

MỤC LỤC

◆CHƯƠNG 5. GIỚI HẠN – DÃY SỐ LIÊN TỤC.....	2
▶BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.....	2
.....(A). Tóm tắt kiến thức	
2	
.....(B). Phân dạng toán cơ bản	
3	
•Dạng 1: Xác định giới hạn của dãy số bằng định nghĩa.....	3
•Dạng 2: Tính giới hạn hữu hạn của dãy số bằng định lí.....	3
•Dạng 3: Tính giới hạn của dãy số có dạng.....	4
•Dạng 4: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.....	4
•Dạng 5: Ứng dụng thực tế.....	4
.....(C). Dạng toán rèn luyện	
5	
•Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	5
•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	8
•Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	11
▶BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.....	17
.....(A). Tóm tắt kiến thức	
17	
.....(B). Phân dạng toán cơ bản	
19	
•Dạng 1: Xác định giới hạn của hàm số bằng định nghĩa.....	19
•Dạng 2: Tính giới hạn của hàm số bằng một số kết quả giới hạn cơ bản.....	19
•Dạng 3: Tính giới hạn của hàm số có dạng.....	20
•Dạng 4: Xác định giới hạn của hàm số dựa vào đồ thị.....	20
•Dạng 5: Ứng dụng.....	22
.....(C). Dạng toán rèn luyện	
22	
•Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	23
•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	25
•Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	28
▶BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC.....	36
.....(A). Tóm tắt kiến thức	
36	
.....(B). Phân dạng toán cơ bản	
37	
•Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.....	37
•Dạng 2: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng, đoạn.....	38
•Dạng 3: Tìm giá trị tham số để hàm số liên tục.....	39
•Dạng 4: Ứng dụng.....	39
.....(C). Dạng toán rèn luyện	
40	
•Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	40
•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	45
•Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	48

◆CHƯƠNG 5. GIỚI HẠN - DÃY SỐ LIÊN TỤC

▶BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. Tóm tắt kiến thức

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

✍ Giới hạn 0 của dãy số

- ✓ Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta

còn viết là $\lim u_n = 0$.

- ✓ Ta thừa nhận một số giới hạn cơ bản sau đây:

- ✓ $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
- ✓ $\lim q^n = 0$, với $|q| < 1$.
- ✓ $\lim q^n = 0$, với q là số thực thỏa mãn $|q| < 1$.

✍ Giới hạn hữu hạn của dãy số

- ✓ Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tiến tới dương vô cực, nếu $\lim (u_n - a) = 0$.

- ✓ Khi đó, ta viết $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

- ✍ **Chú ý:** Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số

- ✓ Cho $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó:

$$\lim (u_n + v_n) = a + b \quad \lim (u_n - v_n) = a - b$$

$$\lim (c \cdot u_n) = c \cdot a \quad \lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$$

4. Giới hạn vô cực

✓ Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn** là nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

✓ Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn** là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

✍ **Chú ý:** Ta có các kết quả sau:

- ✓ a) $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim(-u_n) = -\infty$;
- ✓ b) Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$;
- $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$;

B. Phân dạng toán cơ bản

•Dạng 1: Xác định giới hạn của dãy số bằng định nghĩa

☞ Các ví dụ minh họa

$$\lim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

Câu 1: Chứng minh rằng .

$$\lim \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$$

Câu 2: Chứng minh rằng .

•Dạng 2: Tính giới hạn hữu hạn của dãy số bằng định lí

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

$$\lim \left(5 - \frac{2}{n^3} \right)$$

a)

$$\lim \left(4 - \frac{2}{n} \right) \left(5 + \frac{1}{3^n} \right)$$

b)

Câu 2: Tính các giới hạn sau:

$$\lim \frac{4n+2}{3}$$

a)

$$\lim \frac{3n+4}{-5+\frac{2}{n}}$$

b)

$$\lim \frac{-3+\frac{1}{n+1}}{5^n}$$

c)

$$\lim \left(6 - \frac{5}{4^n} \right)$$

d)

Câu 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n + 2}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3}{1 + 3^n}$.

•Dạng ③: Tính giới hạn của dãy số có dạng $\frac{C}{\infty}, \frac{\infty}{C}, \frac{C}{0} (C \neq 0), \frac{\infty}{\infty}$

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2^n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3n + 2}{4}$

Câu 2: Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 - \frac{4}{n+1}, v_n = 8 - \frac{5}{3n^2 + 2}$. Tính:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n), \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$

•Dạng ④: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính các tổng sau:

a) $M = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots$

b) $N = 3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} - \dots + 3 \left(-\frac{1}{4} \right)^n + \dots$

Câu 2: Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn:

a) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \dots + \left(-\frac{1}{5} \right)^n + \dots$

b) $2 + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \dots + \frac{2^n}{3^{n-1}} + \dots$

•Dạng ⑤: Ứng dụng thực tế

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Một mẫu chất phóng xạ $^{210}_{84}Po$ có khối lượng ban đầu $m_0 = 42(mg)$, nhưng cứ sau một khoảng thời gian $T = 138$ ngày thì khối lượng chất đó giảm đi một nửa (T được gọi là chu kỳ bán rã). Gọi u_n là khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ sau n chu kỳ bán rã..

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

b) Tính giới hạn của dãy số (u_n) và cho biết ý nghĩa của giới hạn đó.

Câu 2: Tại một nhà máy, người ta đo được rằng 80% lượng nước sau khi sử dụng được xử lí và tái sử dụng. Với $100m^3$ ban đầu được sử dụng lần đầu tại nhà máy, khi quá trình xử lí và tái sử dụng lặp lại mãi mãi, nhà máy sử dụng được tổng lượng nước là bao nhiêu?

Câu 3: Từ độ cao $100m$, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n .

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n) .

b) Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n) .

c) Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n . Tính S_n , nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là bao nhiêu?

©. Dạng toán rèn luyện

•Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1}$ là

A. $-\frac{3}{4}$.

B. $-\infty$.

C. 0.

D. -1.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ là

A. $+\infty$.

B. 0.

C. $\frac{2}{7}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Câu 3: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

- A. $a = 10$. B. $a = 8$. C. $a = 6$. D. $a = 4$.

