

HSG TOÁN 9 TỈNH CAO BẰNG NĂM 2023-2024

Câu 1. (3,0 điểm) Cho biểu thức
$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x+6}} \right)$$

- 1) Rút gọn biểu thức A
- 2) Tìm x để biểu thức A có giá trị bằng $0,5$

Câu 2. (3,0 điểm)

Cho hàm số $y = (m-2)x + 2$ ($m \neq 2$) có đồ thị là đường thẳng (d)

1. Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ luôn âm
2. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) bằng 1

Câu 3. (4,0 điểm)

- 1) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 15x - 3y = 3 \end{cases}$$
 (m là tham số)
Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0, y < 0$
- 2) Tìm số a để đa thức $x^4 + ax^3 + x + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$

Câu 4. (2,0 điểm) Tìm tất cả các số chính phương có 4 chữ số, biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị ta vẫn được một số chính phương.

Câu 5. (6,0 điểm) Cho điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính AB ($M \neq A; M \neq B; MA < MB$). Tia phân giác của $\angle AMB$ cắt AB tại C. Qua C, vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM, BM theo thứ tự tại D và H

- 1) Chứng minh các điểm A, C, H, M cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó
- 2) Gọi E là hình chiếu của H trên tiếp tuyến tại A và F là hình chiếu của D trên tiếp tuyến tại B của đường tròn (O). Chứng minh E, M, F thẳng hàng
- 3) Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của tứ giác ACHE và BCDF. Chứng minh rằng $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$

Câu 6. (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c + 2 = abc$

Chúng minh $\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) ĐKXD: $x \geq 0, x \neq 4; x \neq 9$

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} + \frac{\sqrt{x+2}}{x-5\sqrt{x+6}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} : \left[\frac{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}) - (\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2}) + \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}} : \frac{x-9-x+4+\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0, x \neq 4; x \neq 9$

$$2) A = 0,5 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}} = 0,5 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 0,5\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25 \text{ (tmdk)}$$

Vậy khi $A = 0,5$ thì $x = 25$

Câu 2.

1) ta có $y = 0 \Rightarrow (m-2)x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2-m}$

Suy ra đồ thị hàm số $y = (m-2)x + 2 \text{ (} m \neq 2 \text{)}$ cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{2}{2-m}; 0 \right)$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2-m} < 0 \Leftrightarrow 2-m < 0 \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy $m > 2$ là giá trị cần tìm

2) Đồ thị hàm số $y = (m-2)x + 2 \text{ (} m \neq 2 \text{)}$ cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{2}{2-m}; 0\right)$ suy ra $OA = \left| \frac{2}{2-m} \right|$ và cắt trục tung tại điểm B(0;2) suy ra $OB = 2$

Gọi OH là khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d)

Xét tam giác OAB vuông tại O có OH là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{2-m}\right)^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{(2-m)^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$OH = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1^2} = \frac{(2-m)^2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{(2-m)^2}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (2-m)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - \sqrt{3} \\ m = 2 + \sqrt{3} \end{cases} (tmdk)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = 2 - \sqrt{3} \\ m = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Câu 3.

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = m \\ 15x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x = m + 3 \\ 15x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{17} \\ y = \frac{5m-2}{17} \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x > 0, y < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+3}{17} > 0 \\ \frac{5m-2}{17} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ 5m-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow -3 < m < \frac{2}{5}$$

Vậy $-3 < m < \frac{2}{5}$ là giá trị cần tìm

2) Ta có :

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + x + 1 &= (x^4 + x) + ax^3 + 1 = x(x^3 + 1) + a(x^3 + 1) + 1 - a \\ &= (x+a)(x+1)(x^2 - x + 1) + 1 - a \end{aligned}$$

Đa thức $x^4 + ax^3 + x + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$

$$\text{Nên đa thức } [(x+a)(x+1)(x^2 - x + 1) + 1 - a] : (x^2 - x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Vậy $a=1$ là giá trị cần tìm

Câu 4.

