiệp THPT năm 2020) Cho hàm số bậc bốn  $y=f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình  $f(x^2 f(x)) - 2 = 0$  là

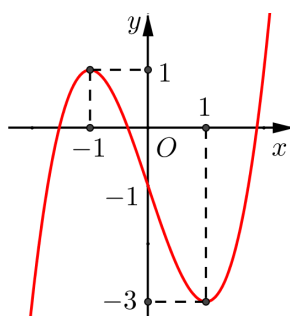
- A. 6.                      B. 12.                      C. 8.                      D. 9.

5. Cho hàm số  $y=f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $2f(2|\sin x|+1)=m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(0;\pi)$  là



- A.  $[0;4)$ .                      B.  $(0;4)$ .                      C.  $(1;3)$ .                      D.  $[0;8)$ .

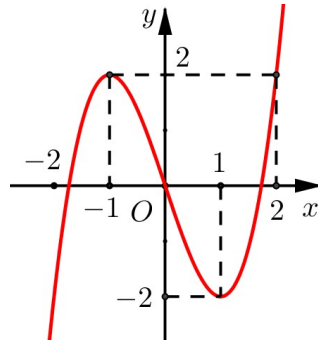
6. Cho hàm số  $y=f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(f(x))=m$  có nghiệm thuộc khoảng  $(-1;0)$ . Tìm số phần tử của tập  $S$ .

- A. 2.                      B. 5.                      C. 4.                      D. 3.

7. Cho hàm số  $y=f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(\sqrt{2f(\cos x)}) = m$  có nghiệm thuộc  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ?

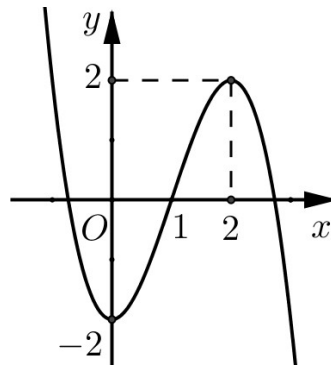
A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

8. Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình  $2|f(x^3 - 1)| - 3 = 0$  có bao nhiêu nghiệm lớn hơn 1?

A. 2.

B. 8.

C. 4.

D. 6.

9. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau:

|         |           |   |   |    |           |
|---------|-----------|---|---|----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 0 | 1 | 4  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0 | + | 0  | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |   |   | 13 | $-\infty$ |

Arrows indicate values: from  $+\infty$  to -8, from -8 to 5, from 5 to 13, and from 13 to  $-\infty$ .

Phương trình  $f(\cos x) = \frac{13}{3}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

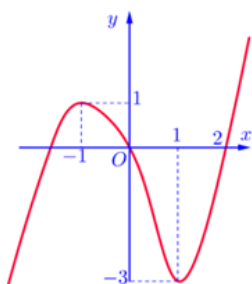
A. 4.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

10. Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị  $y = f(x)$  như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình  $f(2 + f(e^x)) = 1$  là



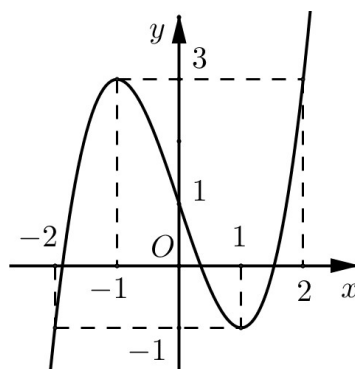
A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

11. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $8f(e^x) = m^2 - 1$  có hai nghiệm thực phân biệt là

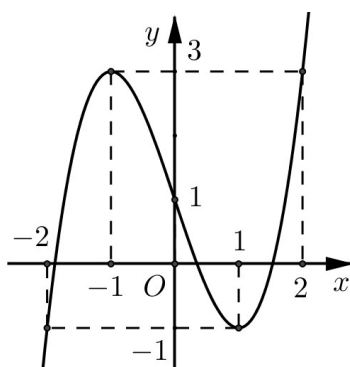
A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

12. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số các giá trị nguyên của tham số  $m$  không vượt quá 5 để phương trình

$$f(\pi^x) - \frac{m^2 - 1}{8} = 0$$
 có hai nghiệm phân biệt là



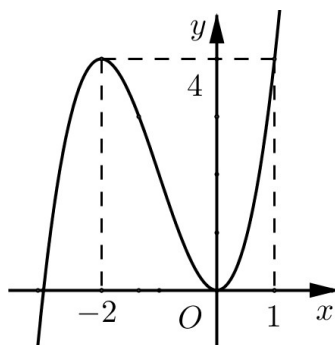
A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

13. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $f(x^2 + 2x - 2) = 3m + 1$  có nghiệm thuộc khoảng  $[0; 1]$ .



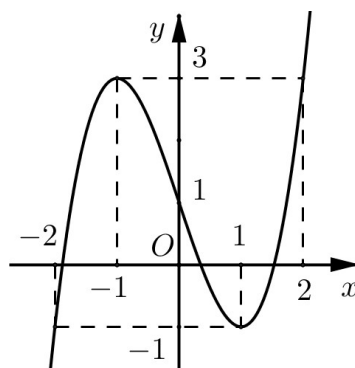
A.  $[0; 4]$ .

B.  $[-1; 0]$ .

C.  $[0; 1]$ .

D.  $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$ .

14. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên dương  $m$  nhỏ hơn 100 để phương trình  $f(x^2) - m^2 + 2020 = 0$  có đúng hai nghiệm phân biệt là

A. 99.

B. 56.

C. 55.

D. 54.

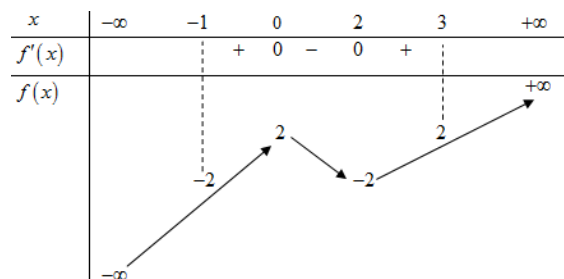
15. Hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau.

|         |           |            |      |            |           |            |      |            |           |
|---------|-----------|------------|------|------------|-----------|------------|------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$       | $-1$ | $1$        | $+\infty$ |            |      |            |           |
| $f'(x)$ |           | $-$        | $0$  | $+$        | $0$       | $-$        | $0$  | $+$        |           |
| $f$     | $+\infty$ | $\searrow$ | $-9$ | $\nearrow$ | $7$       | $\searrow$ | $-9$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Số các giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(x^3 + 1) = m$  có 4 nghiệm phân biệt là

- A. 7.                      B. 8.                      C. 17.                      D. 15.

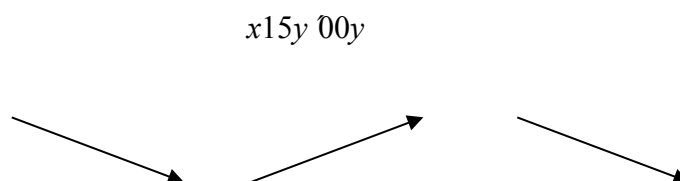
16. Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(1 - 2\sin x) = f(|m|)$  có nghiệm thực?

- A. 4.                      B. 6.                      C. 7.                      D. 5.

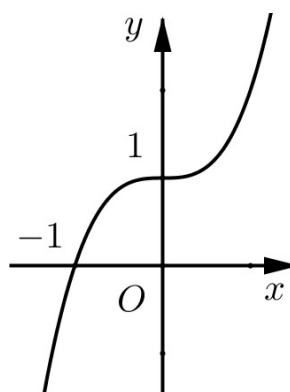
17. Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $|f(x^2 + 1)| = m$  có 6 nghiệm phân biệt?

- A. 12.                      B. 198.                      C. 6.                      D. 190.

18. Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $f(6\sin x + 8\cos x) = f(m(m+1))$  có nghiệm thực.