Câu 5: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}$.

- A. $L = \frac{3}{2}$. B. $L = \frac{1}{2}$. C. $L = 2$. D. $L = 1$.

Câu 6: Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

Câu 7: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n + 3^n + 2^{2n}}{3p^n - 3^n + 2^{2n+2}}$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 8: Chứng tỏ rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{2}\right)^n = +\infty$.

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n)$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 0. D. 1.

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$ là **Câu 1:** Giá trị của giới hạn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1} \text{ là}$$

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\infty$. C. 0. D. -1.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ là

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{2}{7}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 3: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a = 10$.

B. $a = 8$.

C. $a = 6$.

D. $a = 4$.

Câu 5: Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}$.

A. $L = \frac{3}{2}$.

B. $L = \frac{1}{2}$.

C. $L = 2$.

D. $L = 1$.

Câu 6: Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n + 3^n + 2^{2n}}{3p^n - 3^n + 2^{2n+2}}$ là:

A. 1.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. 0.

D. 1.

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$ là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. $+\infty$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + a^2 n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n + 1}) = 0$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2})$ là

A. 0.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n})$ là:

A. - 1.

B. $1 - \sqrt{2}$.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 8n - n + a^2}) = 0$.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Câu 13: Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n)$ là

A. - 1.

B. 0.

C. 1.

D. $+\infty$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$, trong đó a là tham số thực.

Tìm a để $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -1$.

A. 3.

B. 2.

C. - 2.

D. - 3.

Câu 15: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2})$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Câu 16: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. $+\infty$.

Câu 17: Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ là

A. 2.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Câu 18: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}$ là:

A. $+\infty$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $-\infty$.

Câu 19: Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2}$ là:

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. $+\infty$.

•Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Biết giới hạn $\lim \frac{2n+1}{-3n+2} = a$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Giá trị a lớn hơn 0.		
b)	Ba số $-\frac{5}{3}; a; \frac{1}{3}$ tạo thành một cấp số cộng với công sai bằng 2		
c)	Trên khoảng $(-\pi; \pi)$ phương trình lượng giác $\sin x = a$ có 3 nghiệm		
d)	Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q = 3$ và $u_1 = a$, thì $u_3 = -6$		

Câu 2. Biết giới hạn $\lim \frac{5n^3 - 2n + 1}{n - 2n^3} = a$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai
---------	------	-----

a)	Giá trị a nhỏ hơn 0.		
b)	$x=a$ là trục đối xứng của parabol $(P): y=x^2+5x+2$		
c)	Phương trình lượng giác $\sin x=a$ vô nghiệm		
d)	Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d=3$ và $u_1=a$, thì $u_3=6$		

Câu 3. Biết giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{3n^3-3n+3} = a$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^4-n^2+3}} = b$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Giá trị a nhỏ hơn 0.		
b)	Giá trị b lớn hơn 0.		
c)	Phương trình lượng giác $\cos x=a$ có một nghiệm là $x=\frac{\pi}{2}$		
d)	Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d=b$ và $u_1=a$, thì $u_3=\frac{3}{2}$		

Câu 4. Biết giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^3-5n+9) = a$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n+3}{1+3 \cdot 4^{n+1}} = b$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Tích $a.b=3$		
b)	Hàm số $y=\sqrt{1-x}$ có tập xác định là $D(a;1]$		
c)	Giá trị b là số lớn hơn 0		
d)	Phương trình lượng giác $\cos x=b$ vô nghiệm		

Câu 5. Biết giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^3+1}{2n+5} = a$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{2^n+5^{2n}} = b$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-3n^2 + \frac{1}{n} \right) = a$		
b)	$x=b$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=2x$ với trục hoành		
c)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2024} \right)^n = b$		

d)	Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d = \frac{1}{2}$ và $u_1 = b$, thì $u_3 = 2$		
----	---	--	--

Câu 6. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$		
b)	$\lim \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = -\infty$		
c)	$\lim \frac{1}{n^3} = 0$		
d)	$\lim 4 = 0$		

Câu 7. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim (\sqrt{3})^n = -\infty$		
b)	$\lim \pi^n = 0$		
c)	$\lim (n^3 + 2n^2 - 4) = +\infty$		
d)	$\lim (-n^4 + 5n^3 - 4n) = -\infty$		

Câu 8. Viết được các số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số tối giản, ta được:

$$0,212121\ldots = \frac{a}{b}; \quad 4,333\ldots = \frac{c}{d}. \text{ Khi đó:}$$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$a + b = 40$		
b)	Ba số $a; b; 58$ tạo thành một cấp số cộng		
c)	$c + d = 15$		
d)	$\lim c = 13$		

Câu 9. Tìm được tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ và

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots \quad \text{Khi đó:}$$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
--	---------	------	-----

a)	$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q = -\frac{1}{2}$.		
b)	$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q = \frac{1}{3}$.		
c)	$S > T$		
d)	$S = \frac{1}{T}$		

Câu 10. Cho $u_n = \frac{7^n + 2^{2n-1} + 3^{n+1}}{7^{n+1} + 5^{n-1}}$. Biết $\lim u_n = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}; \frac{a}{b}$ tối giản). Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$a + b = 8$		
b)	$a - b = -7$		
c)	Bộ ba số $a; b; 13$ tạo thành một cấp số cộng có công sai $d = 7$		
d)	Bộ ba số $a; b; 49$ tạo thành một cấp số nhân có công bội $q = 7$		

•Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1:

a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1 = \frac{5}{4}, q = -\frac{1}{3}$.

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,(3)$ dưới dạng phân số.

Câu 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{3^{n+1}}{2^{2n}}$ b) $\lim \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n}$.