Gọi số chính phương cần tìm là $\overline{abcd}$ ($a, b, c, d \in N, 0 < a \leq 9; 0 \leq b; c; d \leq 9$)

Đặt $\overline{abcd} = n^2$ ($n \in N$). Theo bài ra ta có $\overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)}$ là số chính phương

Đặt $\overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2$ ($m \in M$) ($31 < n < m < 100$). Ta có

$$\overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)}$$

$$= (a+1).1000 + (b+3).100 + (c+5).10 + d + 3$$

$$= a.1000 + b.100 + c.10 + d + 1000 + 300 + 50 + 3$$

$$= \overline{abcd} + 1353$$

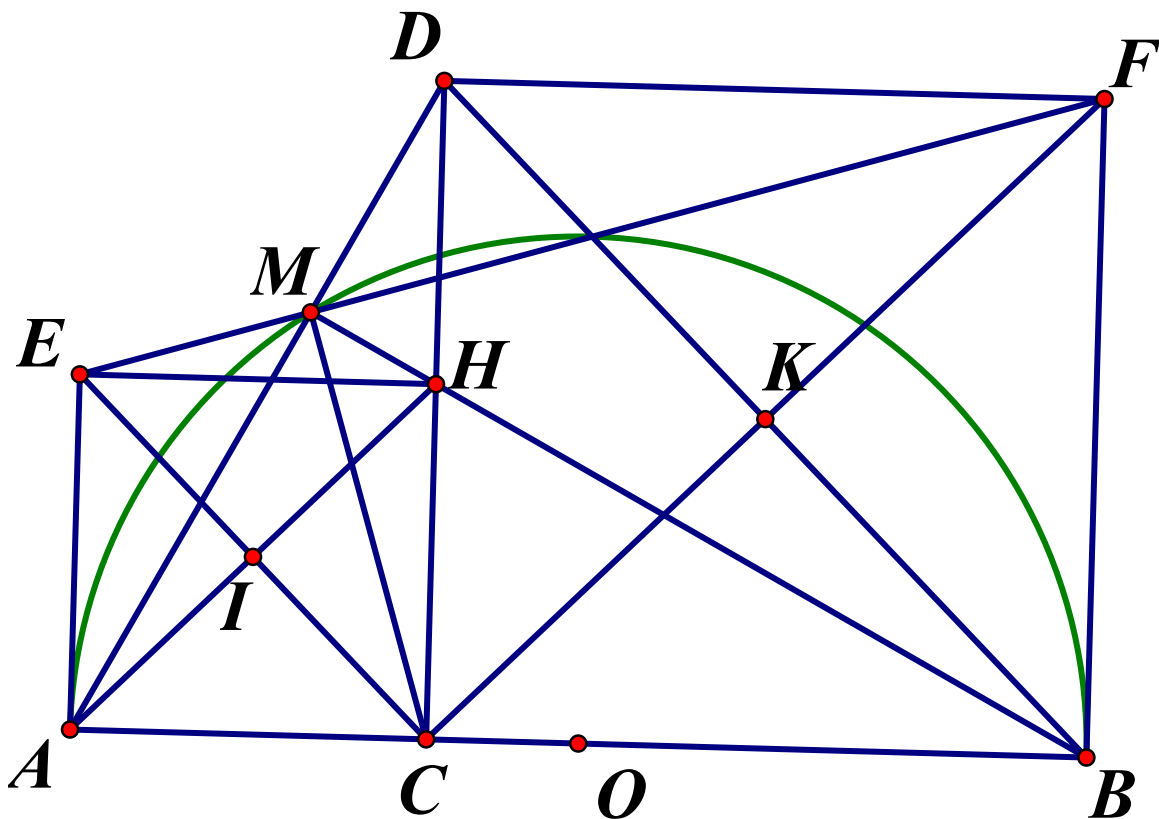
$$\Rightarrow m^2 = n^2 + 1353 \Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 1353 = 33.41 = 11.123$$

$$Th1: \begin{cases} m-n=33 \\ m+n=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=37 \\ n=4 \end{cases} \text{ (ktm)}$$

$$Th2: \begin{cases} m-n=11 \\ m+n=123 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=67 \\ n=56 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Vậy số chính phương cần tìm là 3136

Câu 5.