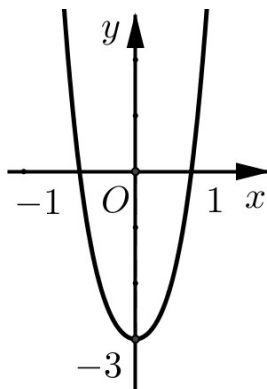
A. 5.

B. 6.

C. 2.

D. 4.

19. Cho hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để phương trình:  $f(\sqrt{(4-x)(x-2)}) = f(m)$  có nghiệm?

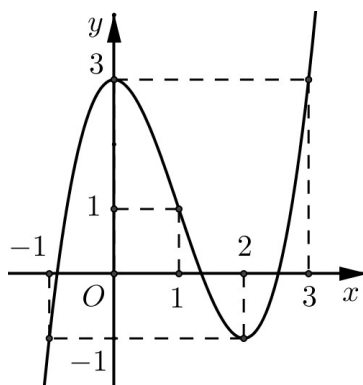
A.  $(-\infty; 1)$ .

B.  $[-1; 1]$ .

C.  $[0; 1]$ .

D.  $(-1; +\infty)$ .

20. Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình  $[f(x^2 + 1)]^2 - f(x^2 + 1) - 2 = 0$  là:

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

## **Phụ lục 2. THỰC NGHIỆM VÀ KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM**

### **2.1. Mục đích thực nghiệm**

- Xem xét tính khả thi và đánh giá hiệu quả của đề tài mà chúng tôi đã xây dựng.
- Rút ra những bài học kinh nghiệm khi sử dụng đề tài trong quá trình ôn thi tốt nghiệp THPT nhằm nâng cao hiệu quả giảng dạy cho giáo viên.

### **2.2. Nhiệm vụ thực nghiệm**

- Kiểm tra và đánh giá hiệu quả, tính khả thi của đề tài được xây dựng.
- Xử lý, phân tích kết quả thực nghiệm sư phạm để rút ra kết luận.

### **2.3. Phương pháp thực nghiệm sư phạm**

#### **2.3.1. Kế hoạch TNSP**

Để xem tính khả thi của phương pháp nghiên cứu, tôi chọn các lớp TN và ĐC dựa vào điểm kiểm tra khảo sát học kì I tương đối bằng nhau do đó tôi đã chọn các cặp lớp TN và ĐC tương đương nhau về các mặt sau :

- Số lượng HS
- Chất lượng học tập dựa vào kết quả khảo sát đầu năm học
- GV giảng dạy là cùng một GV và dạy 2 lớp khác nhau

#### **2.3.2. Tiến trình TNSP**

Tổ chức thực nghiệm tại 2 lớp bất kì của cùng giáo viên giảng dạy tại trường THPT (X)

#### **2.3.3. Nội dung TNSP**

Biên soạn đề câu hỏi thực nghiệm liên quan đến đề tài nghiên cứu.

Đối với lớp TN, GV giảng dạy các kiến thức theo hướng đã được đề xuất.

Đối với lớp ĐC, GV không sử dụng đề tài mà chúng tôi nghiên cứu.

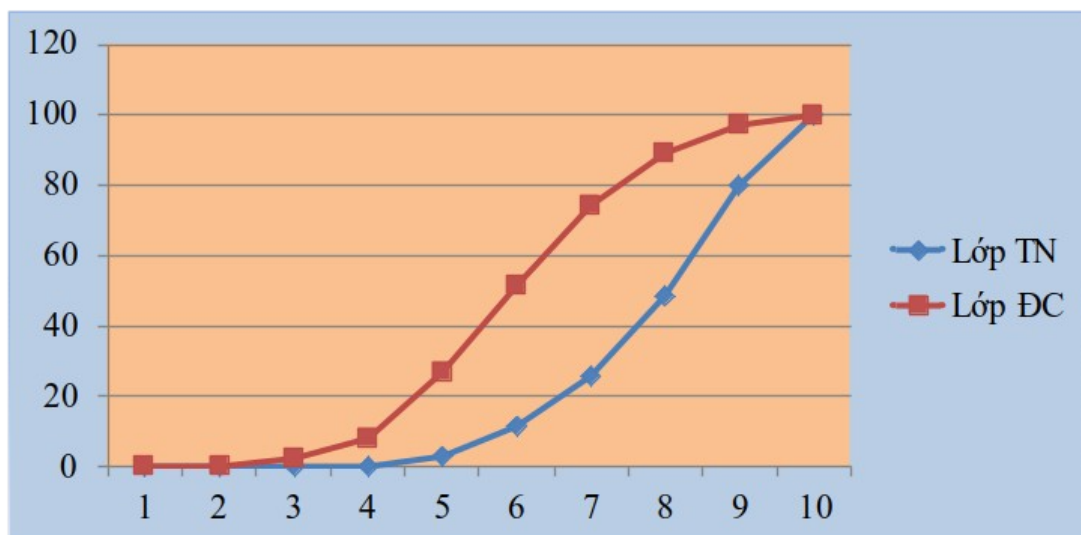
### **2.4. Kết quả thực nghiệm và xử lý kết quả thực nghiệm**