Câu 3: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \left(2 + \frac{5}{n} \right)$ b) $\lim \left(\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} \right)$; c) $\lim \left(3 - \frac{4}{n} \right) \left(2 + \frac{5}{n^2} \right)$ d) $\lim \frac{3 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}}$

Câu 4: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $\lim u_n = 3, \lim v_n = 4$. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{llll} \lim(3u_n - 4) & \lim(u_n + 2v_n) & \lim(u_n - v_n)^2 & \lim \frac{-2u_n}{v_n - 2u_n} \\ \text{a)} & \text{b)} & \text{c)} & \text{d)} \end{array}$$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim nu_n = 3$. Tìm giới hạn $\lim \frac{2n+3}{n^2 u_n}$.

Câu 6: Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau thành phân số:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 0,(7) = 0,777\ldots \\ \text{b)} & 1,(45) = 1,454545\ldots \end{array}$$

Câu 7: Cho dãy số (u_n) có tính chất $|u_n - 2| \leq \frac{1}{3^n}$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Câu 8: Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + n}$.

Câu 9: Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{n^2 + 1})$.

Câu 10: Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - n + 3)$.

Câu 11: Tính tổng $S = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{3^n} + \cdots$.

Câu 12: Cho $u_n = \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ với a, b là các số thực thỏa mãn $|a| < 1, |b| < 1$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Câu 13: Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+2n}$.

Câu 14: Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{5^{n-1}} + \cdots$.

Câu 15: Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 1,(03) \\ \text{b)} & 3,(23) \end{array}$$

Câu 16: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\cos n}{n^2}$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Câu 17: Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 3 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3, \dots, A_nB_nC_n, \dots$.
 Ký hiệu S_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$.

- a) Tính S_n . b) Tính tổng $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3^n}, n \geq 1$. Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- a) Tính $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ theo n . b) Tính u_n theo n . c) Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) có tính chất $\left| u_n - \frac{n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Câu 20: Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,(12) = 2,121212\dots$ thành phân số.

Câu 21: Tìm các giới hạn sau:

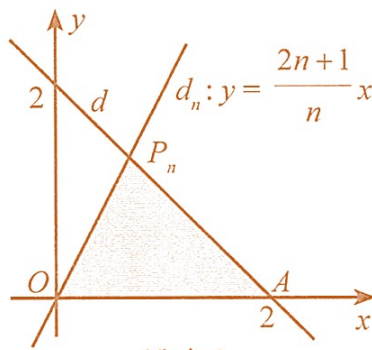
- a) $\lim \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$ b) $\lim \frac{3^n}{4^n - 1}$; c) $\lim \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$; d) $\lim \frac{4^{n+1}}{3^n + 4^n}$.

Câu 22: Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim (1 + 3n - n^2)$; b) $\lim \frac{n^3 + 3n}{2n - 1}$
 c) $\lim (\sqrt{n^2 - n} + n)$ d) $\lim (3^{n+1} - 5^n)$.

Câu 23: Tùy theo giá trị của $a > 0$, tìm giới hạn $\lim \frac{a^n}{a^n + 1}$.

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $d: x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d_n: y = \frac{2n+1}{n}x$ tại điểm $P_n (n \in \mathbb{N}^*)$. Ký hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n .
 Tìm $\lim S_n$.



Hình 4

Câu 25: Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n - 2)$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + n^2 - \sqrt{n^4 + 1})$;
- c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 - n + 2} + n)$; d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - \sqrt{4n^2 + 1})$.

Câu 26: Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n - 5}{3n}$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^2 - 6n + 2}{8n^2 - 5n + 4}$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 5n + 1}{3n^2 - 4n + 2}$
- d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-4n + 1}{9n^2 - n + 2}$; e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n + 1}}{8n + 3}$; g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + 5^n}{3 \cdot 4^n - 4 \cdot 5^n}$

Câu 27: Tìm các giới hạn sau:

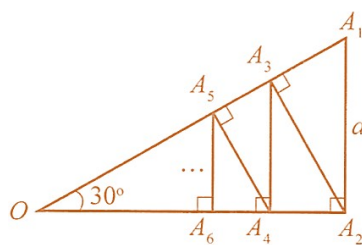
- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{2 - 3n^2}$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 + 5}$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$

Câu 28: Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3n - 5)$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 7}{1 - 2n}$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3^n - 2^n)$.

Câu 29: Kí hiệu $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) có công bội $q \neq 1$. Biết rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{S_n} = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị của q .

Câu 30: Cho tam giác OA_1A_2 vuông tại A_2 , $A_2A_1A_2 = a$ và $\angle A_1OA_2 = 30^\circ$. Hạ các đường vuông góc $A_2A_3 \perp OA_1$; $A_3A_4 \perp OA_2$; $A_4A_5 \perp OA_1$; ... Tiếp tục quá trình này, ta nhận được đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo a .

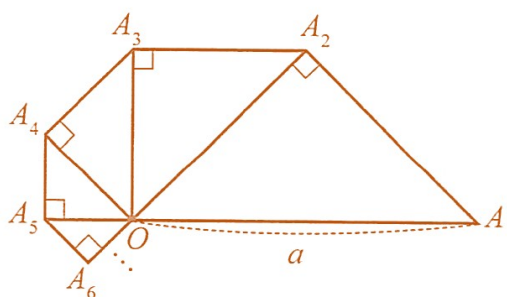


Hình 1

Câu 31: Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{6n+1}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n^2+n}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)(2n+3)}{2n^2+4}$;
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n+n}}$; e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$.

Câu 32: Cho tam giác OA_1A_2 vuông cân tại A_2 có cạnh huyền OA_1 bằng a . Bên ngoài tam giác OA_1A_2 , vẽ tam giác OA_2A_3 vuông cân tại A_3 . Tiếp theo, bên ngoài tam giác OA_2A_3 , vẽ tam giác OA_3A_4 vuông cân tại A_4 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta vẽ được một dãy các hình tam giác vuông cân (Hình 2).