1) Chứng minh các điểm A, C, H, M cùng thuộc đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó

Xét (O) có $\angle AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Theo giả thiết ta có $CH \perp AB \Rightarrow \angle ACH = 90^\circ$

Xét tứ giác $ACHM$ có $\angle AMH + \angle ACH = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $ACHM$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

Vậy các điểm A, C, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Gọi I là trung điểm của AH. Khi đó I là tâm của đường tròn đi qua các điểm A, C, H, M

2) Gọi E là hình chiếu của H trên tiếp tuyến tại A và F là hình chiếu của D trên tiếp tuyến tại B của đường tròn (O). Chứng minh E, M, F thẳng hàng

Do MC là tia phân giác của $\angle AMB$ nên $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM}$ (1)

Xét tam giác $\triangle BHM$ và $\triangle BAM$ có: $\angle B$ chung, $\angle HCB = \angle BAM = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle BHC \sim \triangle BAM \Rightarrow \frac{HC}{AM} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{HC}{CB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC = HC$

Xét tứ giác $AEHC$ có $\angle HCA = \angle AEH = \angle ACH = 90^\circ$ và $AC = HC$ nên tứ giác $AEHC$ là hình vuông. Khi đó $AH = EC$ và I là trung điểm của AH, EC

Ta có $MI = \frac{1}{2}AH$ (tam giác AMH vuông)

Mà $AH = EC$ nên $MI = \frac{1}{2}EC$ suy ra tam giác AMC vuông tại M $\Rightarrow \angle EMC = 90^\circ$

Chứng minh tương tự ta có $\angle FMC = 90^\circ$

Suy ra $\angle EMC + \angle FMC = 180^\circ$. Vậy E, M, F thẳng hàng

3) Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của tứ giác $ACHE$ và BCDF. Chứng minh rằng $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$

Theo chứng minh trên ta có tứ giác $ACHE$ là hình vuông nên $AC = \frac{CE}{\sqrt{2}}$

Ta có $S_1 = AC^2 = \frac{CE^2}{2} \Rightarrow 2S_1 = CE^2$. Chứng minh tương tự ta có $2S_2 = CF^2$

Xét tam giác ECF có $\angle ECF = \angle ECH + \angle BCF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ nên tam giác ECF vuông tại C

Có $\angle EMC = \angle FMC = 90^\circ \Rightarrow CM \perp EF$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\frac{1}{CM^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2} \Rightarrow CM^2 = \frac{CE^2 \cdot CF^2}{CE^2 + CF^2} = \frac{2S_1 S_2}{S_1 + S_2} \leq \frac{2S_1 S_2}{2\sqrt{S_1 S_2}} = \sqrt{S_1 S_2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $S_1 = S_2 \Leftrightarrow AM = BM$ (vô lý vì $MA < MB$)

Vậy $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$

Câu 6.

Ta có $a + b + c + 2 = abc \Leftrightarrow \frac{a+b+c+2}{abc} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} + \frac{2}{abc} = 1$

Khi đó tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $\frac{1}{a} = \frac{x}{y+z}; \frac{1}{b} = \frac{y}{x+z}; \frac{1}{c} = \frac{z}{x+y}$. Khi đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{z+x}} = \sqrt{\frac{x}{x+z} \cdot \frac{y}{y+z}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{bc}} = \sqrt{\frac{y}{x+z} \cdot \frac{z}{y+x}} = \sqrt{\frac{y}{x+y} \cdot \frac{z}{x+z}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{ca}} = \sqrt{\frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z}} = \sqrt{\frac{z}{y+z} \cdot \frac{x}{x+y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{3}{2}. \text{Dấu bằng xảy ra khi } a = b = c = 2$$