#### **2.4.1. Kết quả định lượng**

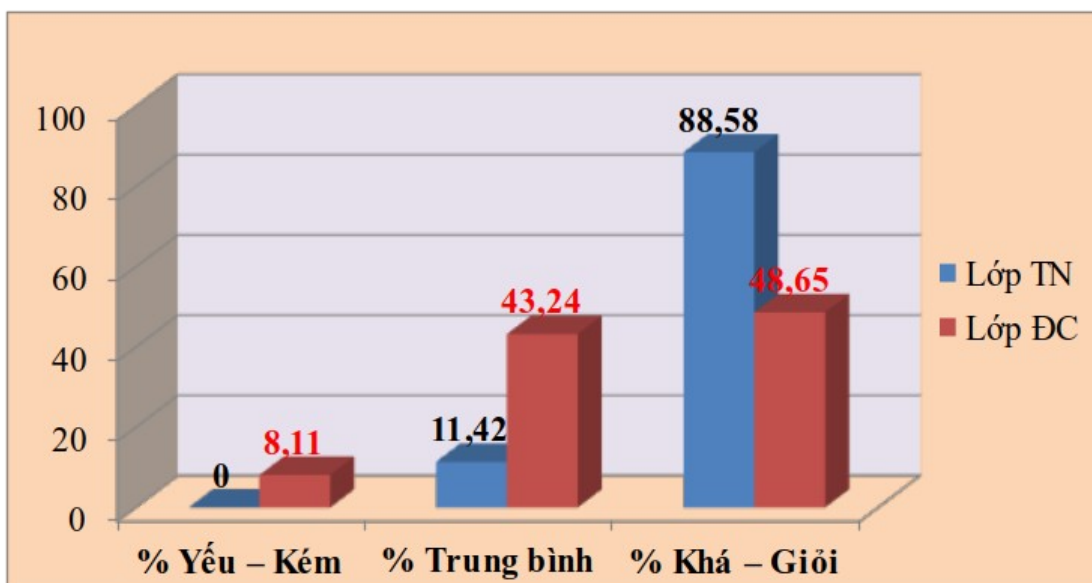
Sau khi TN, chúng tôi tiến hành kiểm tra và dựa vào kết quả của bài kiểm tra để so sánh, phân tích hiệu quả của việc xây dựng đề tài. Dựa vào bài kiểm tra gồm các câu hỏi liên quan đến đề tài nghiên cứu, chúng tôi dùng phần mềm Excel phân tích dữ liệu để xem xét sự khác nhau về điểm trung bình của 2 lớp TN và ĐC. Kết quả thu được như sau:

Bảng 3.1. Phân phối tần suất, tần số tích lũy bài kiểm tra 1 tiết

| Lớp | Sĩ số | Điểm $X_i$                       |      |      |      |      |       |       |       |       |       |     |
|-----|-------|----------------------------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
|     |       | 0                                | 1    | 2    | 3    | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10  |
| 12A | 35    | 0                                | 0    | 0    | 0    | 0    | 1     | 3     | 5     | 8     | 11    | 7   |
| 12B | 37    | 0                                | 0    | 0    | 1    | 2    | 7     | 9     | 10    | 4     | 3     | 1   |
| Lớp | Sĩ số | % Số HS đạt điểm $X_i$ trở xuống |      |      |      |      |       |       |       |       |       |     |
| 12A | 35    | 0,00                             | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 2,86  | 11,43 | 25,71 | 48,57 | 80,00 | 100 |
| 12B | 37    | 0,00                             | 0,00 | 0,00 | 2,71 | 8,11 | 27,03 | 51,35 | 74,36 | 89,19 | 97,29 | 100 |



Hình 3.1. Đồ thị đường lũy tích bài kiểm tra 1 tiết cặp TN- ĐC



Hình 3.2. Biểu đồ phân loại bài kiểm tra 1 tiết của cặp TN – ĐC

Bảng 3.2. Phân loại bài kiểm tra 1 tiết cặp TN- ĐC

| Lớp | % Yếu – Kém | % Trung bình | % Khá – Giỏi |
|-----|-------------|--------------|--------------|
| 12A | 0,00        | 11,42        | 88,58        |
| 12B | 8,11        | 43,24        | 48,65        |

### Tổng hợp các tham số đặc trưng qua bài kiểm tra 1 tiết

Bảng 3.3. Tổng hợp các tham số đặc trưng

| Trường                    | Lớp    | Sĩ số | $\bar{x}$ | m     | $\bar{x} \pm m$   | $S^2$ | S     | V%    |
|---------------------------|--------|-------|-----------|-------|-------------------|-------|-------|-------|
| <b>THPT</b><br><b>(X)</b> | TN-12A | 35    | 8,314     | 0,220 | $8,314 \pm 0,220$ | 1,564 | 1,251 | 15,05 |
|                           | ĐC-12B | 37    | 6,460     | 0,280 | $6,460 \pm 0,280$ | 2,366 | 1,538 | 23,80 |

Chúng tôi kiểm định kết quả thực nghiệm bằng phép thử t – test

#### Phép thử student:

$$t = (\bar{X}_{TN} - \bar{X}_{ĐC}) \times \sqrt{\frac{n_{TN}}{S_{TN}^2 + S_{ĐC}^2}} = (8,314 - 6,460) \times \sqrt{\frac{35}{1,564 + 2,366}} = 5,532$$

Tra bảng phân phối với  $t_{\alpha}=2,437$ ; kết quả cho thấy  $t > t_{\alpha}$  chứng tỏ sự khác nhau giữa  $\bar{x}_{TN}$  và  $\bar{x}_{ĐC}$  do tác động của phương pháp TN là có ý nghĩa với mức độ ý nghĩa 0,01.

#### 2.4.2. Phân tích kết quả định lượng

Qua phân tích kết quả định lượng, chúng tôi thấy kết quả học tập ở các lớp TN luôn cao hơn lớp ĐC, cụ thể:

- Tỷ lệ % HS đạt điểm khá trở giỏi ở các lớp thực nghiệm luôn cao hơn lớp ĐC đồng thời tỷ lệ HS đạt điểm yếu, kém và trung bình ở lớp TN thấp hơn ở các lớp ĐC. Điều này cho chúng ta thấy rằng, HS ở các lớp TN hiểu bài và vận dụng kiến thức tốt hơn so với HS ở các lớp ĐC.

- Với giá trị độ lệch chuẩn  $S_{TN}$ ,  $S_{ĐC}$  nhỏ nên số liệu ít phân tán.

- Với hệ số biến thiên thuộc khoảng  $10\% < V_{TN}, V_{ĐC} < 30\%$ : hệ số dao động trung bình nên kết quả thu được của các cặp TN là đáng tin cậy. Hệ số biến thiên  $V$  của các lớp thực nghiệm bao giờ cũng nhỏ hơn lớp đối chứng, chứng tỏ mức độ phân tán quanh giá trị trung bình cộng của lớp TN cũng nhỏ hơn, nghĩa là kết quả học tập của HS ở các lớp TN đồng đều hơn so với kết quả học tập của HS ở các lớp ĐC.