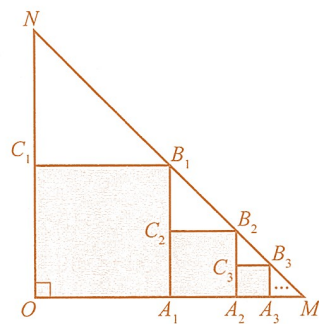


Hình 2

Tính độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$

Câu 33: Cho tam giác OMN vuông cân tại O , $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN , vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON . Trong tam giác A_1MB_1 , vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh

A_1M, MB_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình 3). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Hình 3

A. Tóm tắt kiến thức

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

- ✓ Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c là hằng số).

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

- ✓ Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$ (với $M \neq 0$).
- ✓ Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
- ✓ (Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$).

Nhận xét:

- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;
- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) (c \in \mathbb{R})$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

3. Giới hạn một phía

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên phải** là số L khi x dần tới x_0 nếu dãy số (x_n) bất

 Chú ý:

- ✓ Ta thừa nhận các kết quả sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L;$$

- ✓ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- ✓ Nếu thì không tồn tại .

- ✓ Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi ta thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$.

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

- ✓ Cho hàm số $x \neq x_0$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

- ✓ Ta nói hàm số $x \neq x_0$ có giới hạn hữu hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
kí hiệu

- ✓ Cho hàm số $x \neq x_0$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

- ✓ Ta nói hàm số $x \neq x_0$ có giới hạn hữu hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.
kí hiệu

 Chú ý:

- ✓ a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$.

- ✓ b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

- ✓ Cho hàm số $x \neq x_0$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

- ✓ Ta nói hàm số $x \neq x_0$ có giới hạn hữu hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.
kí hiệu

5. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

- ✓ Cho hàm số $x \neq x_0$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

 Chú ý:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

a) Các giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

được định nghĩa tương tự như trên.

b) Ta thường có các giới hạn thường dùng sau:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty \ (a \in \mathbb{R}); \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$$

với k nguyên dương;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty \text{ với } k \text{ là số chẵn; } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty \text{ với } k \text{ là số lẻ.}$$

c) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \neq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x).g(x)]$$

Nếu được tính theo quy tắc cho bởi sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x).g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

B. Phân dạng toán cơ bản

•Dạng ①: Xác định giới hạn của hàm số bằng định nghĩa

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ với $x \neq 3$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$.

Câu 2: Sử dụng định nghĩa, chứng minh rằng:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$

•Dạng ②: Tính giới hạn của hàm số bằng một số kết quả giới hạn cơ bản

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2} = 1$.

Câu 2: Khi thực hiện tính $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)]$ biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, một bạn làm như sau:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(3x) = \lim_{3x \rightarrow 3} f(3x) = 3.$$

a) Theo em, lời giải trên có đúng không? Giải thích.

b) Nếu lời giải trên là sai, em hãy trình bày lời giải đúng.

Câu 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (-x^2 + x + 2)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x - 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^2 + x + 4}$.

• **Dạng ③: Tính giới hạn của hàm số có dạng** $\frac{C}{\infty}, \frac{C}{0} (C \neq 0), \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

📖 **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{4x - 5}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

Câu 2: Cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

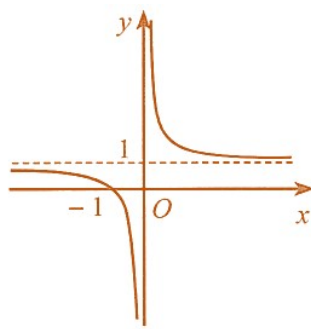
• **Dạng ④: Xác định giới hạn của hàm số dựa vào đồ thị**

📖 **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Quan sát đồ thị hàm số ở Hình 1 và cho biết các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

;

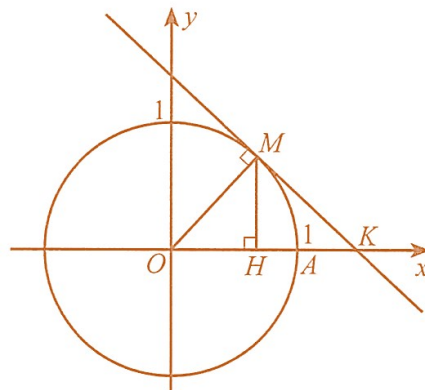


Hình 1

$$M(t; \sqrt{1-t^2}), 0 < t < 1$$

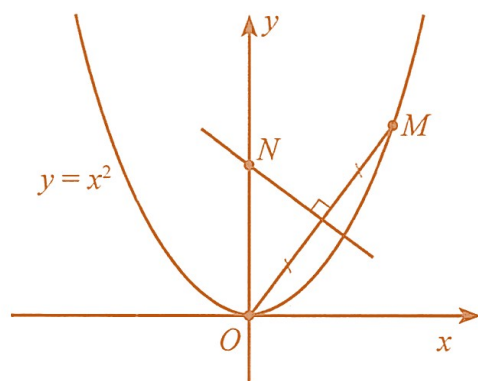
$$(C): x^2 + y^2 = 1$$

Câu 2: Cho điểm $M(t; \sqrt{1-t^2})$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Hình 1

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(t; t^2), t > 0$, nằm trên đường parabol $y = x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N . Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O ?



Hình 2

•Dạng ③: Ứng dụng

📖 Các ví dụ minh họa

$$f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$$

Câu 1: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức

trong đó $v(m/s)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v \rightarrow 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 2: Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 55$ (triệu đồng).

a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

Câu 3: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là

$V_{tb} = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính $\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

•Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ là:
A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ là:
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2}$ là:
A. $\sin \frac{1}{2}$. **B.** +∞. **C.** -∞. **D.** 0.

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là:
A. 1. **B.** - 2. **C.** 2. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}$ là:
A. 1. **B.** - 2. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}$ là:
A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{(2x - 1)(x^4 - 3)}}$ là:
A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}}$ là:
A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1}$ là:
A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** +∞.

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ là:

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt{2}-1$.

D. $-\infty$.

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2})$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt[3]{3}-1$.

D. $-\infty$.

Câu 12: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{15}{2}$.

D. Không xác định.

Câu 13: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x+2x}}$ là:

A. $-\frac{1}{5}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{1}{5}$.

Câu 14: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2}$ là:

A. $-\infty$.

B. 3.

C. $+\infty$.

D. Không xác định.

Câu 15: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 16: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là:

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là:

A. $+\infty$.

B. 2.

C. 4.

D. $-\infty$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là:

A. $+\infty$.

B. -1.

C. 0.

D. 1.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{với } x \geq 2 \\ x-1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là:

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. Không tồn tại.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}+3 & \text{với } x \geq 2 \\ ax-1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

A. $a=1$.

B. $a=2$.

C. $a=3$.

D. $a=4$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \forall x > 3 \\ 1 & \forall x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \forall x < 3 \end{cases}$$

Câu 21: Cho hàm số

Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6.$ B. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 15$
 C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6.$ D. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -15.$

Câu 22: Biết rằng $a+b=4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^2}$ hữu hạn. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{1-x^2} - \frac{a}{1-x}$$

- A. 1. B. 2. C. 1. D. -2.

Câu 23: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x)$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $-\infty$.

Câu 24: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\infty$.

Câu 25: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x})$ là:

- A. $\frac{7}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 26: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3-x^2})$ là:

- A. $\frac{5}{6}$. B. $+\infty$. C. -1. D. $-\infty$.

•Dạng 0: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 3) = 9$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{\frac{1}{x+3}} = 3$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{3}$		

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x < -1 \\ \sqrt{x^2 + 1} & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$$

Câu 2. Cho hàm số . Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \sqrt{5}$		
b)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -3$		
c)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{2}$		
d)	Hàm số tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow -1$		

Câu 3. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 0} (-5x^3 - 4x + 2) = 2$		
b)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3x^2}{4x + 1} = -\frac{3}{4}$		
c)	$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = +\infty$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \frac{5}{4}$		

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

Câu 4. Cho hàm số . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -8$		
b)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3$		
c)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$		
d)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$		

Câu 5. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
--	---------	------	-----

a)	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} = +\infty$		
d)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^3-1) \left(\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \right) \right] = +\infty$		

Câu 6. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) = +\infty$		
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = -\infty$		
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$		
d)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} = 2$		

Câu 7. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x+2} - 1) = 1$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = +\infty$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = -\infty$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ x+1 }{x^2-1} = -\infty$		

Câu 8. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x) = 4$		

b)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x - 4} = \frac{13}{6}$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9} = \frac{23}{6}$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 14}{x^2 - 7x - 18} = \frac{9}{11}$		

Câu 9. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{4x} = \frac{1}{16}$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+7} - 3} = -24$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} = \frac{4}{3}$		
d)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x - 1} = \frac{1}{3}$		

Câu 10. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 10x) = +\infty$		
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}$		
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 3x}{2 - 3x} = \frac{5}{4}$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 + 1} - x}{\sqrt{4x^2 - x + 2} + 3x} = 1$		

• **Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

Câu 1: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$. Tìm các giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 4} [g(x) - 3f(x)] \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2f(x) \cdot g(x)}{[f(x) + g(x)]^2}$$

a) b) .

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1 \\ 3 - 2x^2, & x > -1 \end{cases}$$

Câu 2: Cho hàm số

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Tìm các giới hạn và .

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + a}, & x > 1 \end{cases}$$

Câu 3: Cho hàm số

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Tìm giá trị của tham số a sao cho tồn tại giới hạn .

Câu 4: Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x + 5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x}{2x + 1}$$

a) ; b) ; c) .

Câu 5: Tìm các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow -3} (8 + 3x - x^2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} [(5x - 1)(2 - 4x)]$$

a) ; b) ;

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x}{(2x + 1)^2} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{10 - 2x^2}$$

c) ; d) .

Câu 6: Mỗi giới hạn sau có tồn tại không? Nếu có, hãy tìm giới hạn đó.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{|x - 2|}$$

a) ; b) .

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Câu 7: Tính .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x - 1)^2}$$

Câu 8: Biết . Tính .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \sqrt{\frac{x+2}{1-x^2}}$$

Câu 9: Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x - 1)$$

Câu 10: Tính

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)g(x)$$

Câu 11: Biết

. Tính

$$f(x) = \begin{cases} x + m & \text{nếu } x < 0, \\ x^2 - 1 & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$$

Câu 12: Cho hàm số

với m là tham số.

Biết hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$. Tìm m .

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \\ 1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Câu 13: Cho hàm số

Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ không ?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{nếu } x > 3 \\ 3x^2 + 1 & \text{nếu } x \leq 3 \end{cases}$$

Câu 14: Tìm a để hàm số

có giới hạn khi $x \rightarrow 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - ax + 1}{x^2 - 3x + 2} = b$$

Câu 15: Tìm các số thực a và b sao cho

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x}$$

Câu 16: Cho hàm số

. Tính:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)(1-x^2)(1-x^3)$$

Câu 17: Tính giới hạn

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1} - 2m$$

Câu 18: Cho hàm số

với m là tham số.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Biết , tìm giá trị của m .

Câu 19: Cho m là một số thực. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(m-x)(mx+1)] = -\infty$. Xác định dấu của m .

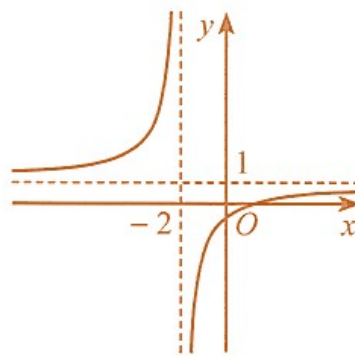
Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Câu 21: Cho $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$, chứng minh rằng:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} 3f(x) = 12$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{4} = 1$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x)} = 2$

Câu 22: Quan sát đồ thị hàm số ở Hình 2 và cho biết các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$.



Hình 2

Câu 23: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (-4x^2 + 3x + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4x+1}{x^2-x+3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2+5x+4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3+\frac{4}{x}}{2x^2+3}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{x-2}$ g) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5}{x+2}$.

Câu 24: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4}{x-1} = 2$. Tính:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} 3f(x)$.

Câu 25: Cho số thực a và hàm số $f(x)$ thoả mãn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 3}{2f(x) + 1} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng:

Câu 26: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} [(3x+1)(2-x^2)]$; b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(4x+10)^2}{\sqrt{x^2-6x}}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$ với $x \neq 1$. Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

Câu 28: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2g(x)] = 7$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + g(x)}{2f(x) - g(x)}$$

Tìm .

Câu 29: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^3-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x-2}{x}$.

Câu 30: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x+2}{3x+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{3x^2+2x+5}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-8x+6}{x^2-1}$ g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2+2x+15}{x^2+4x+3}$.

Câu 31: Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x}{x^2 + 2}$.

Câu 32: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 1} - 1}{x - 2}$.

Câu 33: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x + 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x)$

Câu 34: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2x - 4)$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x - 1}$.

Câu 35: Tìm giá trị của các tham số a và b biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 4$.

Câu 36: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{x + 6}}{x + 2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x + 1} - 1}$; g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$.

Câu 37: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{(2x + 1)^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x})$.

Câu 38: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^2 + 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

Câu 39: Tìm giá trị của các tham số a và b , biết rằng:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{x-2} = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-1} = 3$

MỤC LỤC

◆CHƯƠNG 5. GIỚI HẠN – DÃY SỐ LIÊN TỤC.....	2
▶BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.....	2
.....(A). Tóm tắt kiến thức	
2	
.....(B). Phân dạng toán cơ bản	
3	
•Dạng 1: Xác định giới hạn của dãy số bằng định nghĩa.....	3
•Dạng 2: Tính giới hạn hữu hạn của dãy số bằng định lí.....	3
•Dạng 3: Tính giới hạn của dãy số có dạng.....	4
•Dạng 4: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.....	4
•Dạng 5: Ứng dụng thực tế.....	4
.....(C). Dạng toán rèn luyện	
5	
•Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	5
•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	8
•Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	11
▶BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.....	17
.....(A). Tóm tắt kiến thức	
17	
.....(B). Phân dạng toán cơ bản	
19	
•Dạng 1: Xác định giới hạn của hàm số bằng định nghĩa.....	19
•Dạng 2: Tính giới hạn của hàm số bằng một số kết quả giới hạn cơ bản.....	19
•Dạng 3: Tính giới hạn của hàm số có dạng.....	20
•Dạng 4: Xác định giới hạn của hàm số dựa vào đồ thị.....	20
•Dạng 5: Ứng dụng.....	22
.....(C). Dạng toán rèn luyện	
22	
•Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	23
•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	25
•Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	28
▶BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC.....	36
.....(A). Tóm tắt kiến thức	
36	
.....(B). Phân dạng toán cơ bản	
37	
•Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.....	37
•Dạng 2: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng, đoạn.....	38
•Dạng 3: Tìm giá trị tham số để hàm số liên tục.....	39
•Dạng 4: Ứng dụng.....	39

- Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....40
- Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....45
- Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....48

A. Tóm tắt kiến thức

1. Hàm số liên tục tại một điểm

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục tại điểm** x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- ✍ **Nhận xét:** Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có cả ba điều kiện sau:
 1. Hàm số xác định tại x_0 ;
 2. Tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- ✍ **Chú ý:**
- ✓ Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói **gián đoạn tại điểm** x_0 và x_0 được gọi là **điểm gián đoạn** của hàm số $f(x)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên khoảng** $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.
- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $[a; b]$.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- ✍ **Nhận xét:** Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ là một đường liên, có điểm đầu, điểm cuối (Hình 3).
- ✓ Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liên nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này còn được phát biểu dưới dạng sau:
- ✓ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

3. Tính liên tục của hàm sơ cấp

- ✓ Hàm số đa thức $y = P(x)$, các hàm lượng giác $y = \sin x, y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- ✓ Hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x, y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng.
- ✓ Trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.
- ✍ **Nhận xét:** Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là hàm số sơ cấp.

4. Tổng, hiệu, tích thương của hàm số liên tục

- ✓ Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

$$v = f(x) + g(x) \quad v = f(x) - g(x) \text{ và } v = f(x) \cdot g(x)$$

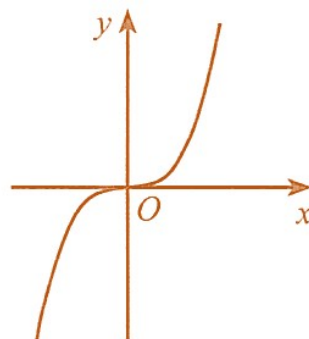
B. Phân dạng toán cơ bản

• Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

📖 Các ví dụ minh họa

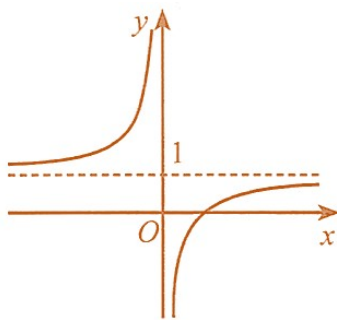
Câu 1: Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ và tìm $f(0), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Từ đó, cho biết tính liên tục của mỗi hàm số đó tại $x = 0$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị trong Hình 3;



Hình 3

b) Đồ thị trong Hình 4.



Hình 4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{nếu } x \geq 2 \\ x - 1 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Câu 2: Xét tính liên tục tại $x=2$ của hàm số

•Dạng 2: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng, đoạn

☞ Các ví dụ minh họa

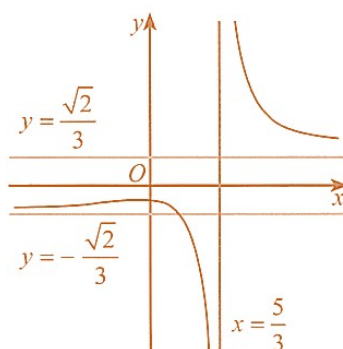
$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{nếu } x < 2 \\ -x & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$$

Câu 1: Cho hàm số

a) Hàm số trên có liên tục tại $x=2$ hay không?

b) Hàm số trên có liên tục trên $\mathbb{R}$ hay không?

Câu 2: Quan sát đồ thị hàm số trong Hình 8 và cho biết hàm số đó có liên tục:



Hình 8

a) Tại $x = \frac{5}{3}$ hay không.

b) Trên khoảng $(-\infty; 0)$ hay không.

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x) = x - 1$ và $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Xét tính liên tục của các hàm số:

a) $y = f(x) \cdot g(x)$; b) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$; c) $y = \frac{1}{\sqrt{f(x) + g(x)}}$.

•Dạng ③: Tìm giá trị tham số để hàm số liên tục

📖 Các ví dụ minh họa

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \neq 3 \\ a & \text{nếu } x = 3. \end{cases}$$

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{nếu } x \geq 1 \\ x+a & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Câu 2: Cho hàm số

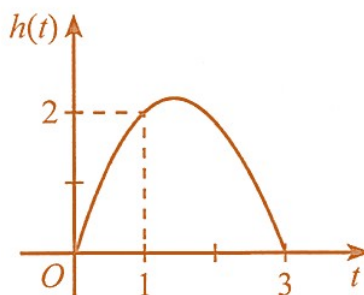
a) Với $a=2$, xét tính liên tục của hàm số tại $x=1$.

b) Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

•Dạng ④: Ứng dụng

📖 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Hình 5 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = at^2 + bt$.



Hình 5

a) Dựa vào đồ thị, tìm a, b .

b) Chứng minh rằng hàm số $h(t)$ liên tục trên khoảng $(0; 3)$.

c) Với m thuộc $(0; 3)$, tính $\lim_{t \rightarrow m} h(t)$. Cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 2: Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng.

- a) Vẽ đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.
- b) Hàm số đó có liên tục trên $[0; +\infty)$ không?
- c) Giá trị $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$ có tồn tại không? Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người có giảm đi không?

Câu 3: Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

Khối lượng đến 250g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4000
Trên 20 g đến 100 g	6000
Trên 100 g đến 250 g	8000

- a) Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.
- b) Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

©. Dạng toán rèn luyện

•Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

- A.** $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Câu 2: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = 0$.

B. $m = 2$.

C. $m = 4$.

D. $m = 6$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ k + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số liên tục tại $x = 1$.

A. $k = \frac{1}{2}$.

B. $k = 2$.

C. $k = -\frac{1}{2}$.

D. $k = 0$.

Câu toán tương đương với

Ta có: $k + 1 = y(1) = \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x}{\sqrt{x+1} - 2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

Câu 4: Biết rằng hàm số liên tục tại $x = 3$ (với m là tham số).

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m \in (-3; 0)$.

B. $m \leq -3$.

C. $m \in [0; 5)$.

D. $m \in [5; +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Câu 5: Hàm số liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x = 0, x = 1$.

B. mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

C. mọi điểm trừ $x = -1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Câu 6: Số điểm gián đoạn của hàm số là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

$$f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1 - m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 8: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0; 4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4; 6] \end{cases}$ tục trên $[0; 6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m < 2$. B. $2 \leq m < 3$. C. $3 < m < 5$. D. $m \geq 5$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 10: Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. B. a là một số vô tỉ. C. $a > 5$.
D. $a < 0$.

Câu 11: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. B. $f(x)$ không liên tục trên $(0; 2)$.
C. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$. D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x-3} - x} & \text{khi } x > 3 \\ 1 - a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

A. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu toán trở thành: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$. (*)

$$\begin{aligned} f(3) &= 1 - 3a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x-3} - x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2)(\sqrt{4x-3} + x)}{1-x} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (1 - a^2x) = 1 - 3a^2. \end{aligned}$$

Ta có

$$a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \quad a_{\min} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2} - 2 & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số liên tục tại $x = 2$.

A. $a_{\max} = 3$.

B. $a_{\max} = 0$.

C. $a_{\max} = 1$.

D. $a_{\max} = 2$.

Câu 14: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$.

C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x - 1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$$

Câu 15: Tìm các khoảng liên tục của hàm số đây là sai?

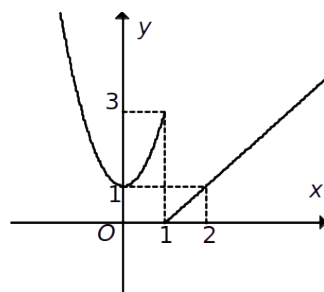
A. Hàm số liên tục tại $x = -1$.

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1); (1; +\infty)$.

C. Hàm số liên tục tại $x = 1$.

D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 16: Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Câu 17: Cho hàm số

Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

$$x=0.$$

B. mọi điểm trừ

C. mọi điểm trừ $x=1$.

$$x=0 \text{ và } x=1.$$

D. mọi điểm trừ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$$

Câu 18: Cho hàm số

. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

$$x=1.$$

B. mọi điểm trừ

C. mọi điểm trừ $x=3$.

$$x=1 \text{ và } x=3.$$

D. mọi điểm trừ

Câu 19: Số điểm gián đoạn của hàm số

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 20: Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

liên tục

tại $x=1$.

A. $S = -1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 1$.

D. $S = 2$.

Câu toán trở thành $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. (*)

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (m^2x + 1) = m^2 + 1 \rightarrow (*) \Leftrightarrow m^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2 \end{cases}$$

Ta có

$$\hat{U} \quad m = \pm 1 \Rightarrow S = 0.$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ sao cho $f(-1) = 2$, $f(4) = 7$. Có thể nói

gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ trên đoạn $[-1; 4]$.

A. Vô nghiệm.

B. Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm.

D. Có đúng hai nghiệm.

Câu 23: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m-3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$?

A. 19.

B. 18.

C. 4.

D. 3.

•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4,5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \frac{2}{x-1}$. Khi đó:
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
b)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$		
c)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
d)	Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ và $g(x) = 4x^2 - x + 1$. Khi đó:
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Ta có $f(1) = 2$		
b)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$		
c)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$		
d)	Hàm số $y = f(x) - g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$		

Câu 3. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$f(x) = x^3 - x^2 + 8x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.		
b)	$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x}$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.		
c)	$f(x) = \frac{\sin x + 1}{x + 1}$ là hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; +\infty)$.		
d)	$f(x) = \sqrt{x - 2}$ là hàm số liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.		

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}, g(x) = x^2 - 3x + 1 \text{ và } h(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$$

Câu 4. Cho các hàm số sau:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
b)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
c)	Hàm số $h(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
d)	Hàm số $y = f(x).g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x-7}-1}{x^2-4} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{5x-9}{2} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \text{ và } g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2-x} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{1-x}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

Câu 5. Cho các hàm số

Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
b)	Hàm số $g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 2$.		
c)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{1}{4}$.		

d)	Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
----	--	--	--

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Câu 6. Cho hàm số và $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
b)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
c)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$.		
d)	Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ và } g(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$$

Câu 7. Cho hàm số và $g(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$		
b)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
c)	Khi $a = 1$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$		
d)	Khi $a = 0$ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$		

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{5x+11}}{2x^2 - 5x - 18} & \text{khi } x > -2 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases} \text{ và } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 2x + a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

Câu 8. Cho hàm số và $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 2x + a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$, khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
---------	--	------	-----

a)	Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{5}{26}$		
b)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$		
c)	Để hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $a = 1$		
d)	Khi $a = -1$ thì hàm số $y = f(x).g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$		

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+5}}{x^2 - 5x - 4} & \text{khi } x > -1 \\ x^2 - 9x & \text{khi } x \leq -1 \end{cases} \quad \text{và} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 2a+1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

Câu 9. Cho hàm số . Khi đó:
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{8}$		
b)	Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$		
c)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$ khi $a = \frac{1}{2}$		
d)	Khi $a = -\frac{1}{2}$ hàm số $y = f(x) - g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$		

Câu 10. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$f(x) = \frac{3x-2}{x-5}$ là hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 5), (5; +\infty)$.		
b)	$f(x) = \sin x - 2\cos x + 3$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.		
c)	$f(x) = \sqrt{4-x^2}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.		
d)	$f(x) = \sqrt{2-x} + 3\sqrt{x+1}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.		

• **Dạng 9: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2mx + 1 & x \leq 1 \\ mx + 1 & x > 1 \end{cases}$$

Câu 1: Tìm giá trị của tham số m sao cho hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - 1}$$

Câu 2: Tìm các khoảng trên đó hàm số liên tục.

$$2x^5 + a(x^2 - 1) + 1 = 0$$

Câu 3: Chứng tỏ rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực a .

$$f(x) = \frac{g(x)}{x}$$

Câu 4: Cho hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ trừ điểm $x = 0$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 1 \\ ax + b & 1 < x < 2 \\ 5 & x \geq 2 \end{cases}$$

Câu 5: Cho hàm số. Xác định a, b để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x < 1 \\ mx + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Câu 6: Tìm tham số m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 7: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

a)

$$g(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 3x - 4}$$

b)

Câu 8: Dùng định nghĩa, xét tính liên tục của hàm số:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

a) tại điểm $x = -2$;

$$f(x) = \sqrt{3x + 2}$$

b) tại điểm $x = 0$.

Câu 9: Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau tại điểm $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 6 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ 2x^2 - 6 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 0 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

b)

Câu 10: Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = |x+1|$ tại điểm $x = -1$; b) $g(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2. \end{cases}$$

Câu 11: Cho hàm số

Tìm giá trị của tham số a để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Câu 12: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 2$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4x}$;

c) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Câu 13: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{khi } x < 1 \\ x^2 + x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{khi } x < 1 \\ -x^2 + a & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Câu 14: Cho hai hàm số và

Tìm giá trị của tham số a sao cho hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Câu 15: Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.

b) $\sqrt{x^2 + x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Câu 16: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại $x_0 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \quad x=0$$

Câu 17: Xét tính liên tục của hàm số

tại .

Câu 18: Chứng tỏ rằng các phương trình sau có nghiệm trong khoảng tương ứng:

a) $x^2 = \sqrt{x+1}$, trong khoảng $(1;2)$.

b) $\cos x = x$, trong khoảng $(0;1)$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x|x-3|}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 3 & \text{khi } x = 3 \end{cases} \quad x=3$$

Câu 19: Xét tính liên tục của hàm số

tại điểm .

Câu 20: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$ b) $y = g(x) = \sqrt{3x+6} + \frac{2\sin x}{\sqrt{3-x}}$.

Câu 21: Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0;1)$;

b) $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } |x| < 2 \\ x(2-x) & \text{khi } |x| \geq 2 \end{cases}$$

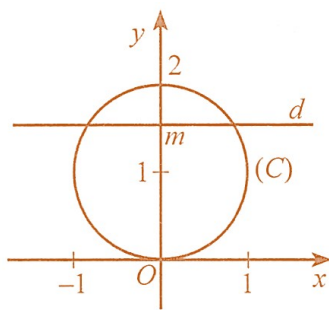
Câu 22: Cho hàm số

Tìm giá trị của các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1$. Với mỗi số thực m , gọi

$Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $d: y = m$ với đường tròn (C) . Viết công thức xác định hàm số

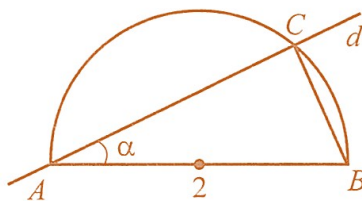
$y = Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?



Hình 2

Câu 24: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A , cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$.

Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ và tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha), \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.



Hình 3

Câu 25: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^2 + \cos x$ b) $g(x) = 3x^3 + 2 - \frac{3}{x+2}$ c) $h(x) = \frac{2x+5}{x+2} + \frac{3x-1}{2x-4}$.

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ b & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Câu 26: Tìm các số thực a và b để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 27: Dùng định nghĩa, xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = -1$.

a) $y = f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x-1}$ b) $y = g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 0 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$

Câu 28: Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn

đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0 < t \leq 4$). Viết công thức xác định hàm số $y = P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0; 4]$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vn teach.com>